Il porisma di Steiner

Luciano Battaia[*]

Versione del 4 maggio 2007

In questo articolo è proposta una ampia trattazione del famoso *Porisma di Steiner*. Tutte le figure sono state costruite utilizzando il pacchetto PSTricks e le sue estensioni, in particolare pst-eucl.

Il lavoro è stato prodotto durante il corso di introduzione a LaTeX, svolto nella classe 3ªB del Liceo Scientifico "Michelangelo Grigoletti" di Pordenone, A.S. 2006 – 2007.

Come complemento a questo fascicolo è possibile esaminare un'animazione, realizzata con Cabri, all'indirizzo http://www.batmath.it/cabri/steiner/steiner.htm.

Indice

1 L'enunciato del problema

Siano $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ due circonferenze di raggi R ed r $(R > r)$, interne una all'altra. Sia poi γ_1 una circonferenza tangente sia a $\mathscr{C}$ che a $\mathscr{C}'$. Successivamente sia γ_2 una circonferenza tangente a $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ e γ_1, γ_3 una circonferenza (diversa da γ_1) tangente a $\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ e γ_2, e così via. Diciamo che la "catena" $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ si chiude se esiste un intero n tale che γ_n sia tangente a γ_1 e quindi $\gamma_{n+1} = \gamma_1$.

Ebbene, se la catena si chiude, la posizione iniziale di γ_1 non è importante: il fatto che la catena si chiuda dipende solo dalle due circonferenze date $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$.

Una catena chiusa di circonferenze con le proprietà indicate si chiama anche una *catena di Steiner*.

Nella figura 1 è rappresentato il caso $n = 4$, con due diverse situazioni di partenza.

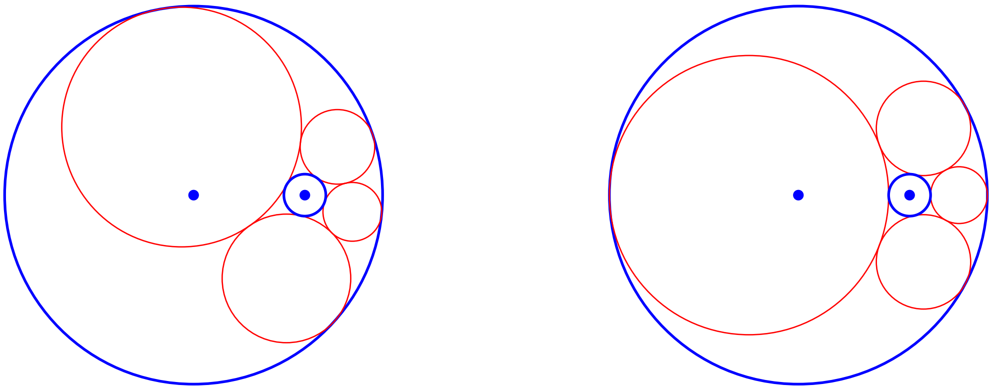

Figura 1: *Porisma di Steiner: il caso $n = 4$, con due diverse situazioni iniziali*

Si noti che la modifica della posizione della circonferenza iniziale rende la figura completamente diversa, facendo variare il raggio di tutte le circonferenze della catena.

[*] http://www.batmath.it

Per rendersi conto del perchè la posizione della circonferenza iniziale è ininfluente, cominciamo a considerare il caso in cui le due circonferenze date sono concentriche, quando la proprietà indicata è evidente.

