Versione del 10 dicembre 2015

Questa nota, ad uso degli studenti del corso di *Matematica per il Design* dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone, contiene osservazioni ed integrazioni trattate a lezione a titolo di approfondimento. Il suo contenuto non fa strettamente parte del programma d'esame.

Vogliamo fare una valutazione, essenzialmente grafica, del perché l'insieme dei numeri razionali (le frazioni, ovvero i decimali finiti o periodici) ha la stessa *numerosità* dell'insieme dei numeri naturali, ovvero perché

$$|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0.$$

Cominciamo con l'osservare che la cardinalità di $\mathbb{Q}$ non può essere più piccola di quella di $\mathbb{N}$, perché $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$. Facciamo ora vedere che non può essere nemmeno più grande: ne discenderà che le due cardinalità sono identiche.

Faremo addirittura vedere che l'insieme delle frazioni con denominatore positivo ha cardinalità $\aleph_0$, da cui discenderà subito che la cosa è vera anche per i razionali (i numeri razionali sono costituiti sostanzialmente dalle frazioni "ridotte ai minimi termini")'. Si esamini la figura 1 nella quale, per questioni grafiche, abbiamo scritto le frazioni come coppia di interi (di cui il secondo maggiore di zero).

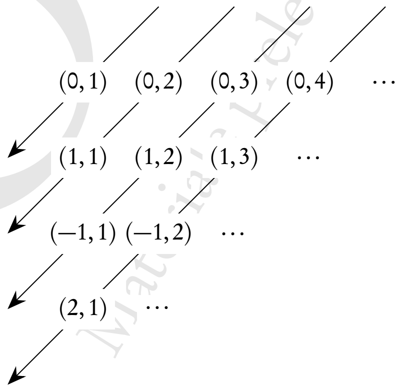

Figura 1: *Numerabilità dei razionali*

Si noti che i "numeri" scritti nella figura 1 sono molti di più dei razionali: addirittura, per esempio, i numeri della prima riga rappresentano sempre lo stesso numero razionale 0.

La stessa figura è di facile lettura e ci fa immediatamente capire quale sia la corrispondenza biunivoca che abbiamo in mente di realizzare tra i naturali e le frazioni:

$$0 \longleftrightarrow (0,1)$$

$$
\begin{aligned}
1 &\longleftrightarrow (0,2)\\
2 &\longleftrightarrow (1,1)\\
3 &\longleftrightarrow (0,3)\\
4 &\longleftrightarrow (1,2)\\
5 &\longleftrightarrow (-1,1)\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

È immediato che ad ogni numero razionale risulta associata una ben determinata frazione e che, viceversa ad ogni frazione risulta associato un ben determinato numero naturale. Dunque i due insiemi hanno la stessa cardinalità

Questo risultato è, a prima vista, abbastanza sorprendente: si pensi solo al fatto che tra due interi qualunque c'è sempre un numero finito di interi (addirittura tra due interi successivi non c'è alcun altro intero), mentre tra due razionali qualunque c'è sempre un numero infinito di razionali.

Quest'ultima osservazione sui razionali è particolarmente importante: mentre esiste sempre il successivo di un numero intero qualunque, *non* esiste il successivo di *nessun* numero razionale. Se rappresentiamo i numeri su una retta i punti corrispondenti agli interi hanno una distanza minima di una unità tra di loro, quelli corrispondenti ai razionali non hanno una minima distanza tra di loro (in termini formali si potrebbe dire che la minima distanza "tende a zero"). Un altro modo per rimarcare questo fatto è l'affermazione che i punti corrispondenti ai numeri razionali sono *densi* sulla retta. Tuttavia i numeri razionali non possono esaurire tutti i punti della retta, come vedremo fra poco.

Occupiamoci ora della cardinalità dei numeri reali. Anche in questo caso si deve avere, necessariamente,

$$|\mathbb{R}| \geq |\mathbb{N}|,$$

perché l'insieme dei naturali è un sottoinsieme di quello dei reali. Faremo ora vedere che non può essere $|\mathbb{R}| = |\mathbb{N}|$, ne seguirà che $|\mathbb{R}| > |\mathbb{N}|$.

