

LUCIANO BATTIA

INTRODUZIONE AI FRATTALI

*Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone*

www.batmath.it

Introduzione ai frattali

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 24 gennaio 2018

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>.

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

Attribuzione Devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale.

Non commerciale Non puoi usare il materiale per scopi commerciali.

Non opere derivate Se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, non puoi distribuire il materiale così modificato.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore usi di quest'opera in deroga da questa licenza.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013

Indice

Premessa [vii](#)

- 1 Cantor, Koch e altri [1](#)
 - 1.1 La Polvere di Cantor [1](#)
 - 1.2 Qualche prodotto derivato [2](#)
 - 1.3 Flocchi di neve [4](#)

- 2 Figure autosimili e dimensione [7](#)
 - 2.1 Figure autosimili [7](#)
 - 2.2 Il concetto di dimensione [8](#)
 - 2.3 Verso la dimensione frattale [11](#)

- 3 Altri frattali [15](#)
 - 3.1 Il setaccio di Apollonio [15](#)
 - 3.2 Il triangolo di Sierpinski [18](#)
 - 3.3 Felci [18](#)

Premessa

Questo fascicoletto contiene solo alcune integrazioni al testo in uso⁽¹⁾ presso il corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. È da intendersi ad uso esclusivo degli studenti iscritti al corso citato.

¹Nicoletta Sala e Gabriele Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli Editore, Milano, 2003.

1 Cantor, Koch e altri

1.1 La Polvere di Cantor

La *Polvere di Cantor* è uno dei più famosi sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali. Anche se al tempo in cui fu proposto da Georg Cantor (1883) la geometria frattale non era ancora nata, questo insieme può essere annoverato tra i più antichi frattali costruiti con un procedimento matematico. La natura, per contro, è piena di frattali, come si va riconoscendo in questi ultimi anni. Anzi, per dirla con Freeman Dyson, *La natura ha fatto un brutto scherzo ai matematici*: in sostanza nulla ha, nella realtà, le forme classiche della geometria di Euclide o delle curve inventate lungo il corso dei secoli dagli uomini.

A partire dalla Polvere di Cantor proponiamo una elementare introduzione alla geometria frattale e al suo concetto più importante, quello di *dimensione frattale*, naturalmente senza poter entrare nei dettagli.

Il termine *geometria frattale* fu coniato dal matematico francese Benoit Mandelbrot, nel 1974, dunque in tempi molti recenti. Da allora i frattali hanno assunto un'importanza via via crescente per il numero di applicazioni nei campi più svariati, applicazioni di cui faremo qualche cenno nelle pagine della monografia.

Passiamo dunque alla descrizione di questo famoso insieme. Consideriamo l'intervallo $[0, 1]$ dei reali, intervallo che indicheremo con C_0 . Lo dividiamo in tre parti uguali mediante i punti $1/3$ e $2/3$. Se gettiamo via la parte centrale, senza gli estremi, rimaniamo con l'insieme $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Se ripetiamo il procedimento su ciascuna delle due parti di cui è costituito C_1 , otteniamo l'insieme $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. Ripetiamo il procedimento all'infinito, senza mai stancarci, ottenendo gli insiemi $C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$

L'insieme di Cantor, o Polvere di Cantor, che indichiamo con C , è l'insieme residuo dopo tutte le successive eliminazioni. In termini più formali è l'intersezione di tutti gli insiemi $C_1, C_2, \dots, C_n, \dots$

Una rappresentazione grafica, necessariamente limitata ai primi passi, di questo procedimento è proposta nella figura 1.1.

Si noti che, per ogni n , le due metà di C_{n+1} , sono una copia esatta, ridotta di $1/3$, di C_n . Questo significa che guardare C_{n+1} con una lente che ingrandisca tre volte è lo stesso che guardare C_n ad occhio nudo. Si osservi altresì che la figura 1.1 non è una rappresentazione dell'insieme di Cantor, ma solo del procedimento utilizzato per ottenerlo: non c'è alcuna possibilità di ottenere una qualche rappresentazione corretta dell'insieme che stiamo considerando.

Questo insieme ha una serie di straordinarie proprietà, molte delle quali sono al di fuori degli scopi di questo corso. Ne trattiamo comunque qualcuna, solo a livello intuitivo.

