

Università di Trieste – Facoltà d’Ingegneria.

Esercizi sul calcolo differenziale in  $\mathbb{R}^N$ .

Dott. Franco Obersnel

**Esercizio 1** Si calcoli la derivata direzionale nell’origine lungo la direzione del vettore  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)^T$  della funzione  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$ .

(Sol.  $v_1 v_2^2$ .)

**Esercizio 2** Si calcolino (nel generico punto del dominio) le derivate parziali e il gradiente delle funzioni

- a)  $f(x, y) = \log(x + y)$ ;
- b)  $g(x, y, z) = zx^y$ ;
- c)  $h(s, t, u, v, w) = s + 2t + 3u^2 + 4v^3 + stuvw$ ;
- d)  $k(x, \phi) = x \sin(x\phi + 3)$ .

(Sol.  $\frac{1}{x+y}(1, 1)^T$ ,  $(zyx^{y-1}, zx^y \log x, x^y)^T$ ,  $(1+tuvw, 2+suwv, 6u+stvw, 12v^2+stuw, stuw)^T$ ,  $(\sin(x\phi + 3) + x\phi \cos(x\phi + 3), x^2 \cos(x\phi + 3))^T$ .)

**Esercizio 3** Si scriva (nel generico punto del dominio) la matrice Jacobiana delle seguenti funzioni:

- a)  $f(x, y) = (x + xy, e^{xy})^T$ ;
- b)  $g(x, y, z) = (xy \cos z, x^2 + y)^T$ ;
- c)  $h(x, y) = (x^2 y + \log y, y^2 x + \log x, xy, x - y)^T$ ;
- d)  $k(u, v) = (\cos u \sin u, v^v)$ .

(Sol.  $\left( \begin{array}{cc} 1+y & x \\ ye^{xy} & xe^{xy} \end{array} \right)$ ,  $\left( \begin{array}{ccc} y \cos z & x \cos z & -xy \sin z \\ 2x & 1 & 0 \end{array} \right)$ ,  $\left( \begin{array}{cc} 2xy & x^2 + 1/y \\ y^2 + 1/x & 2xy \\ y & x \\ 1 & -1 \end{array} \right)$ ,  $\left( \begin{array}{cc} 2 \cos^2 u - 1 & 0 \\ 0 & v^v (\log v + 1) \end{array} \right)$ .)

**Esercizio 4** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}$$

- a) Si consideri la restrizione della  $f$  alla curva  $y = x^2$ .
- b) Si calcoli il limite per  $(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T$  di tale restrizione.
- c) Si deduca da b) che la funzione  $f$  non è continua nell’origine.
- d) Si verifichi che la funzione  $f$  è derivabile in ogni direzione (cioè ammette finite tutte le derivate direzionali) nell’origine.

(Sol. b)  $1/2$ . d) La derivata direzionale lungo la direzione del vettore  $(v_1, v_2)^T$  è  $v_1^2/v_2$  se  $v_2 \neq 0$ , altrimenti è 0.)

**Esercizio 5** Si calcoli il differenziale nel punto  $(e, 3)$  della funzione  $f(x, y) = x^y$ .

(Sol.  $df(e, 3)(v_1, v_2) = e^2(3v_1 + ev_2)$ .)

**Esercizio 6** Si scriva l'equazione del piano tangente alla superficie di equazione  $z = \ln(2x + y)$  nel punto  $(-1, 3, 0)^T$ .

(Sol.  $2x + y - z - 1 = 0$ .)

**Esercizio 7** Si calcoli la derivata direzionale nel punto  $(1, 1, 1)^T$  lungo la direzione del vettore  $\mathbf{v} = (1, 2, 3)^T$  della funzione  $f = (f_1, f_2)^T : f_1(x, y, z) = x^2 y \log(xz); f_2(x, y, z) = \frac{y}{x} e^{xyz}$ .

(Sol.  $\frac{1}{\sqrt{14}}(4, 7e)^T$ .)

