LUCIANO BATTAIA

LA SEZIONE AUREA

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

www.batmath.it

La sezione aurea
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 settembre 2020

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013

Indice

Premessa

Questo fascicoletto contiene solo alcune integrazioni al testo in uso[1] presso il corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Molte delle immagini proposte sono prese da siti web e la fonte è sempre citata. Sono da intendersi ad uso esclusivo degli studenti iscritti al corso citato.

Segnaliamo inoltre che una gran parte del contenuto di questo fascicolo è preso dal bellissimo testo di Mario Livio, *La sezione aurea*, BUR Saggi, Milano 2014, libro di cui consigliamo vivamente la lettura.

[1] Nicoletta Sala e Gabriele Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli Editore, Milano, 2003.

1 Il rapporto estremo e medio

1.1 La definizione di Euclide

Euclide, *Elementi*, Libro VI, Definizione III[1]:

> Una retta è detta risultare secata in rapporto estremo e medio quando sia come la retta totale rispetto al segmento maggiore, così il maggiore rispetto al minore.

Prima di procedere, ricordiamo che, negli Elementi di Euclide, il termine “retta” ha il significato che noi attribuiamo a “segmento”.

La figura 1.1 illustra il senso della definizione di Euclide: M è la parte maggiore, m la parte minore, $M+m$ l'intero segmento.

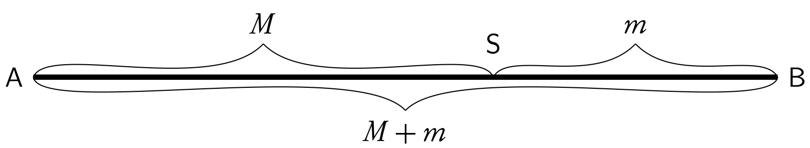


Figura 1.1: *Il rapporto estremo e medio*

La proporzione definita da Euclide si esprime, in notazioni moderne, come segue:

$$(M+m):M = M:m. \tag{1.1}$$

Applicando le note proprietà delle proporzioni si ottiene, successivamente,

$$(M+m)m = M^2 \quad \Rightarrow \quad M^2 - Mm - m^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{M^2}{m^2} - \frac{M}{m} - 1 = 0,$$

dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo diviso ambo i membri per m^2. Posto $M/m = x$ otteniamo l'equazione di secondo grado:

$$x^2 - x - 1 = 0, \tag{1.2}$$

che ha le due soluzioni

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Quella negativa va chiaramente scartata, a quella positiva si dà il nome di *rapporto aureo* e si indica con φ, quasi sicuramente in onore del grande scultore e architetto ateniese Fidia. Si ha dunque

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \tag{1.3}$$

[1] La traduzione qui proposta è presa da: Fabio Acerbi, *Euclide - Tutte le opere*, Bompiani Editore, Milano, 2007.

con la proprietà algebrica di essere l'unico numero positivo tale che

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0, \quad \text{ovvero} \quad \varphi^2 = \varphi + 1, \tag{1.4}$$

che, detto a parole, significa che il rapporto aureo è l'unico numero positivo *il cui quadrato supera di una unità il numero stesso*. È questa una delle, innumerevoli, proprietà di questo numero.

Se dividiamo ambo i membri della (1.4) per φ otteniamo

$$\varphi - 1 - \frac{1}{\varphi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\varphi} = \varphi - 1, \tag{1.5}$$

ovvero *il reciproco del rapporto aureo è lo stesso rapporto diminuito di una unità* e, naturalmente, questa è un'altra delle esclusive proprietà di questo numero.

Il numero φ è irrazionale (decimale illimitato non periodico, e la sua scrittura decimale, fino alla decima cifra è la seguente:

$$\varphi = 1.6180339887\ldots \tag{1.6}$$

Le proprietà (1.4) e (1.5) implicano che φ, il suo quadrato e il suo reciproco hanno esattamente le stesse cifre decimali:

$$\varphi^2 = 2.6180339887\ldots, \quad \frac{1}{\varphi} = 0.6180339887\ldots \quad ! \tag{1.7}$$

1.2 Costruzione e altre menzioni in Euclide

Come abbiamo detto il rapporto M/m si chiama rapporto aureo, mentre il segmento maggiore della divisione si chiama *sezione aurea* del segmento dato.

La costruzione con riga e compasso della sezione aurea si può fare con una idea sostanzialmente presa dagli Elementi di Euclide, ed è illustrata (senza commenti) nella figura 1.2, dove $\overline{\mathsf{AB}}$ è il segmento dato, e $\overline{\mathsf{BC}}$, perpendicolare ad $\overline{\mathsf{AB}}$ è uguale a $\overline{\mathsf{AB}}/2$.

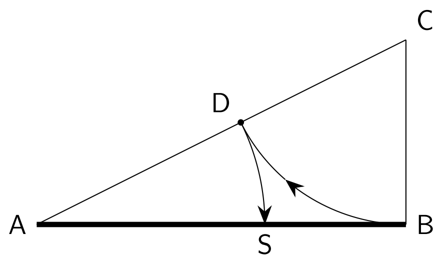


Figura 1.2: *Costruzione della sezione aurea*

Esaminiamo i calcoli in dettaglio. Posto $|\overline{\mathsf{AB}}| = l$, si ha $|\overline{\mathsf{BC}}| = l/2$ e, in base al teorema di Pitagora,

$$|\overline{\mathsf{AC}}| = \sqrt{l^2 + \frac{l^2}{4}} = \frac{l}{2}\sqrt{5}.$$

Ne segue

$$|\overline{\mathsf{AD}}| = |\overline{\mathsf{AS}}| = \frac{l}{2}\sqrt{5} - \frac{l}{2} = \frac{l}{2}(\sqrt{5}-1)$$

e

$$|\overline{\mathsf{SB}}| = l - \frac{l}{2}(\sqrt{5}-1) = \frac{l}{2}(3-\sqrt{5}).$$

Infine per il rapporto $\overline{\mathsf{AS}}/\overline{\mathsf{SB}}$ si ottiene

$$\frac{|\overline{\mathsf{AS}}|}{|\overline{\mathsf{SB}}|} = \frac{\frac{l}{2}(\sqrt{5}-1)}{\frac{l}{2}(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3-\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Nei calcoli intermedi abbiamo anche ottenuto il risultato che la sezione aurea di un segmento di lunghezza l ha lunghezza

$$\frac{l}{2}(\sqrt{5}-1). \tag{1.8}$$

Euclide considera la costruzione che abbiamo qui presentato nel secondo libro degli Elementi, al numero 11, in relazione al problema così formulato:

> Secare la retta così da essere il rettangolo compreso da quella totale e dall'uno o dall'altro dei segmenti uguale al quadrato sul restante segmento.

La costruzione di Euclide relativa a questo problema è riportata nella figura 1.3: $\overline{\mathsf{AB}}$ è il segmento (la "retta" per Euclide) dato, ABDG è il quadrato costruito su $\overline{\mathsf{AB}}$, E è il punto medio di $\overline{\mathsf{AG}}$, $\overline{\mathsf{EZ}} = \overline{\mathsf{EB}}$ e ZHTA è il quadrato costruito su $\overline{\mathsf{AZ}}$.

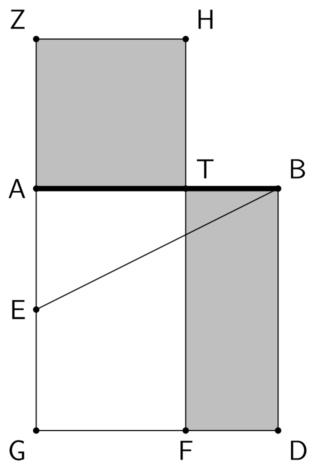


Figura 1.3: *Costruzione di Euclide, Libro II, n.*11

In questo caso però non viene attribuito uno specifico nome ad $\overline{\mathsf{AT}}$, che è proprio la sezione aurea di $\overline{\mathsf{AB}}$.

Invece nel libro VI, al numero 30 viene sostanzialmente riproposta la costruzione che abbiamo appena visto, e questa volta proprio con lo scopo di "secare la retta in rapporto estremo e medio".

Le proprietà della sezione aurea e il suo uso per la costruzione dei poligoni regolari, in particolare del pentagono e decagono, e dei cinque poliedri regolari sono poi diffusamente trattati nel XIII, e ultimo, libro degli Elementi.

1.3 Curiosità e proprietà

Il rapporto aureo ha una lunga serie di proprietà, di cui alcune possono essere considerate delle semplici curiosità, altre hanno importanti applicazioni. Vedremo brevemente alcune delle più famose, ricordando che abbiamo già visto che cosa succede calcolando il quadrato o il reciproco del rapporto aureo.

Consideriamo la formula (1.4), relativa al quadrato di φ e moltiplichiamo ambo i membri per φ, iterando il procedimento. Si ottiene quanto segue, dove abbiamo aggiunto la riga relativa al caso in cui l'esponente è 1.

$$
\begin{array}{lcccccc}
\varphi^1 & = & & & & = & \varphi \\
\varphi^2 & = & & & & = & \varphi+1 \\
\varphi^3 & = & \varphi^2+\varphi & = & (\varphi+1)+\varphi & = & 2\varphi+1 \\
\varphi^4 & = & \varphi^3+\varphi^2 & = & (2\varphi+1)+(\varphi+1) & = & 3\varphi+2 \\
\varphi^5 & = & \varphi^4+\varphi^3 & = & (3\varphi+2)+(2\varphi+1) & = & 5\varphi+3 \\
\varphi^6 & = & \varphi^5+\varphi^4 & = & (5\varphi+3)+(3\varphi+2) & = & 8\varphi+5 \\
\varphi^7 & = & \varphi^6+\varphi^5 & = & (8\varphi+5)+(5\varphi+3) & = & 13\varphi+8 \\
\varphi^8 & = & \dots & = & \dots & = & \dots
\end{array}
$$

Come si può notare le successive potenze sono sempre del tipo $m\varphi+q$, dove le successioni dei valori di m e q sono:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad \text{e} \quad 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Le due successioni sono identiche, salvo per il fatto che quella di q comincia "un gradino dopo": entrambe sono caratterizzate dal fatto che ogni termine, dal terzo in poi, è la somma dei due precedenti. Come vedremo si tratta di una successione molto famosa, detta di Fibonacci.