Proporremo un tipo di dimostrazione detta "per assurdo". Supponiamo cioè che sia vero che l'insieme dei numeri reali è tanto *numeroso* quanto l'insieme dei numeri reali e mostriamo che finiamo in una contraddizione. Supponiamo dunque che sia possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i numeri reali e rappresentiamo i numeri reali nella loro forma decimale: $\alpha.\beta_1\beta_2\ldots$, dove α è un intero e $\beta_1, \beta_2, \ldots$ sono le cifre decimali. Potremo così costruire una tabella come la seguente:

$$
\begin{aligned}
0 &\longleftrightarrow \alpha_0.\beta_{01}\beta_{02}\beta_{03}\ldots\\
1 &\longleftrightarrow \alpha_1.\beta_{11}\beta_{12}\beta_{13}\ldots\\
2 &\longleftrightarrow \alpha_2.\beta_{21}\beta_{22}\beta_{23}\ldots\\
3 &\longleftrightarrow \alpha_3.\beta_{31}\beta_{32}\beta_{33}\ldots\\
&\ldots\\
n &\longleftrightarrow \alpha_n.\beta_{n1}\beta_{n2}\beta_{n3}\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Ora consideriamo il numero reale $\gamma.\delta_1\delta_2\delta_3\ldots$ costruito come segue: se $\alpha_0 = 0$ allora $\gamma = 1$, altrimenti $\gamma = 0$; se $\beta_{01} = 0$ allora $\delta_1 = 1$, altrimenti $\delta_1 = 0$; se $\beta_{12} = 0$ allora $\delta_2 = 1$, altrimenti $\delta_2 = 0$; ecc. Questo numero non può essere in corrispondenza con nessun numero naturale, perché è diverso da tutti quelli che compaiono nella tabella precedente o per la parte prima della virgola o almeno per una cifra decimale. Questo significa che la corrispondenza in questione lascia fuori almeno un numero reale (in realtà ne lascia fuori infiniti), dunque non può essere biunivoca.

Questo fatto è molto importante: mentre l'insieme dei numeri razionali non può "riempire" tutta la retta, l'insieme dei numeri reali può farlo, e in effetti lo fa.

Una semplice costruzione grafica rende evidente l'importanza dell'introduzione dei numeri irrazionali, a completamento dei razionali, per costruire i numeri reali.

Fissiamo su una retta due punti A e B, la cui distanza prendiamo uguale a 1, e costruiamo, con riga e compasso, il quadrato ABCD. Successivamente costruiamo la circonferenza con centro in A e apertura di compasso $|\overline{AC}|$. Risulta visivamente evidente che questa circonferenza deve intersecare la retta data AB in due punti E ed F, ma ciò succede *se e solo se* esiste un numero in grado di misurare i segmenti $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, ovvero se e solo se abbiamo inserito tra i nostri numeri anche il numero $\sqrt{2}$, che *non* è razionale. Si veda la figura 2.

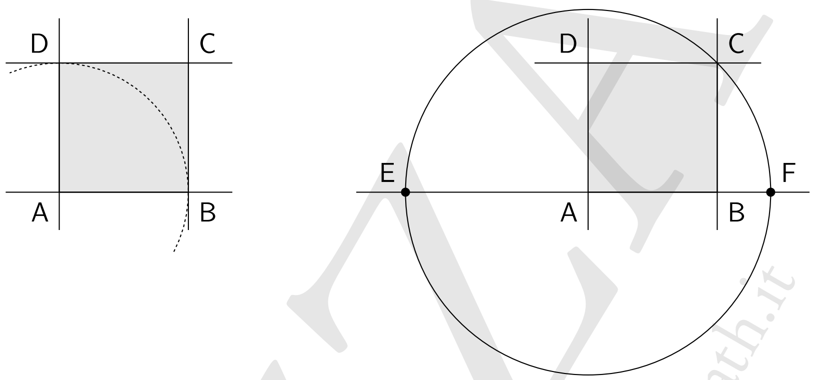

Figura 2: *Intersezioni tra una retta e una circonferenza*

I primi ad accorgersi di questo fatto a prima vista sorprendente furono i pitagorici, più precisamente forse Ippaso di Metaponto. La scoperta fu così sconvolgente che, secondo una leggenda, Ippaso fu condannato a morire annegato. In effetti Proclo[1] nel suo *Commento al primo libro degli 'Elementi' di Euclide* scrive: "I pitagorici narrano che il primo divulgatore di questa teoria [degli irrazionali] fu vittima di un naufragio; e parimenti si riferivano alla credenza secondo la quale tutto ciò che è irrazionale, completamente inesprimibile e informe, ama rimanere nascosto; e se qualche anima si rivolge ad un tale aspetto della vita, rendendolo accessibile e manifesto, viene trasportata nel mare delle origini, ed ivi flagellata dalle onde senza pace".

[1]Proclo Licio Diadoco, (412-485).