Una cosa abbastanza sorprendente è la "quantità" di punti che lo compongono, ovvero la *cardinalità* di questo insieme: ebbene esso ha esattamente la stessa cardinalità dell'insieme dei numeri reali. Ciò significa che esso può essere messo in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei numeri reali, nonostante sia stato ottenuto sopprimendo una serie di segmenti la cui lunghezza complessiva è 1: al primo passo si sopprime un segmento di lunghezza $1/3$, al secondo due segmenti di lunghezza $1/3^2$,

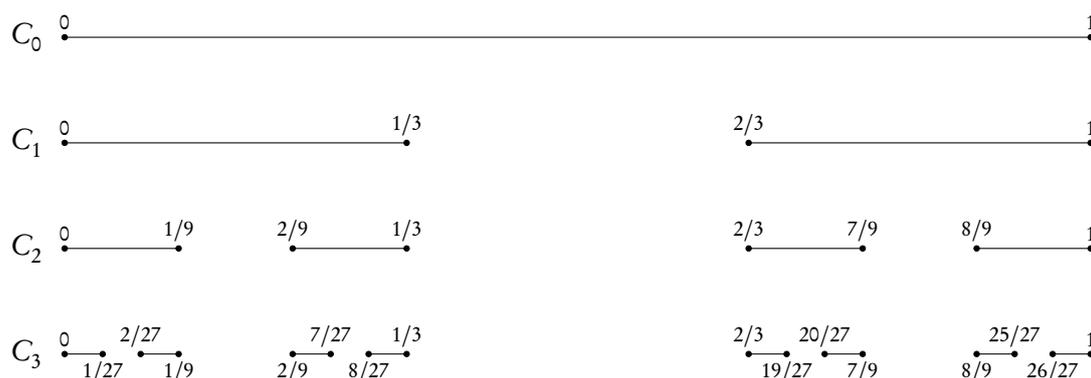


Figura 1.1: Schema del processo di costruzione dell'insieme di Cantor: i primi 4 passi

al terzo passo quattro segmenti di lunghezza $1/3^3$, ecc. Si ha infatti

$$1 \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{3^2} + 4 \frac{1}{3^3} + 8 \frac{1}{3^4} + \dots = 1,$$

come è facile provare se si conosce la teoria delle serie geometriche oppure se si utilizza un software opportuno, come Mathematica, o anche semplicemente WolframAlpha on line, dove basta digitare il codice: `Sum[(2^n)/3^(n+1), {n, 0, Infinity}]`.

Per come è stato costruito verrebbe anche da pensare che, dopo avere eliminato tutto quello che c'era da eliminare, restino solo gli estremi dei segmenti che sono stati eliminati. Invece le cose non stanno così e, per esempio, il punto $1/4$ appartiene a $C^{(1)}$ e non è un estremo di nessun segmento.

In ogni caso la cosa che ci interessa di più è il fatto che C contiene infinite copie di se stesso, in scala ridotta: basta ricordare che già C_{n+1} , come abbiamo più sopra osservato, contiene due copie, in scala ridotta di $1/3$, di C_n . Questo fatto implica che l'ingrandimento di una qualunque porzione di C è sempre simile a C , ovvero che, anche se si esamina una porzione infinitamente piccola di C , la complessità di C non diminuisce. È proprio questa caratteristica che rende C un frattale: si tratta della proprietà di *autosimilarità*, su cui torneremo in seguito.

1.2 Qualche prodotto derivato

A partire dall'insieme di Cantor si possono costruire alcuni altri insiemi interessanti

1. Il *quadrato di Cantor*. Si ottiene con lo stesso procedimento utilizzato per l'insieme di Cantor, applicandolo però ad un quadrato, e cioè sopprimendo, successivamente, $1/3$ dei segmenti su ciascuno dei due lati. Nella figura 1.2 sono rappresentati i primi tre stadi del processo.
2. Il *cubo di Cantor*. Si ottiene sempre con lo stesso processo, applicato questa volta al cubo di lato 1. Nella figura 1.3 sono rappresentati i primi due stadi del processo.

¹Anche se non è facilissimo provarlo.