Consideriamo l'espressione

$$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\dots}}}}}$$

e vediamo di calcolarne il valore, supponendo di avere provato che, procedendo nell'iterazione, si ottiene effettivamente un numero reale[2]. Per fare questo chiamiamo x l'espressione data e calcoliamone il

[2]Solo per i più pignoli, in quanto la questione esula dal contesto di questo corso, segnaliamo che occorrerebbe provare rigorosamente questa affermazione, prima di poter elevare al quadrato: la cosa si può fare per esempio scrivendo l'espressione come una successione ricorrente e utilizzando poi il principio di induzione.

quadrato. Si ottiene

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}}$$

L'espressione sotto radice è ancora x, in quanto l'elevazione al quadrato ha fatto sparire la radice più esterna, ma di radici ce ne sono infinite, dunque una più o una meno non cambia nulla. Dunque $x^2 = 1 + x$, ovvero x soddisfa l'equazione che definisce φ, ed essendo chiaramente x un numero positivo, si ha $x = \varphi$.

Consideriamo l'espressione seguente

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}$$

e vediamo di calcolarne il valore, ancora una volta supponendo di avere provato che, procedendo nell'iterazione, si ottiene effettivamente un numero reale. Posta uguale a x l'espressione data, osserviamo che il denominatore della frazione che ha numeratore 1 è ancora x, infatti c'è una "una frazione in meno", ma siccome le frazioni sono infinite, una più o una meno non cambia nulla, come con le radici. Si ha dunque

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

ovvero x soddisfa l'equazione che definisce φ e, come prima, essendo x un numero positivo, si ha $x = \varphi$.

Un'altra curiosità riguarda un ulteriore legame tra φ e i numeri della successione di Fibonacci, di cui parleremo tra poco. Si può provare infatti che

$$\varphi = 1 + \frac{1}{1 \times 1} - \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} - \frac{1}{3 \times 5} + \dots$$

dove i denominatori delle frazioni si ottengono moltiplicando due successivi numeri di Fibonacci.

Una proprietà geometrica della sezione aurea è la seguente. Sia $\overline{AB}$ un segmento, e $\overline{AS_1}$ la sua sezione aurea. Il segmento $\overline{AS_2}$, con $|\overline{AS_2}| = |\overline{S_1B}|$ e la sezione aurea di $\overline{AS_1}$, e così via: è come dire che la sezione aurea è *autoreplicante*. Si veda la figura 1.4.

Figura 1.4: *Proprietà di "autoreplicazione" della sezione aurea*

Su questa proprietà della sezione aurea si basa una notevole proprietà del *rettangolo aureo*, cioè di un rettangolo in cui le dimensioni sono in rapporto aureo. Se da un rettangolo aureo ABCD sottraiamo il quadrato ABEF, il rettangolo che rimane è ancora aureo: infatti $\overline{AP} = \overline{AB} = \overline{AF}$ e $\overline{AD}$ è la sezione aurea

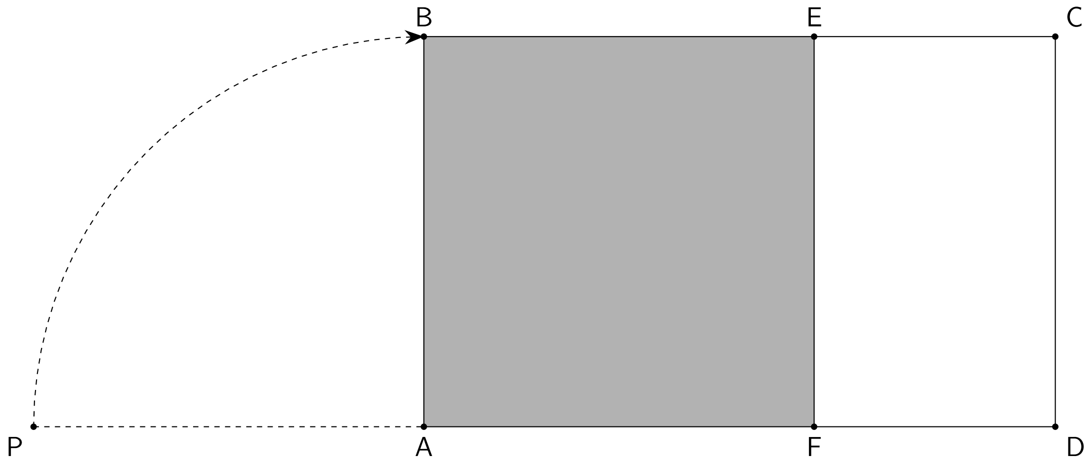


Figura 1.5: *Generazione di un rettangolo aureo da un rettangolo aureo*

di $\overline{PD}$. Dunque sottrarre il quadrato equivale a sottrarre dalla parte maggiore, cioè dalla sezione aurea, del segmento $\overline{PD}$ la parte minore. Si veda la figura 1.5.

Se si procede con questa strategia togliendo al rettangolo rimanente un quadrato in alto, poi un quadrato a destra, poi un quadrato in basso e poi di nuovo un quadrato a sinistra e così via, si ottiene una successione di quadrati che "convergono" verso il punto segnato nella figura 1.6. In ragione di questa straordinaria proprietà Clifford Pickover nel suo straordinaria libro *The Math Book* del 2009 ha proposto di chiamare questo punto "Eye of God": come lo stesso Pickover fa notare il rettangolo aureo è l'unico rettangolo da quale si può estrarre un quadrato, mantenendo la proporzione iniziale nel rettangolo rimanente.

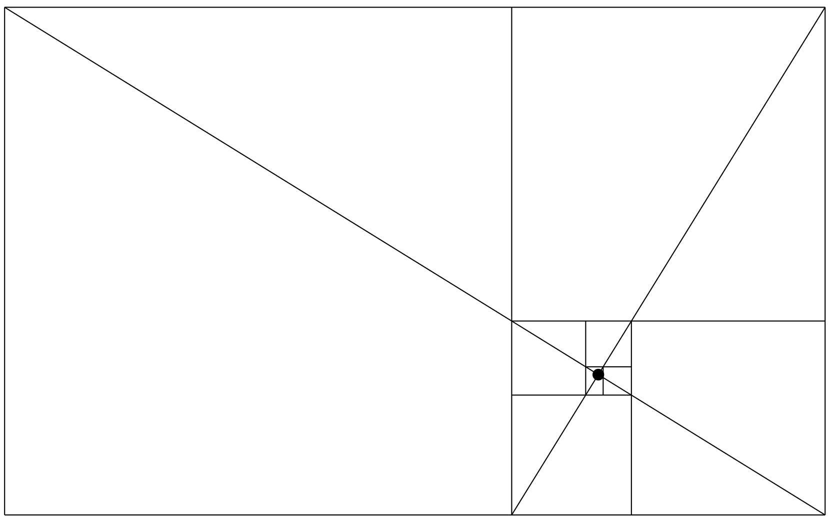


Figura 1.6: *L'"occhio di Dio" secondo Clifford Pickover*

Il problema di scomporre un rettangolo in altri rettangoli o quadrati con determinate caratteristiche ha applicazioni in molti campi. Segnaliamo quella legata al formato dei fogli normalmente usati per le stampanti, anche se non è direttamente collegata alla sezione aurea. I fogli da stampa hanno un formato rettangolare tale che, dividendoli a metà, si mantengano le proporzioni. Se dunque a e b sono le dimensioni, con $a > b$, dopo suddivisione si ottengono due fogli di dimensioni $a/2$ e b. Per mantenere le proporzioni si deve avere:

$$a : b = b : \frac{a}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{2} = b^2, \quad \text{ovvero} \quad a = b\sqrt{2}.$$

Il foglio di formato più grande (il foglio "originale"), indicato con A0, deve avere area $1\,\mathrm{m}^2$ (questo è importante dal punto di vista commerciale in quanto facilita i calcoli economici che si basano su superficie e peso). Tenendo conto di questo fatto e della condizione sopra indicata, si trova che le sue dimensioni sono di circa $1189\,\mathrm{mm} \times 841\,\mathrm{mm}$. Per successive divisioni si arriva al foglio A4, comunemente usato, con dimensioni di $297\,\mathrm{mm} \times 210\,\mathrm{mm}$. La figura 1.7 illustra il processo.

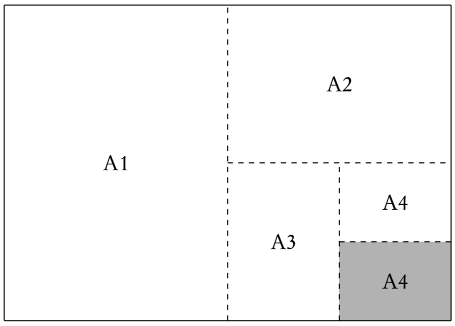


Figura 1.7: *Da un foglio formato* A0 *ad un foglio formato* A4

La figura 1.8 illustra il fatto che tutti i formati sono tra loro simili.