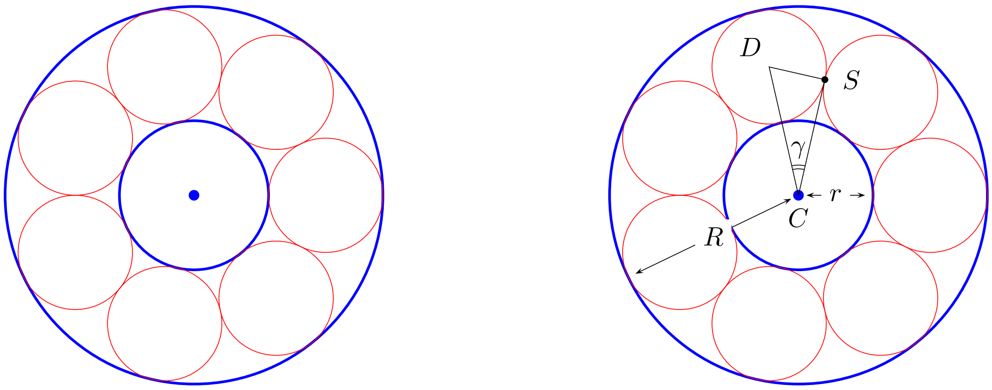

Figura 2: *Porisma di Steiner: il caso $n = 7$ con due circonferenze di base concentriche*

Esaminando la costruzione di destra nella figura 2 si può facilmente ricavare il legame che deve intercorrere tra i raggi r ed R delle due circonferenze di base e il numero delle circonferenze della catena, affinché la catena stessa si chiuda.

Si ha:

— il triangolo $\triangle CSD$ è retto in S;
— l'angolo γ vale π/n;
— $DS = (R-r)/2$;
— $CD = r + (R-r)/2 = (R+r)/2$.

Se ne deduce che si ha:
$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{R-r}{R+r}\,,$$
da cui
$$\frac{r}{R} = \frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\,.$$

Per trattare il caso generale di due circonferenze non concentriche occorre premettere una importante proprietà di una coppia di circonferenze non aventi punti in comune.

2 Inversione di due circonferenze, senza punti comuni, in due circonferenze concentriche

Date due qualunque circonferenze del piano, prive di punti comuni, è sempre possibile trasformarle, mediante inversione, in due circonferenze concentriche.

Si tratta di una proprietà legata alle caratteristiche dei fasci di circonferenze, di cui qui non vogliamo dare una dimostrazione, quanto piuttosto una costruzione geometrica, basata sui punti seguenti.

— Si considerano due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ qualunque, non aventi punti in comune. Due circonferenze come queste individuano un *fascio iperbolico* di circonferenze.
— Si prende un punto P non appartenente a nessuna delle due circonferenze.
— Si considerano gli inversi, P_1 e P_2, di P rispetto alle due circonferenze.
— La circonferenza $\mathscr{C}_1$ passante per P, P_1, P_2 è ortogonale sia a $\mathscr{C}$ che a $\mathscr{C}'$ (si tratta di una delle circonferenze appartenenti al *fascio ortogonale* rispetto a quello delle due circonferenze date).
— Si ripete la costruzione precedente con un altro punto Q, ottenendo una circonferenza $\mathscr{C}_2$, ortogonale alle due date.
— Considerando un circolo $\mathscr{I}$ con centro in uno dei due punti, diciamolo S, di intersezione delle circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ (che sono detti *punti critici* del fascio iperbolico) e prendendo le inverse delle due circonferenze $\mathscr{C}$ e $\mathscr{C}'$ rispetto a $\mathscr{I}$ si ottengono due circonferenze con centro comune C.

La costruzione completa è riportata nella figura che segue.

