

Università di Trieste – Facoltà d’Ingegneria.
Esercizi sul calcolo integrale in $\mathbb{R}^N$
Dott. Franco Obersnel

Esercizio 1 Sia $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3] \subset \mathbb{R}^3$ un parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$. Si diano le definizioni di decomposizione δ di R in sottoparallelepipedi; di somma inferiore e somma superiore di una funzione $f : R \rightarrow \mathbb{R}$; di integrale $\int_R f \, dm$.

Esercizio 2 Detto a il numero reale

$$a = \iint_D \sqrt{x^3 + y^3} \, dx dy, \quad D = [0, 1] \times [0, 1],$$

si provi che $a \in [0, \sqrt{2}]$.

Esercizio 3 Senza utilizzare le formule di riduzione, ma tenendo presente le proprietà di linearità dell'integrale e la formula del volume di un prisma retto, si calcoli l'integrale della funzione $f(x, y) = 3x + 4y$ sul rettangolo $[0, 1] \times [0, 2]$.

Esercizio 4 Si calcolino i seguenti integrali:

- a) $\iint_R x \sin(x + y) \, dx dy$ dove $R = [0, \frac{\pi}{6}] \times [0, \frac{\pi}{3}]$.
- b) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2 + 1} \, dx dy$ dove $R = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq 3\}$.
- c) $\iint_R \frac{1}{x + y} \, dx dy$ dove $R = [1, 2] \times [0, 1]$.

Esercizio 5 Si calcoli il volume del solido delimitato dal paraboloide ellittico $x^2 + 2y^2 + z = 16$, dai piani $x = 2$, $y = 2$ e dai 3 piani coordinati.

Esercizio 6 Si calcoli il volume della zona di spazio delimitata superiormente dal piano

$$z = 2x + 5y + 1,$$

situata sopra al rettangolo

$$\{(x, y, 0)^T \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x \leq 0; 1 \leq y \leq 4\}.$$

Esercizio 7 Si calcoli il volume del solido delimitato dalla superficie $x\sqrt{4x^2 + 4y} - 2z = 0$ e dai piani $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ e $z = 0$.

Esercizio 8 Si calcoli l'integrale triplo

$$\iiint_R \frac{xz}{y} \, dx dy dz \quad R = [0, 1] \times [1, 2] \times [0, 1].$$

Esercizio 9 Si calcoli l'integrale $\int_D 4y^3 \, dm$ dove D è l'insieme del piano delimitato dalle curve $y = x - 6$ e $y^2 = x$.

Esercizio 10 Si calcoli l'integrale $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} \, dx dy$. (Operando direttamente sul problema così come viene proposto si incontrano notevoli difficoltà. Conviene allora invertire l'ordine di integrazione.)

Esercizio 11 Si calcoli l'integrale $\iint_E \frac{x}{y} dx dy$ nella regione $E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, x^2 + (y-2)^2 \leq 1\}$.

Esercizio 12 Si trovino la massa ed il centro di massa di una lamina triangolare di vertici $(0, 0)^T$, $(1, 0)^T$, $(0, 2)^T$ la cui densità è descritta dalla funzione $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

Ricordo che la massa e le coordinate del centro di massa sono date rispettivamente da

$$m = \iint_D \rho(x, y) dx dy \quad \hat{x} = \frac{1}{m} \iint_D x \rho(x, y) dx dy \quad \text{e} \quad \hat{y} = \frac{1}{m} \iint_D y \rho(x, y) dx dy.$$

Esercizio 13 Si calcoli l'integrale

$$\iint_A e^{x+y} dx dy;$$

nella regione

$$A = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

Esercizio 14 Si calcoli il volume del solido delimitato dal cilindro $x = y^2$ (cioè dall'insieme $\{(y^2, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$) e dai piani $z = 0$ e $x + z = 1$.

Esercizio 15 Si calcoli il volume del solido

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2 - x\}.$$

Esercizio 16 Si calcoli il volume della sfera in tre modi:

- a) usando un integrale doppio;
- b) usando un integrale triplo ed integrando per sezioni;
- c) usando un integrale triplo e coordinate sferiche.

Esercizio 17 Si calcoli il momento di inerzia rispetto al piano xy , $I_{xy} = \int_S z^2 dm$ del solido S :

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4; z \geq 0; z^2 \geq x^2 + y^2\}.$$

Esercizio 18 Si calcoli il volume del solido

$$D = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

Si tratta della regione compresa tra i due cilindri di raggio 1 e 2 rispettivamente, che si trova sotto al paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$.

Esercizio 19 Si calcoli il volume del solido ottenuto dall'intersezione di due cilindri a base circolare di raggio unitario perpendicolari tra di loro:

$$E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; x^2 + z^2 \leq 1\}.$$

(Si integri per sezioni.)