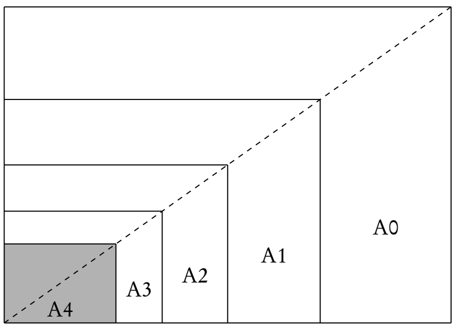


Figura 1.8: *Similitudine dei fogli dal formato* A0 *al formato* A4

Per un veloce controllo operativo di queste proprietà dei fogli per stampante, basta osservare che per raddoppiare il formato di stampa da A4 ad A3, bisogna considerare un ingrandimento del 141%, e, come è ben noto, $\sqrt{2} \simeq 1.41$. Viceversa per ridurre un foglio da formato A3 ad A4, bisogna considerare un "ingrandimento" del 0.71%, e in effetti $1/\sqrt{2} \simeq 0.71$.

2 L'invasione dei conigli di Fibonacci

2.1 Preludio

Consideriamo due interi qualunque a e b e costruiamo la successione

$$a, b, c = a + b, d = b + c, e = c + d, \dots$$

cioè la successione di numeri che si ottiene facendo, via via, la somma degli ultimi due numeri. Conviene partire con numeri a e b relativamente piccoli perché, con questo procedimento, si ottengono rapidamente numeri molto grandi. Partendo per esempio da 2 e 5 si ottiene la seguente successione, fino al trentesimo numero:

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, 81, 131, 212, 343, 555, 898, 1453, 2351, 3804, 6155, 9959, 16114, 26073, 42187, 68260, \\ 110447, 178707, 289154, 467861, 757015, 1224876, 1981891, 3206767, 5188658, \dots$$

Calcoliamo ora il rapporto tra ciascun numero e il suo precedente, naturalmente a partire dal secondo, troncando alla decima cifra decimale:

$$2.5000000000, 1.4000000000, 1.7142857143, 1.5833333333, 1.6315789474, 1.6129032258, \\ 1.6200000000, 1.6172839506, 1.6183206107, 1.6179245283, 1.6180758017, 1.6180180180, \\ 1.6180400891, 1.6180316586, 1.6180348788, 1.6180336488, 1.6180341186, 1.6180339392, \\ 1.6180340077, 1.6180339815, 1.6180339915, 1.6180339877, 1.6180339892, 1.6180339886, \\ 1.6180339888, 1.6180339887, 1.6180339888, 1.6180339887, 1.6180339888, 1.6180339887, \dots$$

Sorpresa! Pare proprio che esca il numero φ. Questa naturalmente è solo una verifica numerica: in realtà si può provare rigorosamente che, da qualunque coppia di naturali positivi si parta, il rapporto tra il termine n-esimo della successione e quello precedente tende sempre a φ, se n tende all'infinito!

2.2 Leonardus Pisanus

Prima di trattare in dettaglio il famoso problema dei conigli, spendiamo due parole su Leonardo Pisano, Pisa 1175-1235, detto Fibonacci, quasi certamente per l'essere figlio di Guglielmo dei Bonacci. Seguendo il padre, facoltoso mercante pisano, ebbe modo di conoscere e apprezzare la cultura e i procedimenti aritmetici che gli studiosi musulmani stavano diffondendo nelle varie parti del mondo arabo. Il suo principale merito è stato certamente l'introduzione nella nostra cultura della scrittura dei numeri utilizzando la notazione posizionale, cosa che rese i calcoli matematici alla portata di tutti. Solo a mo' d'esempio si provi a calcolare la somma dei due numeri 3838 e 3787, scritti con il sistema romano: MMMDCCCXXXVIII+MMMDCCLXXXVII. Non parliamo poi del prodotto di due simili numeri!

L'introduzione del sistema di numerazione posizionale, abbastanza rapidamente diventato standard per evidenti motivi di praticità, è descritto nel *Liber abaci*. Per capire l'eleganza dei discorsi di Fibonacci citiamo uno dei problemi da lui descritti in questo volume (che abbiamo desunto dal già citato libro di Mario Livio sulla sezione aurea).

> Un uomo la cui fine era prossima convocò i figli e disse: "Dividete i mei denari come vi ordinerò". Comunicò al primo figlio: "Tu avrai un bezant e un settimo del rimanente". E al secondo: "Tu avrai due bezant e un settimo del rimanente". Al terzo: "Tu avrai tre bezant e un settimo del rimanente", e così via fino all'ultimo figlio. Alla divisione dell'eredità i figli constatarono di avere avuto tutti la stessa quota. Quanti erano i figli e a quanto ammontava l'eredità?

In termini moderni la soluzione è abbastanza semplice: se E è l'eredità e x è la quota comune, si deve avere, uguagliando la quota dei primi due figli

$$x = 1 + \frac{1}{7}(E-1) = 2 + \frac{1}{7}(E-x-2).$$

Da qui si trova facilmente $x = 6$, $E = 36$ e 6 è anche il numero dei figli.

2.3 La successione dei conigli

Un altro problema proposto da Fibonacci nel suo *Liber abaci*, diventato probabilmente il più famoso di tutti, si può così formulare.

> Un uomo mise una coppia di conigli, in età fertile, in un recinto. Quante coppie di conigli vi saranno nel recinto dopo un anno, supponendo che ogni coppia produca ogni mese una nuova coppia, in grado di riprodursi dal secondo mese?

Se rappresentiamo le coppie fertili con ■ e quelle giovani con ▪, possiamo costruire la seguente tabella.

Mesi		Adulte	Giovani	Totale
0	■	1	0	1
1	■ ▪	1	1	2
2	■ ▪ ■	2	1	3
3	■ ▪ ■ ■ ▪	3	2	5
4	■ ▪ ■ ■ ▪ ■ ▪ ■	5	3	8
5	■ ▪ ■ ■ ▪ ■ ▪ ■ ■ ▪ ■ ■ ▪	8	5	13

Si constata immediatamente che le tre colonne delle coppie adulte, giovani e del totale delle coppie sono costituite dagli stessi numeri, solo che quella delle coppie giovani comincia un gradino dopo, quella delle coppie totali salta il primo gradino. Si ottiene la successione

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots$$

per le coppie adulte, la stessa con uno zero iniziale in più per quelle giovani, la stessa senza il primo 1 per il totale. Il totale delle coppie alla fine dell'anno, cioè al dodicesimo mese è 233. Se i conigli nel recinto avessero abbastanza da mangiare e fossero abbastanza longevi, dopo 10 anni avremmo ben 8 670 007 398 507 948 658 051 921 coppie di conigli: un bel numero!

Anche questa successione è costruita partendo da due numeri e costruendo gli altri come somma dei due precedenti: dunque anche in questo caso il rapporto tra il termine n-esimo della successione e quello precedente tende sempre a φ, se n tende all'infinito!

Ovviamente questo problema non ha alcun interesse per la riproduzione dei conigli, dove non si verificano mai le circostanze ideali indicate da Fibonacci, ma in ogni caso questa successione numerica ha enorme importanza in molte applicazioni, come vedremo almeno in parte.

2.4 Curiosità e proprietà

Alcune proprietà della successione di Fibonacci sono legate ai suoi legami con la sezione aurea e le abbiamo già descritte.

Un fuco (ape maschio, ♂) è generato solo da un'ape operaia madre, ♀. Ogni femmina, invece, è generata da una madre (l'ape regina) e da un padre (un fuco). La figura 2.1 mostra l'albero genealogico di un fuco: nella colonna di destra è indicato il numero degli antenati ad ogni stadio.

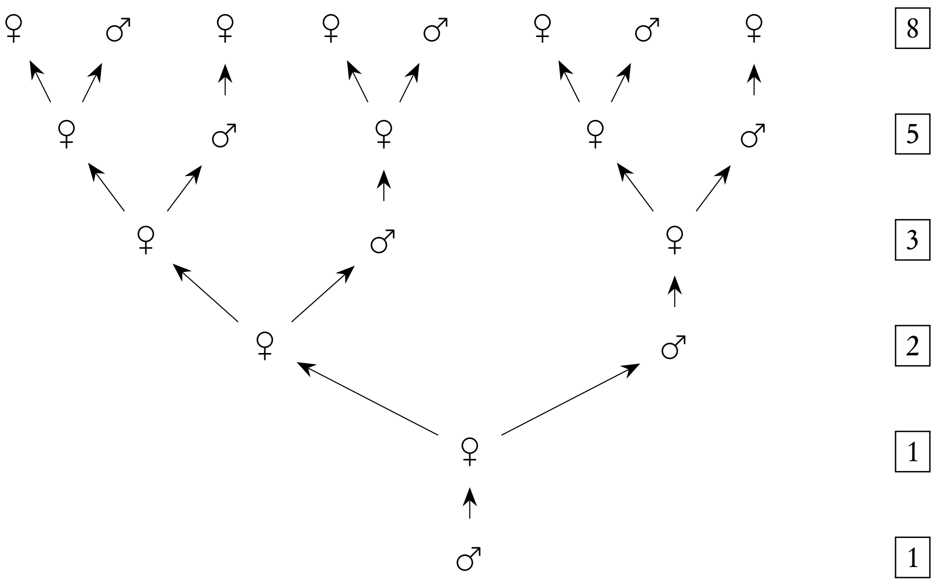


Figura 2.1: *Albero genealogico di un fuco*

Come si vede anche il numero di antenati di un fuco si ottiene, ai vari stadi, dalla successione di Fibonacci!

Consideriamo 4 numeri di Fibonacci consecutivi e i seguenti numeri ottenuti a partire da essi:

— a: il prodotto degli estremi;
— b: il doppio prodotto dei medi;
— c: la somma dei quadrati dei medi.