**Esercizio 8** Si provi che è differenziabile nel suo dominio la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

(Sol. Nel punto  $(0, 0)^T$  il differenziale è 0, infatti  $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (0, 0)^T} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$ . In alternativa si può utilizzare il teorema del differenziale totale.)

**Esercizio 9** Si calcolino nell'origine le derivate parziali e le derivate direzionali rispetto alla direzione del versore  $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$  della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y)^T \neq (0, 0)^T \\ 0 & \text{se } (x, y)^T = (0, 0)^T \end{cases}.$$

Vale la formula  $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$ ? Come si giustifica questo fatto?

(La formula non vale; si osservi che la funzione non è differenziabile, infatti non è neppure continua, si veda Es. 4.)

**Esercizio 10** È data una funzione differenziabile  $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Si conoscono le derivate direzionali della  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)^T$  lungo due direzioni (non parallele)  $\mathbf{u} = (a, b)^T$  e  $\mathbf{v} = (c, d)^T$ :

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(x_0, y_0) = p; \quad \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0, y_0) = q.$$

Si calcoli il gradiente della funzione  $f$  nel punto:  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

(Sol.  $(\frac{dp-bq}{ad-bc}, \frac{aq-pc}{ad-bc})^T$ .)

**Esercizio 11** Sono date le funzioni

$$x(r, s, t) = rse^t; \quad y(r, s, t) = rs^2e^{-t}; \quad z(r, s, t) = r^2s \sin t; \quad u(x, y, z) = x^4y + y^2z^3.$$

Si trovi il valore di  $\frac{\partial u}{\partial s}$  quando  $r = 2$ ,  $s = 1$ ,  $t = 0$ .

(Sol. 192.)

**Esercizio 12** Si trovino il minimo e il massimo assoluti della funzione  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)^T\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(Sol.  $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ .)

**Esercizio 13** Si scriva la matrice Hessiana della funzione

$$f(x, y, z) = z \sqrt{1 + x^2 + y^2};$$

precisando l'insieme su cui è definita.

Sol.

$$\begin{pmatrix} z \frac{1+y^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & -\frac{xyz}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ -\frac{xyz}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & z \frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix}$$

**Esercizio 14** Si verifichi che la funzione

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

è soluzione dell'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

(Questa è l'equazione del calore, che modella la temperatura  $u$  di un corpo che scambia calore con l'ambiente; una soluzione dell'equazione data è una funzione  $u(x, t)$  che, sostituita all'equazione data, la soddisfa per ogni  $(x, t) \in A$ , dove  $A$  è un opportuno dominio di  $\mathbb{R}^2$ ).

**Esercizio 15** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Si verifichi che la funzione  $f$  ammette tutte le derivate parziali del primo ordine e che queste sono continue su  $\mathbb{R}^2$ . Si calcolino poi le derivate seconde nell'origine e si facciano opportune osservazioni alla luce del teorema di Schwarz.

**Esercizio 16** Si trovino i punti di massimo e minimo relativo per la funzione  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ .

(Sol.  $(0, 0)^T$  punto di sella,  $\pm(1, 1)^T$  punti di minimo.)

**Esercizio 17** Si studino i punti critici della funzione  $f(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ .

(Sol.  $(0, 0)^T$  punto di sella;  $\pm(1, 1)^T$  punti di massimo relativo;  $\pm(-1, 1)^T$  punti di minimo relativo.)

**Esercizio 18** Determinare i punti critici della funzione

$$f(x, y) = (3x - x^3)(3y - y^3);$$

classificandoli come punti di minimo o di massimo relativo o punti di sella. Stabilire se la funzione ammette massimo e/o minimo assoluti.

(Sol.  $(0, 0)^T$ ,  $\pm(0, \sqrt{3})^T$ ,  $\pm(\sqrt{3}, 0)^T$ ,  $\pm(\sqrt{3}, \pm\sqrt{3})^T$  punti di sella;  $\pm(1, 1)^T$  punti di massimo relativo,  $\pm(-1, 1)^T$  punti di minimo relativo.)