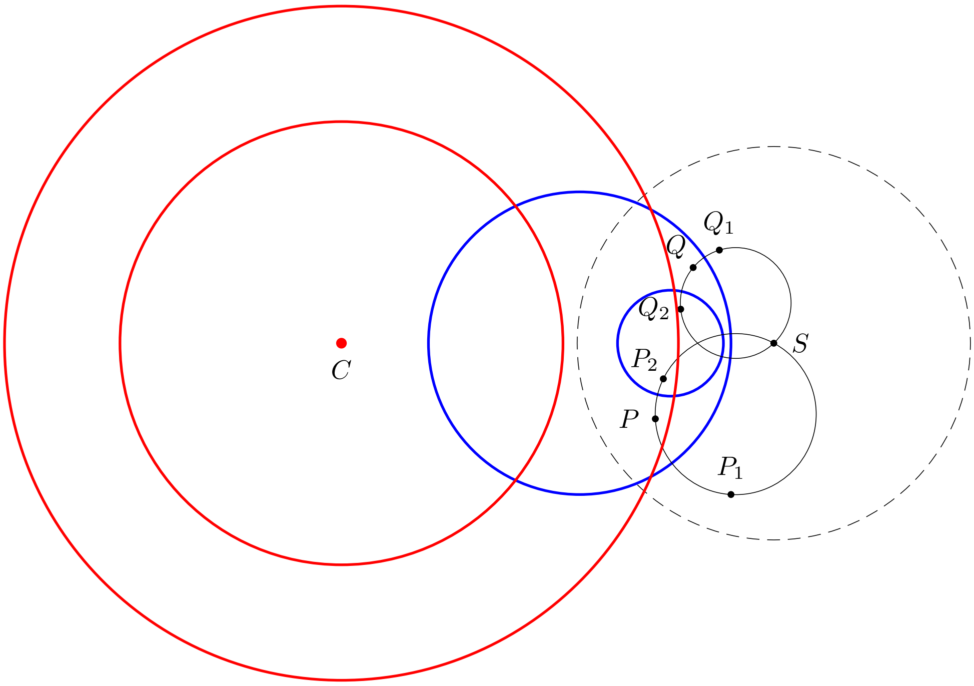

Figura 3: *Inversione di due circonferenze in due circonferenze concentriche*

3 Conclusioni

Siccome due circonferenze senza punti comuni possono essere trasformate, per inversione rispetto ad un opportuno circolo, in due circonferenze concentriche, si può ora procedere a costruire, se possibile, una catena di Steiner per questa figura simmetrica. L'inversione rispetto allo stesso circolo precedente produrrà la figura richiesta per la configurazione originale: basta tenere conto che nell'inversione sono mantenute tutte le condizioni di tangenza. È ora evidente il perché la posizione della circonferenza iniziale non è influente.

L'inversione mantiene le condizioni di tangenza, ma non i centri delle circonferenze: c'è dunque da aspettarsi che i centri delle circonferenze della catena non stiano su una circonferenza (come avviene per la figura simmetrica). Infatti questi centri stanno su un'ellisse di cui i centri delle circonferenze di base sono i fuochi.

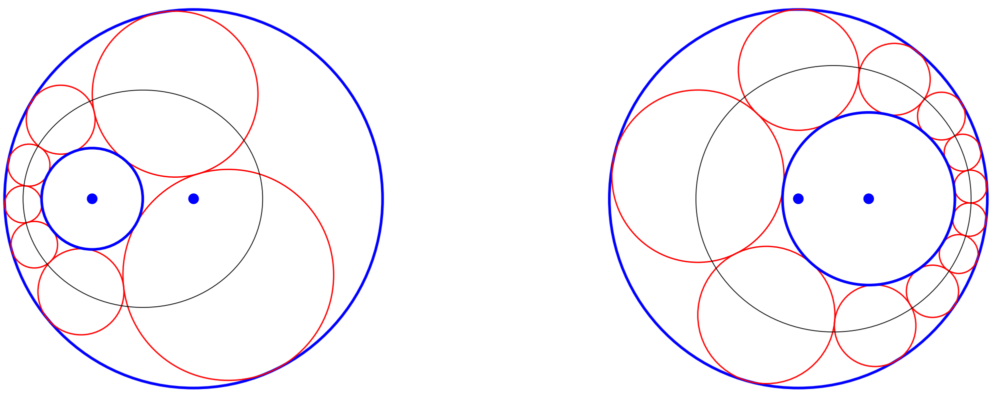

Figura 4: *Il porisma di Steiner: evidenziazione della conica dei centri in due casi.*

4 I codici per la costruzione delle figure con PSTricks

Tutte le figure presenti in questo fascicolo sono costruite utilizzando PSTricks e la sua estensione pst-eucl.