La terna a, b, c è una terna pitagorica[1] e c è sempre un numero di Fibonacci! Del resto era quasi ovvio che ci dovesse essere un legame tra questa stupefacente successione e l'onnipresente Pitagora!

Consideriamo per esempio i 4 numeri consecutivi di Fibonacci: 5, 8, 13, 21. Si ha

$$a = 5 \times 21 = 105, \quad 2 \times (8 \times 13) = 208, \quad 8^2 + 13^2 = 233.$$

Intanto 233 è un numero di Fibonacci e poi

$$105^2 = 11025, \quad 208^2 = 43264, \quad 54289 \quad \Rightarrow \quad 11025 + 43264 = 54289.$$

Se sommiamo un numero *dispari* di prodotti di termini successivi della successione di Fibonacci si ottiene il quadrato dell'ultimo termine.

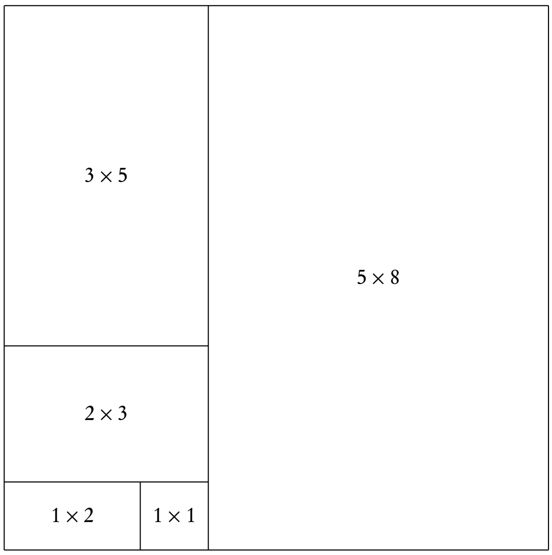


Figura 2.2: *Scomposizione di un quadrato in rettangoli*

Per esempio, con 5 prodotti si ha

$$1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 8 = 64 = 8^2,$$

con 7 prodotti si ha

$$1 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 8 + 8 \times 13 + 13 \times 21 = 441 = 21^2.$$

[1] Cioè una terna di numeri naturali tale che la somma dei quadrati dei due più piccoli è il quadrato del maggiore, ovvero una terna di numeri interi che possono essere lati di un triangolo rettangolo.

Da qui si può dedurre una interessante proprietà geometrica relativa alla divisione di un quadrato in rettangoli con lati interi. Il primo esempio si può infatti leggere geometricamente come la possibilità di decomporre un quadrato di lato 8 in cinque rettangoli 5 e 8, 3 e 5, 2 e 3, 1 e 2, 1 e 1, come si può vedere nella figura 2.2.

Sommando 10 numeri consecutivi di Fibonacci si ottiene sempre un multiplo di 11. Mario Livio, nel suo *La sezione aurea*, richiama a questo proposito una affermazione contenuta nella tragedia di Friedrich Schiller *I Piccolomini*, che fa parte di *Wallenstein*: “Undici è il peccato. Undici oltrepassa i Dieci Comandamenti.” Non è l’unico legame della successione di Fibonacci con il numero 11: la somma di dieci numeri consecutivi di Fibonacci è sempre 11 volte il settimo numero della decina. Naturalmente in queste proprietà non c’è nulla di peccaminoso!

Una ulteriore proprietà è costituita da una serie di caratteristiche di periodicità della successione di Fibonacci.

1. Se un numero di Fibonacci termina con una cifra, la stessa ultima cifra si ripete con periodicità 60, ovvero dopo 60, 120, 180, … numeri. Se indichiamo, in questo contesto, con $F(n)$ l’n-esimo di numero di Fibonacci, possiamo controllare, per esempio, che

$$
\begin{array}{lcl}
F(2) & = & 1 \\
F(62) & = & 4052739537881 \\
F(122) & = & 14028366653498915298923761 \\
F(182) & = & 48558529144435440119720805669229197641
\end{array} .
$$

2. Anche le ultime due cifre dei numeri di Fibonacci hanno una periodicità, precisamente 300. Esempio (dove abbiamo soppresso alcune cifre intermedie, per non riempire la pagina di numeri!):

$$
\begin{array}{lcl}
F(7) & = & 13 \\
F(307) & = & 6452389184720949856740872794933738025334109298792472139250504213 \\
F(607) & = & 3206362566281301\ldots55426652732061513241681385474345710360841\,3
\end{array} .
$$

3. Addirittura Dov Jarden nella rivista *The Fibonacci Quarterly*(2), Volume 1, Numero 4 del Dicembre 1963 dimostra che se prendiamo in considerazione un numero $d \geq 3$ di ultime cifre, la periodicità è $15 \times 10^{d-1}$. Per esempio le ultime tre cifre si ripetono dopo 1500, 3000, … numeri. Sopprimendo, come prima, alcune cifre intermedie per non riempire la pagina di numeri, possiamo per esempio controllare che

$$
\begin{array}{lcl}
F(12) & = & 144 \\
F(1512) & = & 4363420380630214836258486\ldots8689540544057906981390564985781\,44 \\
F(3012) & = & 1322170401742516925780\,38\ldots3238181776196708726096412757171\,56144
\end{array} .
$$

A puro titolo di curiosità segnaliamo che $F(3012)$ è circa 10^{629} (1 seguito da 629 zeri!!!).

[2] *The Fibonacci Quarterly* è una rivista quadrimestrale pubblicata dalla *The Fibonacci Association*, a partire dal 1963 e ormai giunta al 54° anno. Pubblica articoli di ricerca, articoli di semplice esposizione, problemi elementari o avanzati con soluzione, e ogni altra informazione di interesse per gli appassionati dei numeri di Fibonacci. Per chi avesse voglia di approfondire l’argomento delle periodicità segnaliamo l’articolo *Further Comments on the Periodicity of the Digits of the Fibonacci Sequence*, di Richard Heimer, pubblicato nel Volume 2, Numero 3 dell’Ottobre 1964.

Chiudiamo questa carrellata con un'ultima proprietà, invitando chi volesse divertirsi ulteriormente a leggere gli articoli divulgativi del già citato *The Fibonacci Quarterly*.

La somma dei primi n numeri di Fibonacci è sempre uguale al numero di posizione $n+2$, diminuito di una unità. Per esempio, la somma dei primi 100 numeri di Fibonacci è:

$$927372692193078999175,$$

e in effetti questo è il 102-esimo numero di Fibonacci, diminuito di una unità[3].

2.5 La formula di Binet

Il triangolo di Tartaglia o di Pascal è una delle reminiscenze più comuni dei nostri passati studi di matematica. Esso consente di ottenere i coefficienti nello sviluppo delle potenze successive del binomio $a+b$: $(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, \dots$

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=\dots & 1 & & \cdots & & & & & & & & \cdots & & 1
\end{array}$$

Figura 2.3: *Il triangolo aritmetico, o di Tartaglia, o di Pascal*

Nonostante la "bellezza" e utilità di questo triangolo, esso ha un grave handicap: per scrivere la 100ª riga occorre avere scritto tutte le 99 righe precedenti. È una cosa simile all'affermazione di George Burns[4] nel suo *How to Live to be 100 or More*: "Per arrivare a 100 anni la cosa più importante è arrivare a 99".

In realtà esiste un modo molto più elegante per scrivere la 100ª riga del triangolo di Tartaglia, senza avere scritto prima le 99 precedenti, ed è la formula del binomio di Newton: per ogni n l'n-esima riga del triangolo è data da

$$\binom{n}{0},\ \binom{n}{1},\ \binom{n}{2},\ \binom{n}{3},\ \dots,\ \binom{n}{n-2},\ \binom{n}{n-1},\ \binom{n}{n}.$$

Un problema simile si presenta con la successione di Fibonacci: per scrivere il 100° numero bisogna prima avere scritto tutti i 99 precedenti e ci vuole un bel po' di pazienza!

[3] È molto probabilmente con sistemi di questo tipo che in famosi show alcune persone riescono a sommare rapidamente grandi numeri…

[4] George Burns, comico e attore statunitense, morto un po' dopo avere compiuto 100 anni nel 1996, è rimasto famoso per le affermazioni fatte in molte sue interviste. Per esempio alla domanda "George, hai 88 anni, fai film, fai televisione, dai concerti, fumi sigari, bevi Martini, esci con belle ragazze, come fai?", rispose, tra l'altro, "È semplice, per esempio per bere un Martini basta riempire un bicchiere con ghiaccio, versarci un po' di gin e di vermouth secco, aggiungere un'oliva e poi gustarselo".

Anche qui esiste una formula, molto elegante e, in un senso che vedremo, anche sorprendente, che permette di calcolare direttamente un numero della successione di Fibonacci senza conoscere i precedenti.

La formula in questione è la formula di Binet[5]. Se indichiamo con $F(n)$ l'n-esimo numero di Fibonacci, si ha

$$F(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right). \tag{2.1}$$

Se ricordiamo che

$$\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

e osserviamo che

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{2(1+\sqrt{5})}=-\frac{4}{2(1+\sqrt{5})}=-\frac{2}{1+\sqrt{5}}=-\frac{1}{\varphi}=(-\varphi)^{-1}, \tag{2.2}$$

la formula (2.1) può essere scritta nella forma

$$F(n)=\frac{\varphi^n-(-\varphi)^{-n}}{\sqrt{5}}. \tag{2.3}$$

La forma (2.3) della formula di Binet mette in evidenza lo stretto legame che esiste tra i numeri di Fibonacci e la sezione aurea.