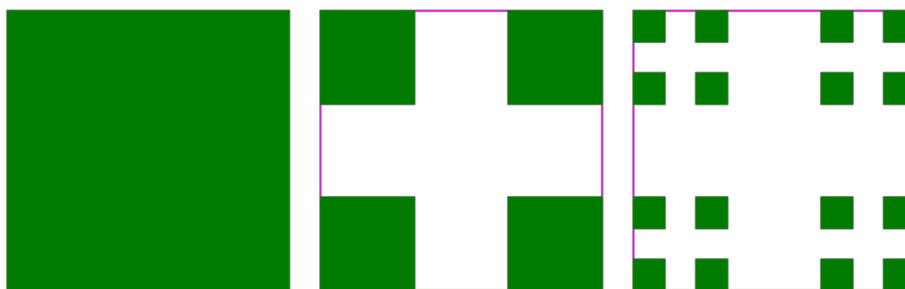


Figura 1.2: *Il quadrato di Cantor*

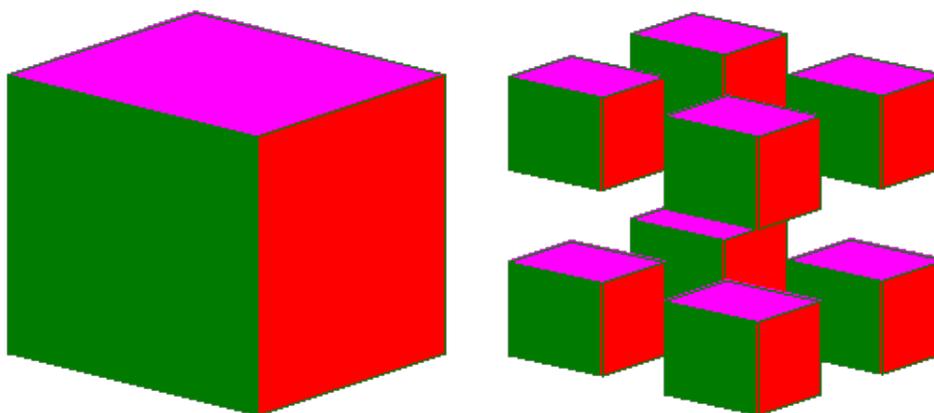


Figura 1.3: *Il cubo di Cantor*

3. Gli *anelli Cantor*. Questo insieme, ottenuto semplicemente per rotazione dell'insieme di Cantor attorno ad un estremo, può costituire un utile punto di partenza per costruire un modello matematico degli anelli di Saturno.

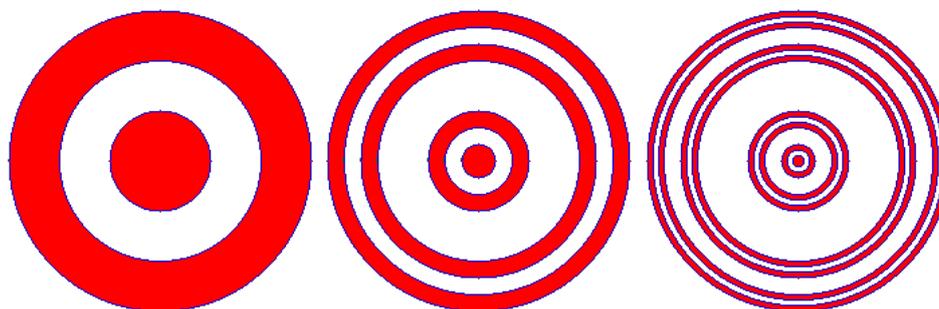
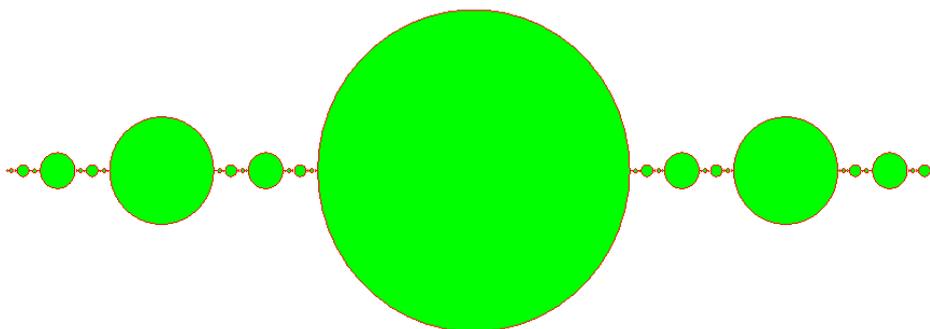