Esercizio 20 Si calcoli il centro di massa del solido S che occupa il primo ottante dello spazio $\mathbb{R}^3$ (cioè $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) ed è contenuto nella sfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, se la densità del corpo è proporzionale alla distanza dall'origine (cioè $\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

Esercizio 21 Sia S un solido di rotazione ottenuto ruotando attorno all'asse z la figura $F = \{(x, z)^T \in \mathbb{R}^2 : a \leq z \leq b; f(z) \leq x \leq g(z)\}$;

dove $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

Si provi che il momento di inerzia rispetto all'asse z del solido $I_z = \iiint_S x^2 + y^2 dx dy dz$, è uguale a

$$I_z = \frac{\pi}{2} \int_a^b [g^4(z) - f^4(z)] dz.$$

Esercizio 22

Si calcolino il volume e il baricentro del solido

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : (1 - z)^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Esercizio 23 Siano $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$. Si definisce prodotto misto (o triplo) di $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c}$ il numero $\langle \bar{a} \wedge \bar{b}, \bar{c} \rangle$ ($\wedge$ indica il prodotto vettoriale, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica il prodotto scalare). Si verifichi che $\langle \bar{a} \wedge \bar{b}, \bar{c} \rangle = \det A$, dove A è la matrice quadrata che ha per colonne le componenti dei tre vettori. Si provi che $|\langle \bar{a} \wedge \bar{b}, \bar{c} \rangle|$ è il volume del parallelepipedo individuato da $\bar{a}, \bar{b}$ e $\bar{c}$.

Esercizio 24 Si calcoli l'integrale $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, dove $D = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1; y \geq x\}$.

Esercizio 25 Si calcoli il volume della regione di spazio interna alla semisfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \geq 0$ ed esterna (cioè che sta sotto) al cono di equazione $z^2 = x^2 + y^2$ (cioè $z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$).

Esercizio 26

Si usino coordinate ellittiche per calcolare l'integrale

$$\iint_E (x + y) dx dy \text{ dove } E \text{ è la regione interna all'ellisse di equazione } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Esercizio 27

Si calcoli la massa del cono $\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : z \in [1, 2], z \leq 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ se la sua densità nel punto $(x, y, z)^T$ è inversamente proporzionale al quadrato della distanza del punto dal piano $z = 0$.

Esercizio 28

Si consideri la seguente trasformazione lineare di coordinate nel piano:

$$u = 3x - y, v = y - x, \text{ e l'inversa } x = \frac{u + v}{2}, y = \frac{u + 3v}{2}.$$

Si utilizzi tale trasformazione per calcolare più agevolmente l'integrale

$$\iint_D (3x - y)^{\frac{1}{5}} \left(-\frac{x}{4} + \frac{y}{4}\right) dx dy,$$

nel parallelogramma delimitato dalle rette $y = 3x, y = x, y = 3x - 1, y = x + 4$.

Esercizio 29 Si consideri l'insieme

$$S = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1, +\infty); x^2 + z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si calcoli il volume di tale solido, calcolato come limite per $b \rightarrow +\infty$ del volume V_b del solido

$$S_b = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : y \in [1, b]; x^2 + z^2 \leq \frac{1}{y^2}\}.$$

Si verifichi che l'area della sezione

$$\{(y, z)^T \in \mathbb{R}^2 : \exists x \geq 1, (x, y, z)^T \in S\},$$

è infinita.

Il risultato ottenuto sembra paradossale?

Come fate a spiegare questo fatto?

Esercizio 30 Si calcoli il centro di massa di una lamina omogenea a forma di quarto di corona circolare di raggio interno r e raggio esterno R .

Esercizio 31 Si calcoli il volume della regione di $\mathbb{R}^3$ contenuta nella sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ e sita sopra il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$.

Esercizio 32 Si calcoli il momento di inerzia di una semisfera rispetto ad un diametro della base.

Esercizio 33 Si calcoli il momento di inerzia di un cono circolare retto di raggio di base R e altezza h

(a) rispetto al suo asse,

(b) rispetto ad un diametro della base.

Esercizio 34 Si calcoli il centro di massa del tetraedro omogeneo di vertici $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(0, \frac{1}{2}, 0)^T$, $(0, 0, \frac{1}{4})^T$.

Esercizio 35 Si calcolino gli integrali generalizzati:

$$a) \quad \iint_{\mathbb{R}^2} |y| e^{-x^2-y^2} dx dy,$$

$$b) \quad \iiint_E \sqrt{z} dx dy dz \quad E = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^{-2}\}.$$

$$c) \quad \iint_E \left(\frac{1}{x^2} + y \right) dx dy \quad E = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \leq 1, x + y \geq 2\}.$$

Esercizio 36 Si provi che, per ogni $N > 1$, una funzione f definita su un sottoinsieme localmente misurabile $E \subset \mathbb{R}^N$ è integrabile in senso generalizzato su E se e solo se $|f|$ è integrabile in senso generalizzato su E . Vale la stessa cosa se $N = 1$?