Come esercizio verifichiamo la formula in un caso concreto, per esempio $n=3$. Si ha

$$\begin{aligned}F(3)&=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^3\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{(1+\sqrt{5})^3}{8}-\frac{(1-\sqrt{5})^3}{8}\right)=\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+3\sqrt{5}+3\cdot5+\sqrt{5^3}-1+3\sqrt{5}-3\cdot5+\sqrt{5^3}}{8}=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{6\sqrt{5}+2\cdot5\sqrt{5}}{8}=2,\end{aligned}$$

come previsto.

La cosa più sorprendente di questa formula è il fatto che essa fornisce, per ogni valore di $n\in\mathbb{N}$, sempre un numero intero, nonostante sia prevalentemente composta da numeri irrazionali.

[5]Jacques Philippe Marie Binet, 1786-1856, matematico e astronomo francese. La formula che porta il suo nome, in quanto egli la ricavò nel 1843, era già nota a Eulero, Daniel Bernoulli e de Moivre, da più di un secolo.

3 Poligoni e poliedri regolari

Nella geometria greca erano considerate di cruciale importanza le costruzioni con riga e compasso. In particolare tra i primi problemi ad essere affrontati ci furono quelli della costruzione, con questi strumenti, dei poligoni regolari dato il lato o data la circonferenza circoscritta.

Il problema è relativamente semplice per il triangolo equilatero (e quindi per l'esagono) e per il quadrato (e quindi per l'ottagono). Il primo poligono per cui si incontrano difficoltà è il pentagono: molto probabilmente la scoperta della sezione aurea è proprio legata alla ricerca di un metodo per costruire, con riga e compasso, un pentagono regolare, dato il lato o data la circonferenza circoscritta.

Nel 1796 Gauss (sempre lui!) provò[(1)] che un poligono regolare di n lati è costruibile con riga e compasso se e solo se n è una potenza di 2 (cosa quasi ovvia perché basta costruire un quadrato e poi bisecare i relativi angoli al centro), oppure è del tipo

$$n = 2^k \times f_1 \times f_2 \times \dots, \tag{3.1}$$

dove $f_1, f_2, \dots$ sono numeri di Fermat[(2)] primi. Ad oggi gli unici numeri di Fermat primi noti sono 3, 5, 17, 257, 65537 e non si sa se ne esistano altri. Dunque i poligoni di 3, 5, 15, 17, 85, … lati, e quelli che si ottengono raddoppiando, quadruplicando, ecc. il numero lati, sono costruibili con riga e compasso. Come già detto i casi $n = 3$ o $n = 5$ erano noti ai greci e da questi si passa facilmente al caso di $n = 6$, $n = 10$, $n = 15$. Nessun altro progresso riuscirono a fare i greci in questo campo e solo l'onnipresente Gauss riuscì a costruire il poligono con 17 lati (circa duemila anni dopo la costruzione del pentagono!). Successivamente furono costruiti anche quello con 257 e 65537 lati, anche se quest'ultima costruzione non è mai stata pubblicata (ovviamente non pare sia di molto interesse!).

Ci interessa segnalare il fatto che il poligono di 7 lati *non* è costruibile con riga e compasso (e nemmeno quello di 9 lati): tutte le costruzioni proposte sui manuali di disegno tecnico sono solo approssimate, anche se di solito, purtroppo, non ci sono accenni a questo fatto.

3.1 Pentagono e decagono regolare

Il pentagono regolare già ai tempi di Pitagora godeva di grande considerazione. Infatti tracciando solo le diagonali del pentagono stesso si ottiene una stella a cinque punte, come mostrato nella figura 3.1.

Probabilmente i Pitagorici avevano adottato questa figura come simbolo della loro confraternita; alcuni autori la chiamano addirittura il simbolo magico dei Pitagorici. In realtà il numero 5 godeva

[1] In realtà Gauss provò, all'età di 19 anni (!), solo la sufficienza della condizione, mentre la necessità fu provata successivamente da Pierre-Laurent Wantzel nel 1836.

[2] Si dicono numeri di Fermat i numeri del tipo

$$2^{2^n} + 1.$$

Partendo da $n = 0$ si ottengono successivamente i numeri 3, 5, 17, 257, 65537, che sono anche primi, e poi 4294967296, che invece non è primo.

di grande considerazione in una confraternita in cui i numeri erano così importanti anche perché il numero 2 era considerato il primo numero “femminile”, mentre il numero 3 il primo numero “maschile” e il 5 è l’unione del 2 e del 3.

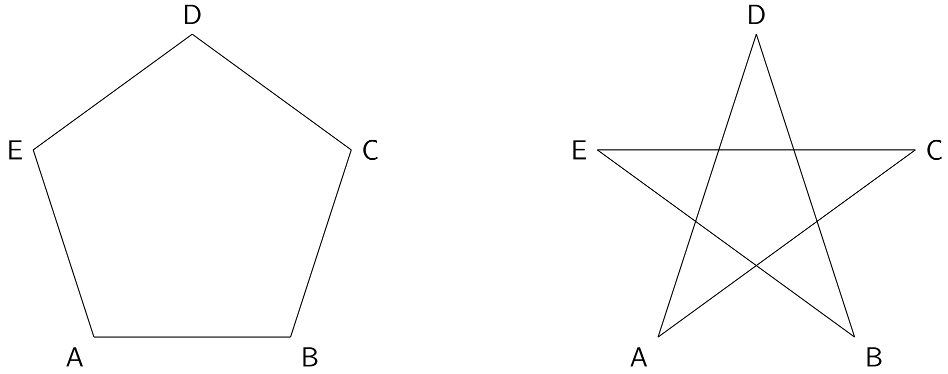


Figura 3.1: *Pentagono regolare e stella a cinque punte*

Nel pentagono regolare il rapporto aureo compare ovunque. Per esempio se consideriamo due diagonali non concorrenti nello stesso vertice, esse si tagliano vicendevolmente secondo il rapporto aureo. Si veda la figura 3.2: $|\overline{\mathsf{EF}}|/|\overline{\mathsf{FC}}| = \varphi$.

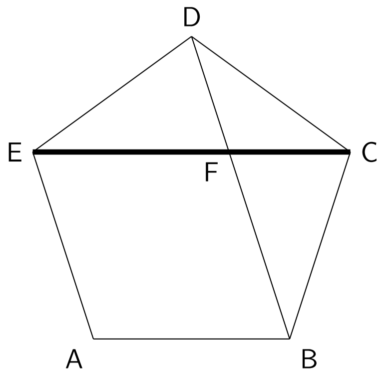


Figura 3.2: *Diagonali e eapporto aureo in un pentagono*

Consideriamo ora di nuovo un pentagono regolare e due diagonali condotte dallo stesso vertice: esse dividono il pentagono in tre triangoli isosceli: uno acuto e due ottusi.

L’angolo α, come angolo interno di un pentagono misura

$$\frac{(5-3)\times 180°}{5} = 108°.$$

I due angoli γ alla base del triangolo BDC misurano dunque 36° ciascuno. Ne segue che l’angolo $\beta = \mathsf{A}\widehat{\mathsf{B}}\mathsf{D}$ misura 72° e infine l’angolo al vertice del triangolo ABD misura 36°, quindi è ancora γ.

Il triangolo isoscele acutangolo ABD si chiama *triangolo aureo*, mentre i due triangoli isosceli ottusangoli DBC e DEA si chiamano *gnomoni aurei*. Si veda la figura 3.3

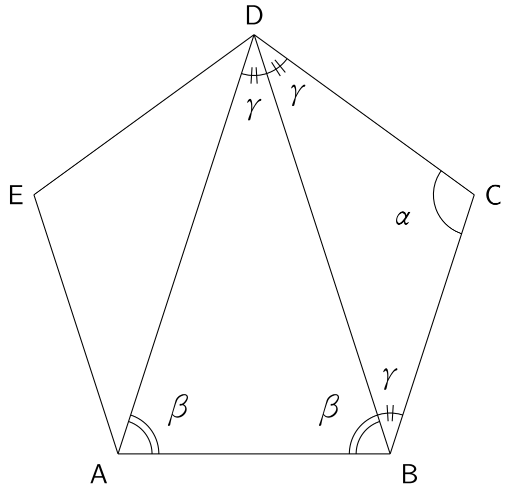


Figura 3.3: *Triangolo aureo e gnomoni aurei in un pentagono*

Se tracciamo una ulteriore diagonale del pentagono, per esempio $\overline{\mathsf{AC}}$, vediamo che sia il triangolo aureo che lo gnomone aureo vengono divisi in un triangolo aureo e in uno gnomone aureo. Si veda la figura 3.4.

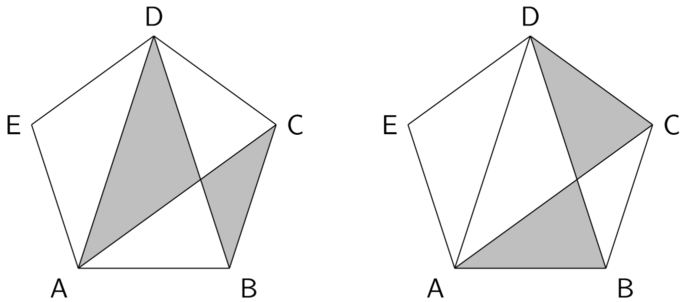


Figura 3.4: *Scomposizione del triangolo aureo e degli gnomoni aurei di un pentagono*

Non è difficile provare, con un po' di geometria, che i lati del triangolo aureo stanno in rapporto aureo, ovvero che $|\overline{\mathsf{AD}}|/|\overline{\mathsf{AB}}| = \varphi$, ed è per questo che il triangolo si chiama aureo. Si può ora usare questa proprietà per costruire un pentagono dato il lato, a partire dalla costruzione del triangolo aureo, naturalmente con riga e compasso, come è d'obbligo!