Abbiamo utilizzato due macro (da inserire preferibilmente nel preambolo) per facilitare la costruzione dei punti inversi e delle circonferenze inverse. Il codice, ampiamente commentato è riportato qui di seguito.

I codici delle macro

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Comando \pstInv con  5 parametri, di cui uno opzionale: calcola l'inverso di un punto, dato
   %il centro e il raggio del circolo di inversione (che non viene però disegnato)
% Par1 (opzionale): il punto punto inverso non viene disegnato nè nominato; le opzioni da inserire
   %sono le solite di  pst-eucl, con l'avvertenza che il punto è il punto B
   %(PointNameB, PointSymbolB, ecc.)
% Parametro 2: il centro di inversione (un nodo già definito)
% Parametro 3: il raggio del circolo di inversione, che deve essere un numero reale
% Parametro 4: il punto di cui calcolare l'inverso
% Parametro 5: il nome di nodo del punto inverso (disegnato solo se PointNameB è posto a default
   %o qualcos'altro)
%%%%%%%%%%%%
%Comando \pstInvCirc con  5 parametri, di cui uno opzionale: calcola l'inverso di un circolo,
   %dato il centro e il raggio del circolo di inversione
% Par1 (opzionale): con le solite opzioni di pst-eucl consente di dare una nome al centro
   %del circolo inverso, un colore e uno spessore al circolo inverso, ecc.
% Parametro 2: il centro di inversione (un nodo già definito)
% Parametro 3: il raggio del circolo di inversione, che deve essere un numero reale
% Parametro 4: il centro del cerchio di cui calcolare l'inverso
% Parametro 5: un punto che individui il circolo di cui calcolare l'inverso
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
\makeatletter
\newcommand{\pstInv}[5][]{%
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{#3},PointNameA=none,PointSymbolA=none,%
   PointNameB=none,PointSymbolB=none]{#2}{#4}{#2}{}{@X}{@Q}%
\pstRotation[RotAngle=90,PointName=none,PointSymbol=none]{#2}{@Q}[@T]%
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{#4}{@Q}{@T}[@S]%
\pstInterLL[PointName=none,PointSymbol=none]{@Q}{@S}{#2}{@T}{@N}%
\pstCircleOA[linestyle=none]{#2}{@N}%
{\psset{PointNameA=none,PointSymbolA=none,PointNameB=none,PointSymbolB=none}%
\pstInterLC[#1]{#2}{#4}{#2}{@N}{@R}{#5}}%
}
\newcommand{\pstInvCirc}[5][]{%
{\psset{PointSymbol=none,PointName=none}
\pstInterLC{#4}{#2}{#4}{#5}{@R1}{@S1}
\pstInv{#2}{#3}{@R1}{@R1'}
\pstInv{#2}{#3}{@S1}{@S1'}
}
\pstMiddleAB[#1]{@R1'}{@S1'}{@M1}
\pstCircleOA[#1]{@M1}{@S1'}
}
\makeatother
```

Il codice della figura

Il codice, ampiamente commentato, contiene una parte con alcuni parametri che possono essere facilmente cambiati per ottenere diverse figure.

```
\begin{pspicture*}(-8,-8)(8,8)
\psset{linewidth=0.3pt}
%%% Parametri modificabili %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Il raggio della circonferenza grande di base, che deve avere centro C nell'origine
\newcommand{\rgrande}{2.5}
%Un numero strettamente compreso tra -1 e 1, e diverso da zero, per posizionare
   %il centro della circonferenza C' piccola di base. Se positivo C' sta a sinistra
   %di C, altrimenti a destra.
```