**Esercizio 19** Si calcoli l'approssimante quadratico (polinomio di Taylor di ordine 2) della funzione

$$f(x, y) = 3 \sin(xy) + \log\left(\frac{x}{y}\right)$$

nel punto  $(1, \pi)^T$ .

(Sol.  $P_2(x, y) = \log(1/\pi) + (1 - 3\pi)(x - 1) - (3 + 1/\pi)(y - \pi) - (x - 1)^2 - 6(x - 1)(y - \pi) + (1/\pi^2)(y - \pi)^2$ .)

**Esercizio 20** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua su tutto  $\mathbb{R}$ ; è possibile per  $f$  avere 2 punti di massimo relativo e nessun punto di minimo relativo? Si discuta tale questione confrontando con quanto avviene per funzioni in più variabili, considerando e studiando la funzione

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2y - x - 1)^2.$$

(Sol. No, se si considera minimo in senso debole. La cosa non vale più per funzioni definite su  $\mathbb{R}^2$ . Per la funzione proposta  $(1, 2)^T$  e  $(-1, 0)^T$  sono punti di massimo relativo e assoluto; la funzione non ammette nessun punto di minimo relativo.)

**Esercizio 21** Uno scatolone a base rettangolare senza coperchio deve contenere un volume di  $32000 \text{ cm}^3$ . Si trovino le dimensioni (altezza, larghezza e profondità) che minimizzano la quantità di cartone impiegato.

(Sol. 20,40,40.)

**Esercizio 22**

a) Si provi che esistono massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

nella palla unitaria chiusa  $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

b) Si osservi che per ogni  $(x, y)^T \in D$  si ha  $|xy| \leq \frac{1}{2}$ .

c) Si determini l'unico punto critico di  $f$  nella palla aperta, e si verifichi che non è un punto di estremo.

d) Si concluda che i punti di minimo e di massimo devono avere norma 1.

e) Si calcolino massimo e minimo di  $f$  su  $D$ .

(Sol. Max  $\sin \frac{1}{2}$ , min  $-\sin \frac{1}{2}$ .)

**Esercizio 23** Si trovino eventuali punti estremali locali e assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy}.$$

(Sol.  $(-\frac{1}{2}, 4)^T$  punto di massimo relativo; non vi sono estremi assoluti.)

**Esercizio 24** Si studino i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + 2xz + 2yz + 5x + y - z + 3.$$

(Sol.  $(-6, -4, \frac{7}{2})^T$  punto di minimo relativo.)

**Esercizio 25** Classificare i punti critici della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^4 + y^2 + z^3 - 2xz.$$

(Sol.  $(\frac{2}{3}, 0, \frac{2}{3})^T$  punto di minimo relativo,  $(0, 0, 0)^T$  punto di sella.)

**Esercizio 26** Sia  $f : B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione differenziabile definita nella palla-aperta di raggio 1 centrata nell'origine. Supponiamo che  $\|\nabla f(\mathbf{x})\| \leq 1$  per ogni  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$ . Sia inoltre  $f(\mathbf{0}) = 0$ .

Si dimostri che la funzione  $f$  è limitata su  $B(\mathbf{0}, 1)$  e che si ha  $|f(\mathbf{x})| \leq 1$  per ogni  $\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, 1)$ .

(Sol.  $|f(x)| = |f(x) - f(0)| = |\langle \nabla f(\xi), x \rangle| \leq \|\nabla f(\xi)\| \cdot \|x\| \leq 1$ .)

**Esercizio 27** Si trovino i punti dell'ellissoide

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1;$$

nei quali il piano tangente è parallelo al piano  $\pi$  di equazione

$$3x - y + 3z = 1.$$

(Sol.  $\frac{\pm 1}{\sqrt{50}}(-6, 1, -2)^T$ .)