La costruzione, illustrata nella figura 3.5 può essere descritta come segue. Dato il lato $|\overline{\mathsf{AB}}| = l$, si innalzi da B il segmento $\overline{\mathsf{BH}} = \overline{\mathsf{AB}}$ perpendicolarmente ad $\overline{\mathsf{AB}}$. Con centro nel punto medio M di $\overline{\mathsf{AB}}$ si riporti H in S sul prolungamento di $\overline{\mathsf{AB}}$, dalla parte di B. Con centro in A si riporti ora S sull'asse di $\overline{\mathsf{AB}}$ in D. Il triangolo ABD è il triangolo aureo cercato. Infatti

$$|\overline{\mathsf{MS}}| = |\overline{\mathsf{MH}}| = \sqrt{\frac{l^2}{4} + l^2} = \frac{l}{2}\sqrt{5}.$$

Dunque

$$|\overline{\mathsf{AD}}| = |\overline{\mathsf{AS}}| = \frac{l}{2} + \frac{l}{2}\sqrt{5} = l\,\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

e infine

$$\frac{|\overline{\mathsf{AD}}|}{|\overline{\mathsf{AB}}|} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

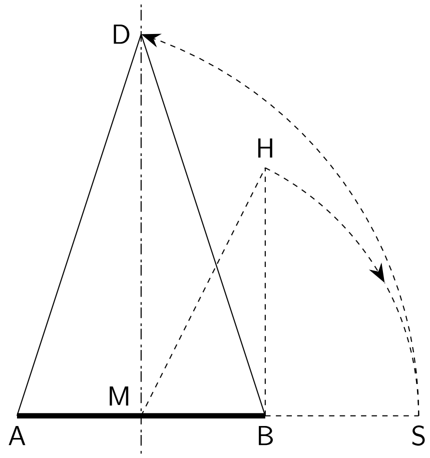


Figura 3.5: *Costruzione del triangolo aureo*

Segnaliamo ancora che, costruita una stella pentagonale a partire dal pentagono, al suo centro si forma un nuovo pentagono regolare, sul quale si può ripetere la costruzione, e così via, senza fine...

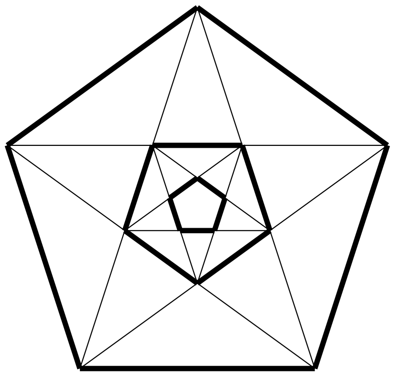


Figura 3.6: *Pentagono in pentagono, in pentagono, ...*

Per concludere queste osservazioni sui poligoni regolari, ricordiamo il teorema che afferma che il lato del decagono regolare inscritto in una circonferenza è la sezione aurea del raggio.

E non sarebbe finita qui!

3.2 Icosaedro e dodecaedro

Tutti i cinque poliedri regolari hanno a che fare, in un modo o nell'altro, con la sezione aurea. Ci occupiamo qui molto brevemente solo dell'icosaedro e del dodecaedro, che senza la sezione aurea "non potrebbero esistere".

Formule dove interviene la sezione aurea:

— Superficie totale del dodecaedro di lato 1: $15\varphi\sqrt{3-\varphi}$.

— Volume del dodecaedro di lato 1: $\dfrac{5\varphi^3}{6-2\varphi}$.

— Volume dell'icosaedro di lato 1: $\dfrac{5\varphi^5}{6}$.

Una proprietà interessante che permette di costruire facilmente un icosaedro: raggruppando i vertici dell'icosaedro a 4 a 4 si ottengono 3 rettangoli aurei, mutuamente perpendicolari e che hanno in comune il centro dell'icosaedro.

Si vedano le figure 3.7 e 3.8.

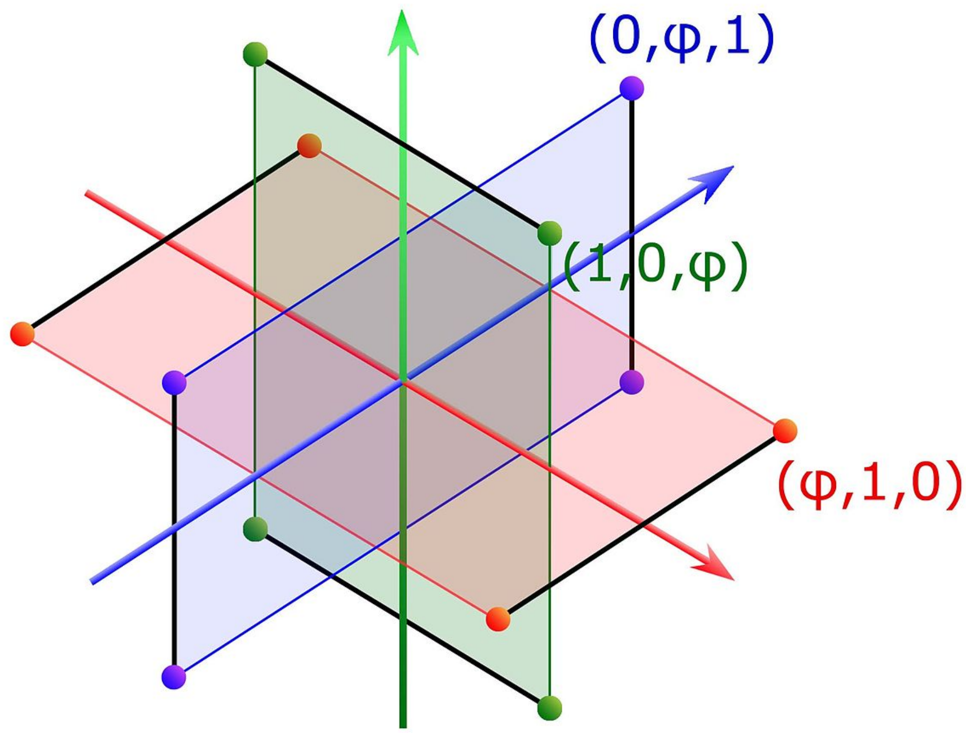


Figura 3.7: *Icosaedro e rettangoli aurei inscritti - 1*

L'icosaedro e il dodecaedro sono, come sappiamo, poliedri duali: il dodecaedro ha 12 facce e 20 vertici, l'icosaedro ha 20 facce e 12 vertici, mentre entrambi hanno 3 = spigoli. Questo ha come conseguenza,

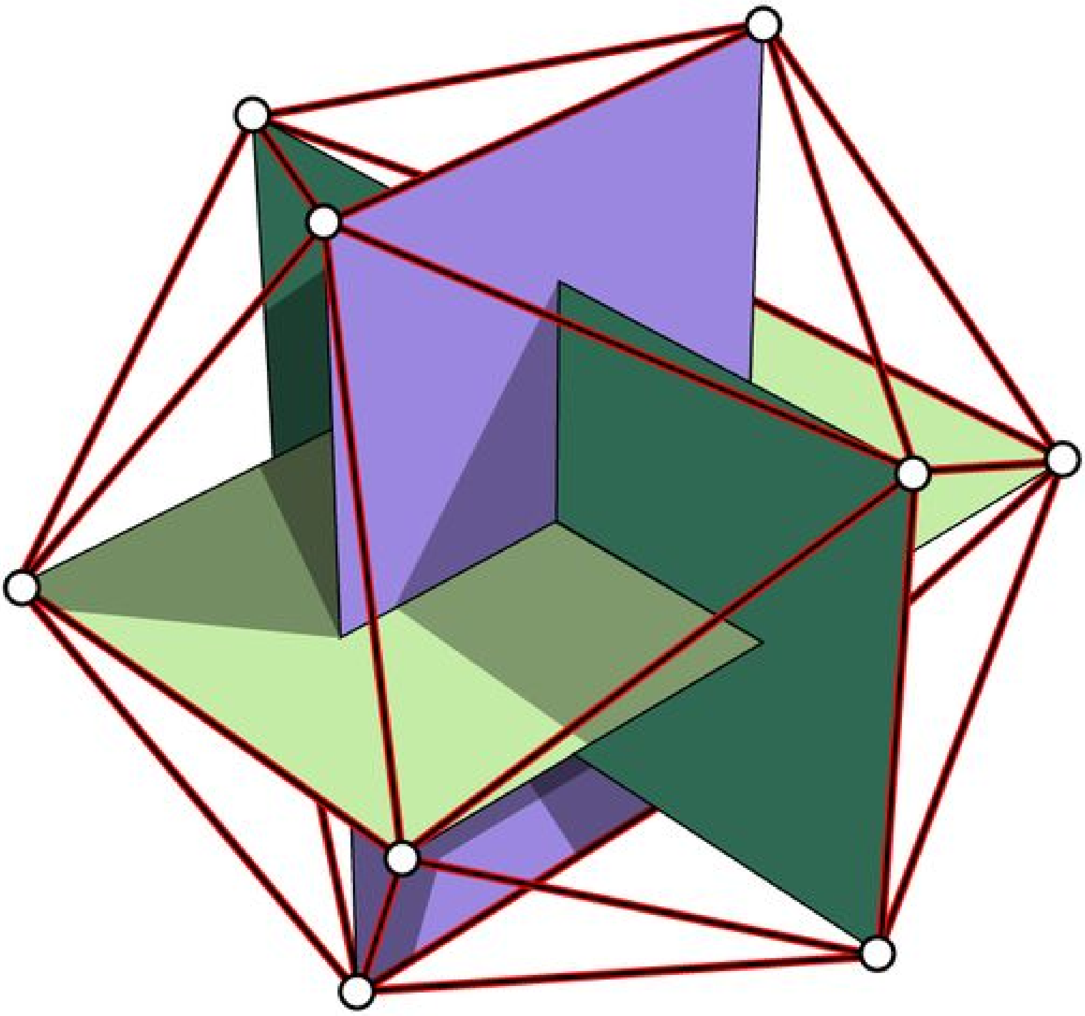


Figura 3.8: *Icosaedro e rettangoli aurei inscritti - 2*

tra l'altro, che congiungendo i centri delle facce di un dodecaedro si ottiene un icosaedro e viceversa. Il rapporto delle lunghezze degli spigoli dei due solidi (quello esterno e quello interno riprodotto) è

$$\frac{\varphi^2}{\sqrt{5}},$$

ove, manco a dirlo, c'entra di nuovo il rapporto aureo.