```
\newcommand{\distcentri}{-0.6}
%Il numero di circonferenze della catena di Steiner, maggiore o uguale a 3.
\newcommand{\numcirc}{4}
%L'angolo, compreso tra 0 e 360, che individua il punto di tangenza tra la
   %circonferenza grande di base e la prima circonferenza della catena
\newcommand{\anginiz}{100}
%%% Fine parametri modificabili %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Le ascisse dei punti a sinistra e a destra dell'origine sulla circ grande di base
\newcommand{\xA}{-\rgrande}\newcommand{\xB}{\rgrande}
%L'ascissa di un punto tra A e il centro della circ grande di base, il cui inverso
   %rispetto a \rgrande sarà il centro del circolo di inversione
\newcommand{\xP}{-\rgrande\space \distcentri\space mul}
%Il raggio del circolo di inversione (non ha alcuna influenza sul risultato finale)
\newcommand{\rinv}{2}
%L'angolo di cui far ruotare successivamente la prima circonferenza (nella configurazione
   %simmetrica) per ottenere poi tutte le circonferenze
\newcommand{\angrot}{360 \numcirc\space div}
%Il centro del circolo di inversione (calcolato prendendo l'inverso del punto di ascissa xP)
\newcommand{\xI}{\rgrande\space 2 exp \xP\space div}
%L'ascissa dell'inverso di A
\newcommand{\xAA}{\xI\space \rinv\space 2 exp \xA\space \xI\space sub div add}
%L'ascissa dell'inverso di B
\newcommand{\xBB}{\xI\space \rinv\space 2 exp \xB\space \xI\space sub div add}
%Il raggio grande della figura simmetrica
\newcommand{\rgrandeI}{\xAA\space \xBB\space sub abs 2 div}
%Il raggio piccolo della figura simmetrica
\newcommand{\rpiccoloI}{\rgrandeI\space 1 180 \numcirc\space div sin sub 1 180 %
   \numcirc\space div sin add div mul}
%I punti base