Figura 1.4: *Gli anelli di Cantor*

4. Il *villaggio di Cantor*. La costruzione di questo insieme non richiede commenti. Chissà se Cantor, dopo tutte le vicissitudini passate, avrebbe il diritto di abitare nella casa più grande del suo villaggio, o se dovrebbe accontentarsi di una di quelle che si ottengono dopo molti passi nella costruzione!

Figura 1.5: *Il villaggio di Cantor*

5. Il *collier di Cantor*. Anche questa volta non servono commenti.

Figura 1.6: *Il collier di Cantor*

1.3 Flocchi di neve

Utilizzando sostanzialmente la stessa procedura utilizzata per l'insieme di Cantor si può costruire il *Merletto di Koch*. Si parte da un segmento di lunghezza 1, diviso in tre parti; invece di eliminare la parte centrale la si sostituisce con due segmenti, di lunghezza $1/3$, a formare un triangolo equilatero. Si ripete lo stesso procedimento su ciascuno dei quattro segmenti così ottenuti e poi via via all'infinito. I primi quattro passi sono illustrati nelle figure 1.7 e 1.8.

Se si ripete la costruzione indicata per il merletto di Koch sui tre lati di un triangolo equilatero si ottiene il *fiocco di neve di Koch*. I primi quattro passi della costruzione sono illustrati nella figura 1.9.

La figura 1.10, mostra la figura che si ottiene dopo 8 iterazioni.

Il merletto e il fiocco di neve di Koch godono della stessa proprietà di autosimilarità dell'insieme di Cantor: ogni porzione, anche infinitamente piccola, del merletto o del fiocco hanno la stessa complessità e la stessa struttura dell'intera figura.



Figura 1.7: I primi due passi per la costruzione del merletto di Koch

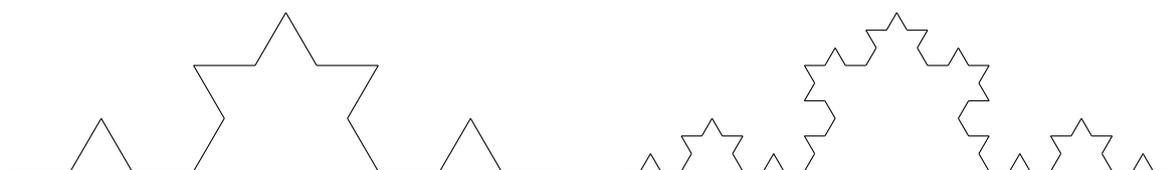


Figura 1.8: Il terzo e quarto passo per la costruzione del merletto di Koch

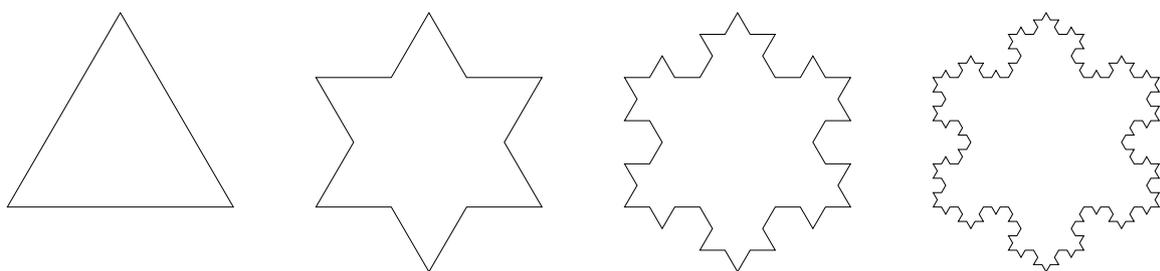


Figura 1.9: I primi quattro passi nella costruzione del fiocco di neve di Koch

Il fiocco di neve poi ha una caratteristica oltremodo interessante: esso ha una lunghezza infinita (come anche il merletto), ma racchiude una regione di dimensione finita. Si noti poi che queste due “curve” sono così patologiche da non ammettere tangente in alcun punto: esse sono costituite unicamente da “spigoli”!