Considerando che congiungendo i centri delle facce di un dodecaedro si ottiene un icosaedro, per il dodecaedro vale anche una proprietà relativamente ai rettangoli aurei come quella dell'icosaedro: i centri delle dodici facce di un dodecaedro si possono raggruppare a 4 a 4 per ottenere 3 rettangoli aurei. Si veda la figura 3.9.

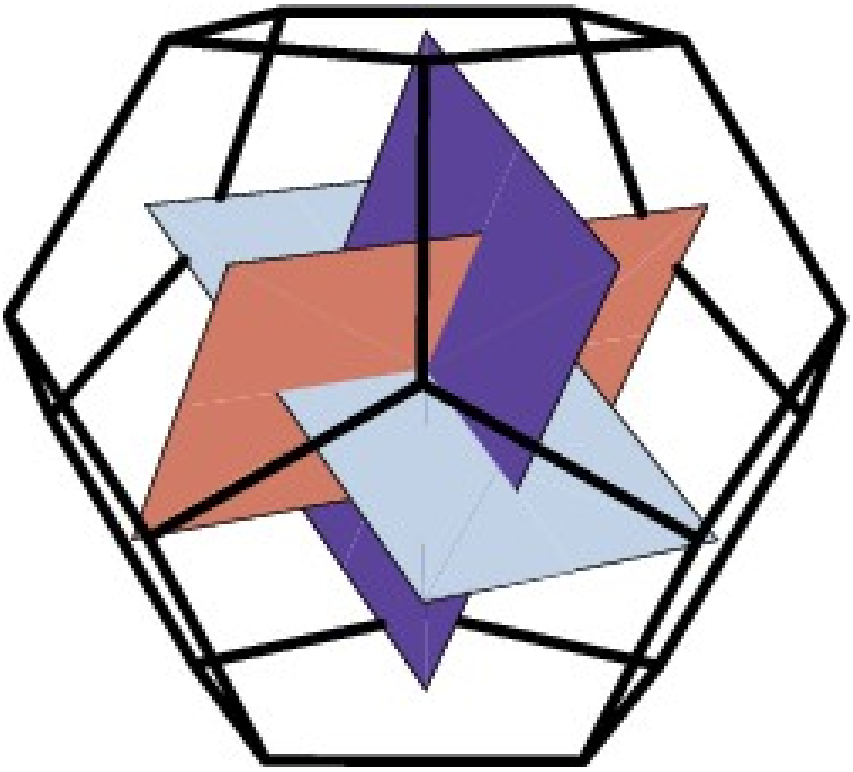


Figura 3.9: *Dodecaedro e rettangoli aurei inscritti*

La figura 3.10 mostra un dodecaedro inscritto in un icosaedro e viceversa.

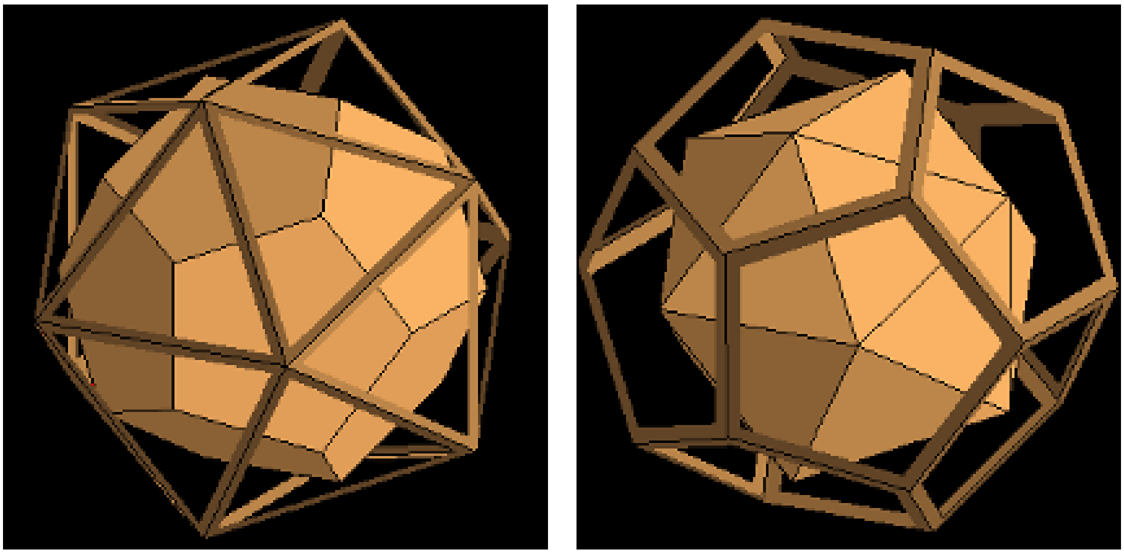


Figura 3.10: *Dodecaedro inscritto in un icosaedro e viceversa*

Un'ultima curiosità relativa al dodecaedro e all'icosaedro. Il volume del dodecaedro in funzione del raggio R della sfera circoscritta è

$$\frac{2}{9}R^3\sqrt{3}(5+\sqrt{5}),$$

mentre quello dell'icosaedro è

$$\frac{2}{3}R^3\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Se teniamo conto che il volume della sfera è

$$\frac{4}{3}\pi R^3,$$

concludiamo, con facili calcoli, che il rapporto tra volume del dodecaedro e della sfera circoscritta è 0.664909, mentre per l'icosaedro l'analogo rapporto è invece 0.605461: il dodecaedro occupa un po' più del 66% del volume della sfera circoscritta, mentre l'icosaedro occupa un po' meno del 61% dello stesso volume. Ovvero il dodecaedro approssima la sfera meglio del dodecaedro. E questo è un risultato abbastanza sorprendente, perché a prima vista, avendo l'icosaedro più facce, sembrerebbe potersi "avvicinare di più" alla sfera che lo circoscrive.

4 Ulteriori approfondimenti

In questo capitolo proponiamo qualche ulteriore approfondimento, senza particolari commenti, riguardante la sezione aurea.

4.1 Impacchettamento di cerchi

Il problema di inserire, sotto opportune condizioni, un certo numero di cerchi in un cerchio (ma anche in un quadrato, un rettangolo, ecc.) ha molte importanti applicazioni. Ci interessiamo qui dell'impacchettamento di 5 cerchi in un cerchio, in modo che non ci sia sovrapposizione e che lo spazio lasciato vuoto sia il minimo possibile. Il motivo dell'interessamento in questo corso è legato al fatto che, seppure con un diverso scopo, se ne occupò Piero della Francesca nel suo *Trattato d'Abaco*. La soluzione è proposta nella figura 4.1.

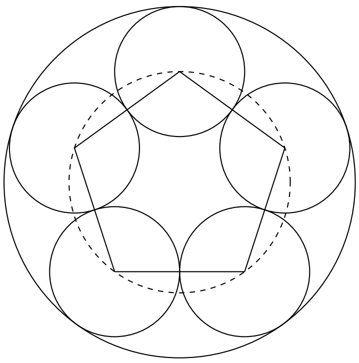


Figura 4.1: *Impacchettamento di* 5 *cerchi in un cerchio*

Da un punto di vista applicativo moderno il problema si può così formulare: dati cinque cerchi identici, trovare il più piccolo cerchio che li contiene, senza che ci siano sovrapposizioni. Se i cinque cerchi dati hanno diametro 1, il cerchio contenitore soluzione ha diametro

$$1+\sqrt{2\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}=1+\sqrt{\frac{4}{\sqrt{5}}\,\varphi},$$

con il solito intervento del rapporto aureo.

Il problema di Piero della Francesca era l'opposto, cioè dato un cerchio inscrivervi cinque cerchi tra di loro tangenti e tangenti al cerchio contenitore, ma non è difficile, usando la formula soprascritta, risolverlo partendo dal cerchio esterno come dato. Naturalmente dal punto di vista dell'impacchettamento ci sono altre soluzioni, ma quella proposta è la più efficiente.

4.2 Ricomposizioni impossibili

Consideriamo un quadrato di lato 8, diviso in triangoli e trapezi come indicato nella figura 4.2, dove è evidente l'intervento dei numeri di Fibonacci.

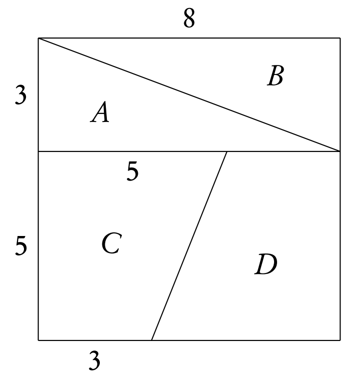


Figura 4.2: *Una ricostruzione impossibile* - 1

Ritagliamo le varie parti in cui è stato diviso il quadrato, come nella figura 4.3.