\pstGeonode[PointName=none,PointSymbol={default,none},linecolor=blue,linewidth=1pt]%
   (0,0){C}(!\xI\space 0){I}(!\xAA\space 0){A'}(!\xBB\space 0){B'}(!\xA\space 0){A}(!\xB\space 0){B}
\pstCircleOA[linewidth=1pt,linecolor=blue]{C}{A}
%Il circolo di inversione (che non ha bisogno di essere disegnato)
%\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rinv}]{I}{}
%Il punto di tangenza del primo circolo della catena e il suo inverso
\pstRotation[RotAngle=\anginiz,PointName=none,PointSymbol=none]{C}{B}[Q]
\pstInv{I}{\rinv}{Q}{Q'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{A'}{B'}{M}
%Il circolo grande della configurazione simmetrica (che non ha bisogno di essere disegnato)
%\pstCircleOA{M}{A'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rpiccoloI},PointName=none,PointSymbol=none]{M}{C}{M}{}{V}{U}
%Il circolo piccolo della configurazione simmetrica, che non ha bisogno di essere disegnato
%\pstCircleOA{M}{U}
%Determinazione del centro del primo circolo della catena, nella figura simmetrica
\pstInterLC[PointName=none,PointSymbol=none]{M}{Q'}{M}{U}{R}{S}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{S}{Q'}{D}
{\psset{PointName=none,PointSymbol=none}
\multido{\n=1+1}{\numcirc}{\pstRotation[RotAngle=\angrot\space \n\space 1 sub mul]{M}{Q'}[T\n]}
\multido{\n=1+1}{\numcirc}{\pstRotation[RotAngle=\angrot\space \n\space 1 sub mul]{M}{D}[D\n]}
}
\multido{\n=1+1}{\numcirc}{\pstInvCirc[linecolor=red,linewidth=0.5pt,%
   PointName=none,PointSymbol=none]{I}{\rinv}{D\n}{T\n}}
\pstInvCirc[linecolor=blue,linewidth=1pt,PointName=none]{I}{\rinv}{M}{U}
\end{pspicture*}
```

5 Qualche figura, per il piacere degli occhi

Proponiamo ora alcune figure, che illustrano varie situazioni relative al problema di Steiner.