Curve così patologiche come queste sembrano non avere alcun interesse pratico. A chi la pensa così suggeriamo di leggere il testo *Fractals, form, chance, and dimension* di Benoit M. Mandelbrot, e di provare a rispondere a questa domanda, contenuta nel testo citato: *quanto è lunga la costa della Gran Bretagna se si vuole tenere conto di tutte, anche le più piccole, frastagliature?*

Esistono numerose altre curve patologiche come il merletto di Koch. Ne citiamo una in particolare: la curva di Hilbert, che ha la straordinaria proprietà di riempire un intero quadrato, cosa a prima vista impossibile, visto che le curve (almeno dal punto di vista matematico!) non hanno alcuno spessore.

La costruzione della curva di Hilbert è abbastanza semplice e può procedere con i passi di seguito indicati.

1. Partendo da un quadrato, suddividiamolo in quattro quadrati e congiungiamo i centri.
2. Suddividiamo a sua volta ciascuno di questi quadrati più piccoli in quattro e congiungiamo i loro centri, cominciando sempre dal quadrato in basso a sinistra e terminando in quello in basso a destra.
3. Procediamo con un'ulteriore suddivisione, sempre con lo stesso criterio.

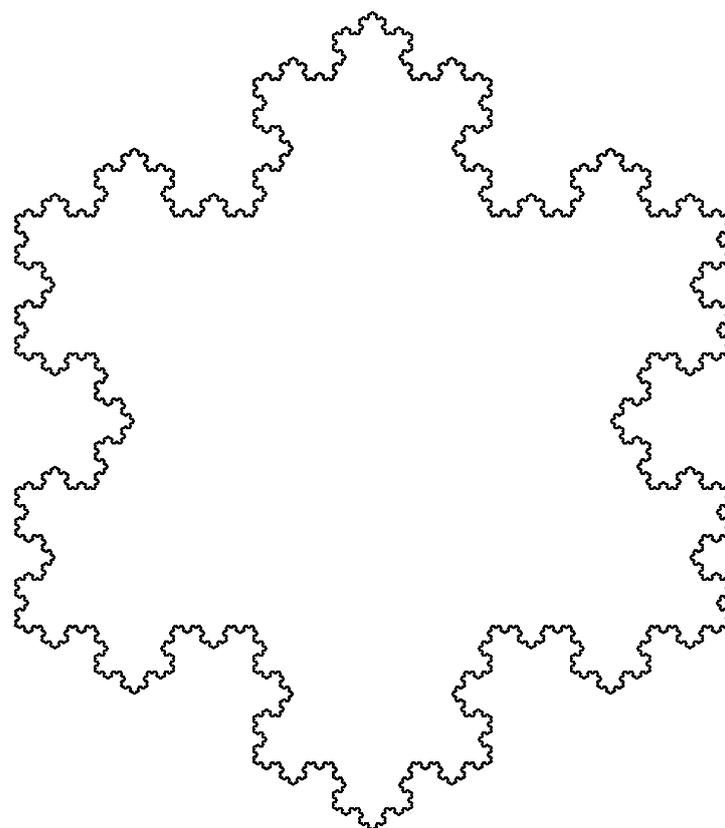


Figura 1.10: *L'ottavo passo dell'iterazione nella costruzione del fiocco di neve di Koch*

4. Se procediamo nella suddivisione dei quadrati con lo stesso criterio, al limite (dopo infiniti passi!) otterremo una curva che riempirà tutto il quadrato, e anch'essa, come la curva di Von Koch, sarà tutta "costituita da spigoli".

Il processo è schematizzato nella figura 1.11.

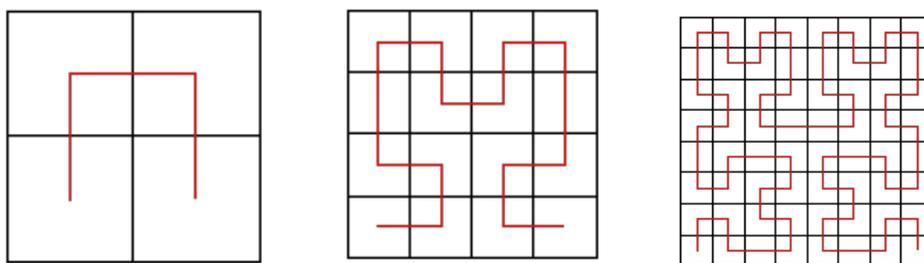


Figura 1.11: *Costruzione della curva di Hilbert*

Anche questa curva, ed è qui la cosa che più ci interessa, gode della proprietà di autosimilarità.