**Esercizio 28** Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x, y) = e^{-xy};$$

nella regione

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

(Sol. Max  $e^{\frac{1}{4}}$ , min  $e^{-\frac{1}{4}}$ .)

**Esercizio 29** Si trovino i punti della superficie di equazione

$$xy^2z^3 = 2$$

che sono più vicini all'origine.

(Sol.  $\left(3^{-\frac{1}{4}}, \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$ ,  $\left(3^{-\frac{1}{4}}, -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}\right)^T$ ,  $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$ ,  $\left(-3^{-\frac{1}{4}}, -\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{4}}, -3^{\frac{1}{4}}\right)^T$ .)

**Esercizio 30** Sia  $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$  la curva

$$\gamma(t) = (\cos t \sin t, \sin^2 t, 2t)^T.$$

Si dica se  $\gamma$  è una curva continua, regolare, semplice. Si disegni uno schizzo della curva. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto  $\gamma(t)$ .

**Esercizio 31** Sia  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  la curva

$$\gamma(t) = (t^2 - t, 2t^3 - 3t^2 + t)^T.$$

Si dica se  $\gamma$  è una curva regolare, semplice. Si trovino le equazioni del vettore tangente la curva nel punto  $\gamma(t)$ . Si trovino i valori del parametro  $t$  per i quali la curva è contenuta nel semipiano  $x \leq 0$ . Si dica se il sostegno dell'arco di curva contenuto in tale semipiano è un insieme limitato di  $\mathbb{R}^2$ . Si dica se la curva  $\gamma$  è limitata. Si disegni uno schizzo della curva.

**Esercizio 32** Si stabilisca che esistono e si calcolino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{y^2 + 1}$$

sull'insieme

$$E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid xy - x^2 = 0\}.$$

(Sol. Max  $\frac{1}{2}$ , min  $-\frac{1}{2}$ .)

**Esercizio 33** Si provi che due curve regolari equivalenti hanno versori tangenti con la stessa direzione.

**Esercizio 34** Si trovino gli estremi della funzione  $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ; vincolata all'insieme  $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}\} \quad a \in \mathbb{R}^+$ .

(Sol. Punto di massimo  $(a\sqrt{2}, a\sqrt{2})^T$ , punto di minimo  $(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2})^T$ .)

**Esercizio 35** Si trovino massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = 4xy^2 - x^2y^2 - xy^3 :$$

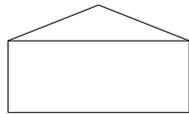
ristretta al triangolo di vertici  $(0, 0)^T$ ,  $(0, 6)^T$ ,  $(6, 0)^T$ .

(Sol. 6 Max 4, min -64)

**Esercizio 36** Si trovino i valori massimo e minimo assoluti per la funzione  $f(x, y) = x^3 + y^2 - 2x + 1$  nel dominio a forma di mezza luna costituito da tutti i punti del disco  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$  posti alla sinistra del ramo destro dell'iperbole  $x^2 - y^2 = 1$ .

(Sol. Min= $1 - \sqrt{\frac{32}{27}}$  nel punto  $(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0)^T$ , Max= $\frac{5+\sqrt{3}}{4}$  nei punti  $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \pm\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}})^T$ .)

**Esercizio 37** Si consideri il pentagono in figura, costituito da un triangolo isoscele sovrapposto ad un rettangolo. Il pentagono ha perimetro fisso  $P$ . Si trovino le lunghezze dei lati del pentagono che massimizzano l'area.



(Sol. base =  $P(2 - \sqrt{3})$ , altezza =  $P \frac{3-\sqrt{3}}{6}$ , lato obliquo =  $P \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$ )

**Esercizio 38** Si trovino gli estremi della funzione

$$f(x, y, z) = x + 2y;$$

vincolata alla curva definita dall'intersezione delle superfici di equazioni:

$$x + y + z = 1; \quad y^2 + z^2 = 4.$$

(Sol. Max  $1 + 2\sqrt{2}$ , min  $1 - 2\sqrt{2}$ .)