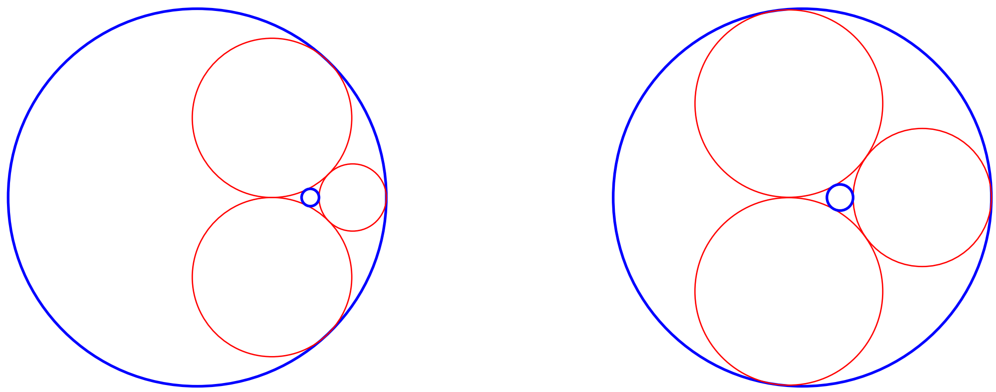

Figura 5: *Porisma di Steiner: due configurazioni con* $n = 3$

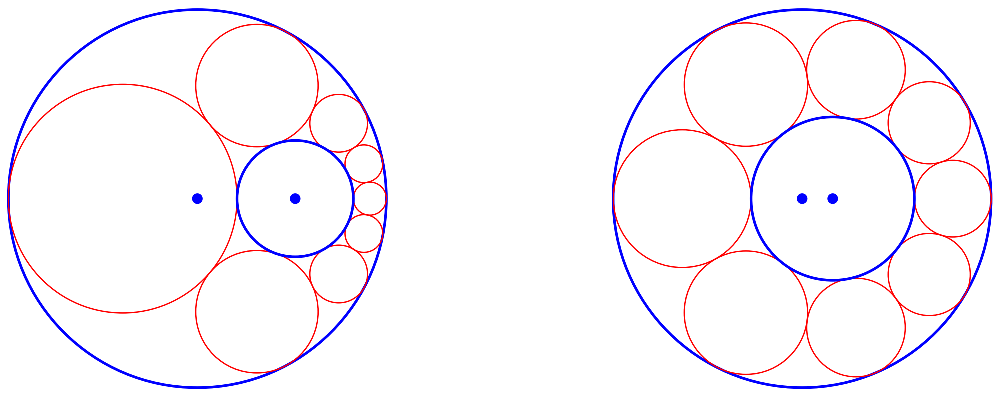

Figura 6: *Porisma di Steiner: due configurazioni con* $n = 8$

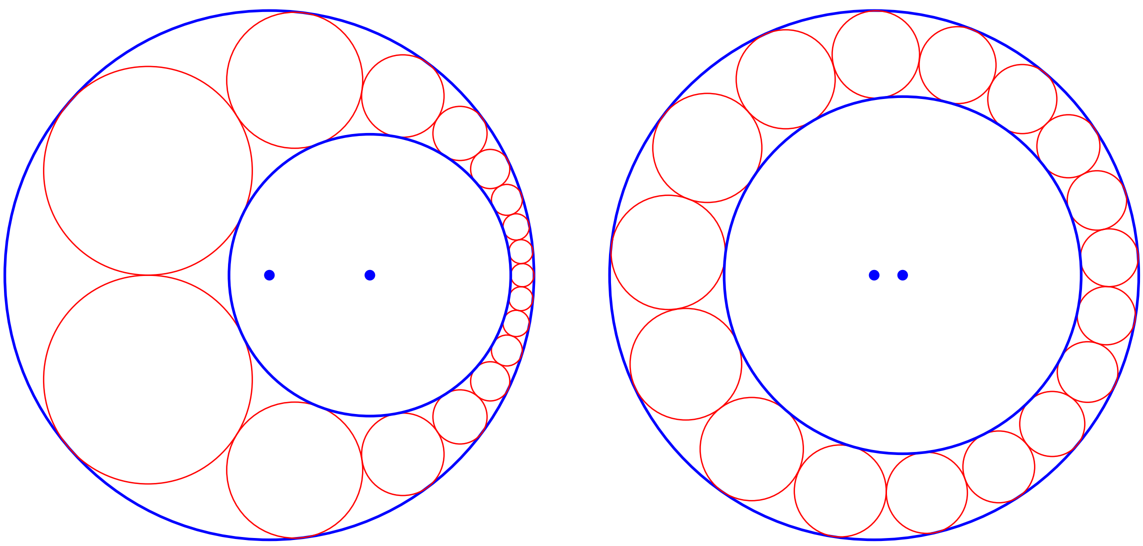

Figura 7: *Porisma di Steiner: due configurazioni con* $n = 17$

6 Steiner e Apollonio: il caso $n = 3$

È interessante esaminare il Porisma di Steiner, nel caso $n = 3$, in senso inverso: date tre circonferenze $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, a due a due tangenti esternamente, determinare, se esistono, due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ tali che $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ costituiscano una catena di Steiner relativa a $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$.

Si tratta, nella sostanza, di un caso particolare del problema di Apollonio,[1] che può essere risolto in maniera abbastanza semplice usando l'inversione circolare.

Il problema posto non ha sempre soluzioni: date le tre circonferenze $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, e considerate le due tangenti comuni "esterne" a due di esse, è necessario che la terza circonferenza intersechi almeno una di queste due tangenti. Si veda la figura che segue.

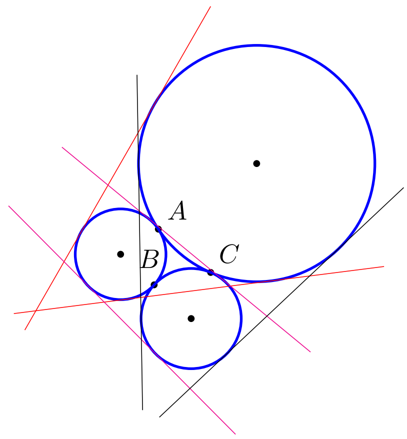

Figura 8: *Condizioni per la risolubilità del Porisma di Steiner "inverso" (caso $n = 3$)*

La costruzione di tre circonferenze esternamente tangenti può avvenire in vari modi. Segnaliamo qui uno dei possibili procedimenti.

- — Data la prima circonferenza, γ_1 di centro C_1, si costruisce facilmente la seconda, γ_2, prendendone il centro C_2 su una qualunque semiretta r per C_1 e facendola passare per il punto A di intersezione tra r e γ_1.