2 Figure autosimili e dimensione

2.1 Figure autosimili

Abbiamo già accennato al concetto di autosimilarità. Ora lo trattiamo in maniera più approfondita, con lo scopo di arrivare al concetto di dimensione frattale, concetto decisamente complesso (e affascinante!) di cui considereremo solo un approccio elementare.

È noto dalla geometria elementare il concetto di similitudine tra due figure: in sostanza due figure si dicono simili se l'ingrandimento di una è esattamente sovrapponibile all'altra (eventualmente con traslazioni, rotazioni o riflessioni speculari).

Esaminiamo ora le due immagini proposte nella figura 2.1: si vede a colpo d'occhio che ciascuna di esse è costituita da parti simili tra loro e simili all'originale.

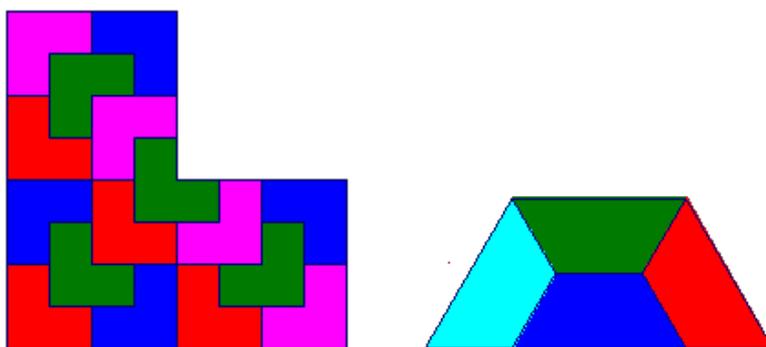


Figura 2.1: *Due oggetti con un grado di autosimilarità*

Si usa dire che figure come queste hanno un certo grado di autosimilarità .

Se riprendiamo in esame l'insieme di Cantor possiamo notare come questa autosimilarità sia perfetta: l'insieme C è composto da due parti che sono copie identiche di C , in scala ridotta di $1/3$; a sua volta ciascuna di queste due parti è costituita da due parti che sono copie identiche di C , ulteriormente ridotte di $1/3$, e così via, all'infinito. Si noti che gli insiemi C_n , non godono della stessa proprietà, in quanto, come già osservato, C_{n+1} è costituito da due copie, ridotte di $1/3$, di C_n e non di se stesso.

Figure che godono della proprietà ora indicata per l'insieme di Cantor si dicono *autosimili*. Anche il merletto di Koch e il fiocco di neve di Koch sono autosimili. Si può chiamare questa proprietà anche *invarianza rispetto al cambiamento di scala*: se si esaminano questi oggetti a scale diverse si incontrano sempre gli stessi elementi fondamentali.

Naturalmente una autosimilarità perfetta si manifesta anche in un segmento, in un quadrato, in un cubo. Ogni segmento si può pensare costituito da due (o tre, o quattro, ecc.) copie identiche di se stesso, e questo ad ogni livello. Parimenti un quadrato si può considerare costituito da quattro (o nove, o sedici,

ecc.) copie esatte di se stesso, mentre un cubo da otto (o ventisette, o sessantaquattro, ecc.) copie di se stesso, sempre ad ogni livello.