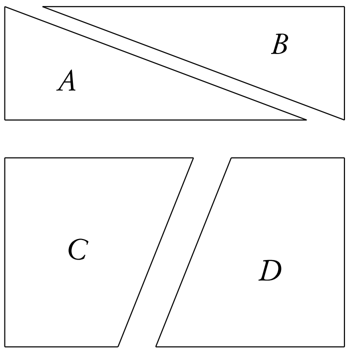


Figura 4.3: *Una ricostruzione impossibile* - 2

Ricostruiamo ora la figura sistemando diversamente le varie parti, come nella figura 4.4.

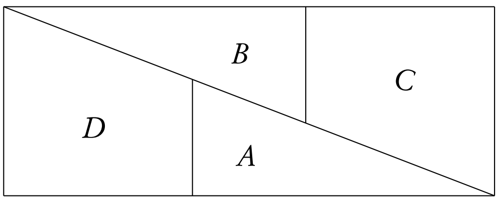


Figura 4.4: *Una ricostruzione impossibile* - 3

Tutto sembra funzionare, solo che l'area di partenza era $8 \times 8 = 64$, mentre l'area finale è $5 \times 13 = 65$: da dove proviene la superficie extra?

Se si ripete esattamente la stessa costruzione, con un quadrato di lato 13, diviso e ricostruito come nella figura 4.5, si passa da un'area di $13 \times 13 = 169$ a un'area di $8 \times 21 = 168$: dove è sparita la superficie mancante?

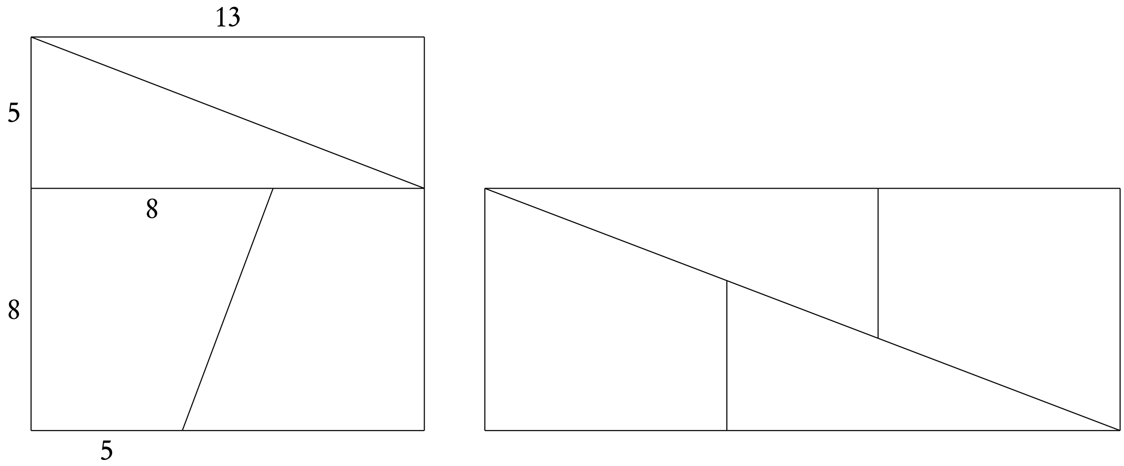


Figura 4.5: *Una ricostruzione impossibile* - 4

Costruzioni dello stesso tipo si possono fare con altre terne di numeri di Fibonacci ed il risultato è basato su una proprietà scoperta da Keplero: il quadrato di qualunque numero di Fibonacci differisce di non più di una unità dal prodotto dei due termini che gli stanno a fianco: se prendo 5, 8 e 13, $8^2 = 5 \times 13 - 1$; se prendo 8, 13 e 21, $13^2 = 8 \times 21 + 1$.

5 Sezione aurea e arte

Per quanto riguarda la sezione aurea nella storia dell'arte rimandiamo al testo in uso nel corso, con le seguenti considerazioni.

Ci sentiamo di condividere in pieno l'opinione espressa da Mario Livio nel più volte citato *La sezione aurea*: non possiamo affermare che la sezione aurea sia stata usata per tutte le opere d'arte normalmente citate dai cultori di φ solo sulla base di misurazioni a posteriori sulle opere stesse. È invece richiesta una qualche forma di documentazione sulle reali intenzioni degli autori che sostenga le tesi dedotte con le misurazioni, sempre approssimate per loro stessa natura: se un rapporto misurato in un'opera d'arte è *circa*(1) 1.6, possiamo pensare, solo sulla base di questo risultato che la sezione aurea sia stata scientemente usata? Non è forse plausibile anche il fatto che il numero 1.6 sia stato scelto (magari inconsciamente) in quanto *rapporto semplice*, cioè tra due interi abbastanza piccoli come 8 e 5?

A questo proposito è molto istruttivo quanto afferma Michele Emmer nel suo *La perfezione visibile*:

> Bisogna sgombrare subito il campo da due tipi di considerazioni; la prima è che [...] si possa mediante lo studio matematico delle strutture artistiche fornire una sorta di ricetta per ottenere oggetti estetici, ovvero uno strumento quasi esclusivo, per di più esatto (matematico!), per comprendere l'opera d'arte, addirittura per stabilire un criterio di valore per l'opera d'arte. L'altra considerazione consiste nel ridurre tutta la questione a un semplice problema di misurazioni per trovare rapporti più o meno armonici nelle opere d'arte. È quest'ultima una delle questioni che vengono comunemente considerate *fondamentali* dagli storici dell'arte nei rapporti tra matematica e arte: la teoria delle proporzioni. In particolare la proporzione aurea. La matematica viene così ridotta a un semplice insieme di figure geometriche elementari e a rapporti più o meno aurei tra le diverse parti delle figure. Ques'idea ha contribuito non poco a far credere che la matematica sia da identificarsi con alcuni risultati della geometria euclidea. Non vi è alcun dubbio che nell'arte classica antica la teoria delle proporzioni fosse di rilevante importanza. Come lo è stata nel periodo rinascimentale, con la riscoperta della matematica greca. Basterà citare il famoso volume del matematico Luca Pacioli, allievo di Piero della Francesca, dal titolo *De Divina Proportione*, illustrato con disegni di Leonardo da Vinci. È però del tutto riduttivo e mistificante limitare i rapporti tra matematica e arte alla semplice *misurazione* di rapporti più o meno aurei; per altro nel caso della proporzione aurea, dato che il numero che la esprime è irrazionale, qualsiasi misurazione è sempre per sua natura una approssimazione. Anche in questo secolo(2) si è fatto un uso a volte eccessivo e distorto dei rapporti aurei nel campo delle arti e dell'architettura, giungendo a risultati francamente opinabili.

[1] È importante sottolineare il "circa", in quanto è ben difficile sulla base di misure sulle opere d'arte normalmente citate andare oltre la prima cifra dopo la virgola, anzi normalmente questo è già molto!

[2] 1900-200.

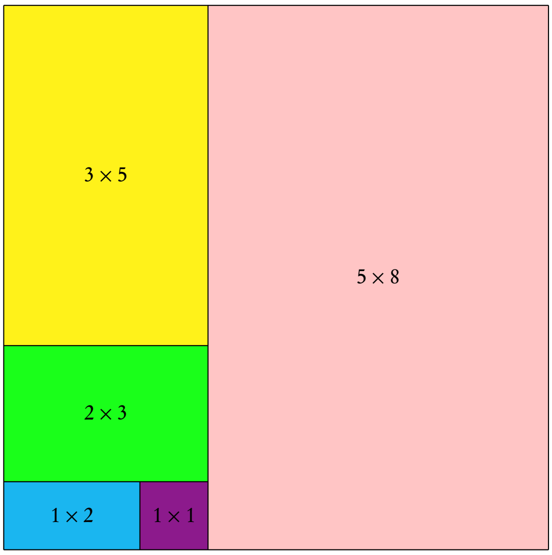
Tenendo conto di questo fatto non ci sentiamo di condividere le affermazioni del testo di Sala e Cappellato relativamente, in particolare, alla *Stele del re Get*, al *Doriforo* di Policleto e al *Partenone*. Neppure nella grande piramide di Cheope vi è alcuna certezza dell'uso della sezione aurea, anzi possiamo ritenere altamente improbabile che gli egizi la conoscessero e usassero scientemente.

Tutto ciò non toglie ovviamente nulla alla straordinaria bellezza di queste, e altre, opere…

Discorso ben diverso per quanto riguarda Le Corbusier e in particolare il suo *Modulor*, dove esiste una documentazione che prova la grande influenza che su di lui esercitarono le opere di Matila Ghyka *The Geometry of Art and Life* e *Le nombre d'or*.

Dunque, per concludere, φ è un numero *d'oro*, ma ci sono cose straordinarie anche se non sono d'oro e, in ogni caso, non mettiamoci a cercare l'oro ovunque!

In ultima di copertina: *Scomposizione di un quadrato in rettangoli, usando i numeri di Fibonacci. Proprietà del rettangolo aureo*.

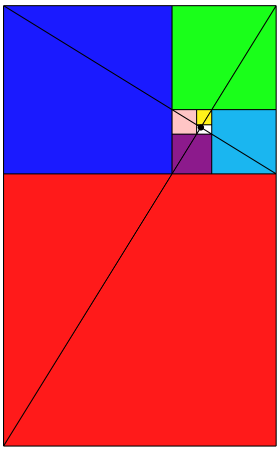


La sezione aurea
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 settembre 2020



Questo fascicoletto è rivolto agli studenti del secondo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, Sede di Pordenone. Contiene solo un'integrazione al testo in uso e alcune immagini.

Luciano Battaia
Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.