- — A questo punto si tira la perpendicolare per A alla retta C_1C_2 (che è l'asse radicale delle due circonferenze γ_1 e γ_2).
- — Per un punto A' dell'asse radicale si tirano le ulteriori tangenti a γ_1 e γ_2, indicando con B e C i punti di tangenza, rispettivamente su γ_1 e γ_2.
- — Il punto di intersezione, C_3, tra le rette C_1B e C_2C è il centro di una circonferenza γ_3 tangente sia a γ_1 che a γ_2.

È ovvio che si ottengono infinite circonferenze, a seconda della scelta di A'. Non in tutti i casi comunque, come già osservato, il problema che stiamo trattando avrà soluzione.

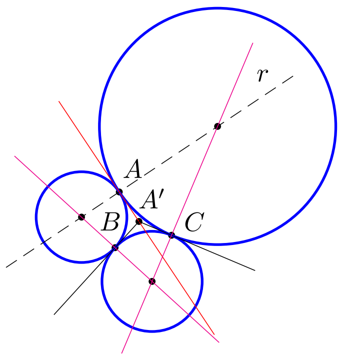

Figura 9: *Costruzione di tre circonferenze esternamente tangenti*

[1]Una trattazione completa del problema di Apollonio, comprensiva delle tecniche di costruzione delle figure con PSTricks, si può trovare in `http://www.batmath.it/latex/apollonio_pst.htm`

Per la costruzione delle due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ si può ora procedere nel modo di seguito indicato.

— Si considera un circolo di inversione con centro in A.

— Si costruiscono le due rette r_1 ed r_2, tra di loro parallele, inverse delle circonferenze γ_1 e γ_2.

— Si costruisce la circonferenza γ_3', inversa di γ_3.

— Si costruiscono le circonferenze δ_1 e δ_2, tangenti comuni a r_1, r_2 e γ_3'.

— Le inverse $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$ di δ_1 e δ_2 sono le due circonferenze richieste.

La figura seguente illustra il procedimento descritto.

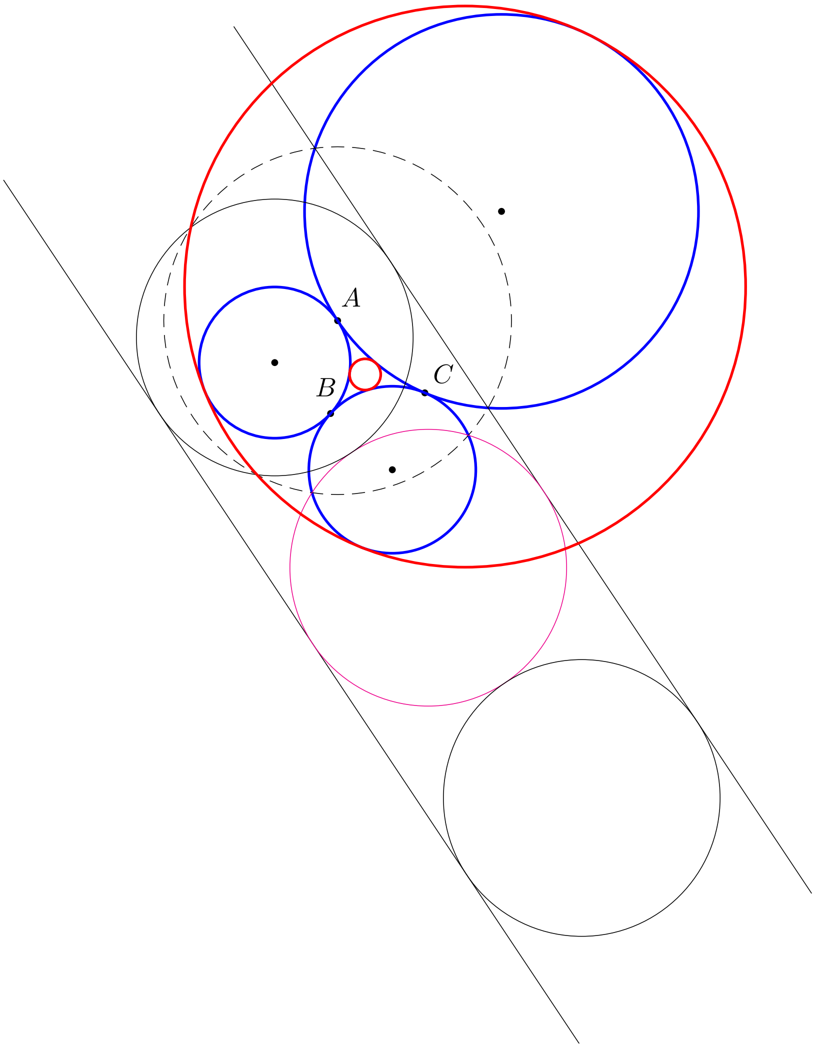

Figura 10: *Porisma di Steiner "inverso" nel caso* $n = 3$