Le figure autosimili come l'insieme di Cantor o il merletto di Koch sono molto interessanti. Per esempio il merletto di Koch ha una proprietà che lo rende radicalmente diverso dalle "usuali" curve, e non tanto per il fatto che ha lunghezza infinita. L'idea fondamentale su cui si basa lo studio delle curve è quella di trasformare le curve in segmenti, in modo da potervi applicare i concetti tipici delle linee rette (per esempio la pendenza). Leibnitz asserì esplicitamente che tutte le curve sono costituite da segmenti infinitamente piccoli, chiamati, seppur impropriamente, differenziali. Era già chiaro a Leibnitz che ci potevano essere dei punti eccezionali, ma quest'idea entrò proprio in crisi quando cominciarono ad essere descritte curve che non hanno tangenti in alcun punto. Il merletto di Koch rientra in questa categoria di curve che risultano essere "intrattabili" con i metodi basati sul concetto di tangente, proprio perché, anche se se ne esamina solo un pezzetto infinitesimo, la curva mantiene tutta la sua complessità, e non si approssima affatto ad una retta.

2.2 Il concetto di dimensione

Il Libro I degli Elementi di Euclide si apre con le seguenti definizioni:

Definizione 1 Il punto è ciò che non ha parti.

Definizione 2 Una linea è lunghezza senza larghezza.

Definizione 3 Gli estremi di una linea sono punti.

Definizione 4 Una linea retta è una linea che giace in modo uguale rispetto ai suoi punti.

Definizione 5 Una superficie è ciò che ha solo lunghezza e larghezza.

Definizione 6 I bordi di una superficie sono linee.

Definizione 7 Una superficie piana è una superficie che giace in modo uguale rispetto alle sue rette.

Successivamente, quando passa alla geometria solida, Euclide apre il Libro XI con le seguenti definizioni:

Definizione 1 Un solido è ciò che ha lunghezza, larghezza e profondità.

Definizione 2 La faccia di un solido è una superficie.

In queste righe del più famoso e più utilizzato libro di matematica di tutti i tempi è contenuto il concetto di ciò che si intende con *dimensione euclidea*. L'intento di Euclide è di costruire una teoria assiomatica della geometria e, coerentemente, inizia con un elenco dei termini che saranno utilizzati e che vengono considerati *concetti primitivi*. Le descrizioni che accompagnano i termini che sono elencati non vengono mai utilizzate nel testo e hanno solo la funzione di "orientare" il lettore. Il significato di questi termini primitivi non sta nella breve descrizione che li accompagna, ma nelle proprietà che vengono successivamente assunte come assiomi. Per esempio il Primo postulato (*È possibile condurre una linea retta tra un qualsiasi punto e un qualsiasi altro punto*) comincia a precisare il significato della parola *punto* che viene introdotta nella Definizione 1. Gli altri postulati e i teoremi che ne seguiranno preciseranno il significato di tutte le parole elencate in queste definizioni.

Nonostante questa limitazione non si può non notare che queste righe elencano quelle che sono le caratteristiche del concetto intuitivo di dimensione che tutti noi possediamo: il punto ha dimensione zero, la retta ha dimensione uno, il piano ha dimensione due, lo spazio ha dimensione tre. Il fatto che la retta abbia dimensione uno è "caratterizzato" dal fatto che i bordi delle sue parti (segmenti) sono punti

(cioè oggetti di dimensione zero) e che i punti (cioè sempre oggetti di dimensione zero) sono in grado di spezzare le rette. Il piano ha dimensione due perché le sue parti (superfici) hanno bordi di dimensione 1 e perché le rette (che sono di dimensione 1) lo spezzano in due. Analogo discorso per lo spazio. Questa idea intuitiva di dimensione non fu sostanzialmente messa in discussione fino ai primi anni del 1900, quando Poincaré, tra le tante cose che era solito fare, pose l'attenzione sulla necessità di un'analisi più approfondita del concetto di dimensionalità.

Il concetto di dimensione si è venuto via via precisando successivamente e ha assunto oggi una forma molto più precisa di quanto non fosse in Euclide: si è pervenuti al concetto di *dimensione topologica*. Anche se qui non vogliamo occuparci in dettaglio di questo difficile problema, segnaliamo che la proprietà essenziale è che la dimensione topologica di una figura non si modifica se essa viene sottoposta a deformazioni continue (sostanzialmente piegamenti e stiramenti, ma senza strappi). Uno dei fatti più interessanti della teoria delle dimensioni, è un teorema, dovuto a Lebesgue e a Brouwer, che caratterizza le dimensioni di una figura qualsiasi, tanto che da alcuni la proprietà enunciata nel teorema viene assunta come definizione di dimensione.

In termini molto elementari ed intuitivi il contenuto di questo teorema può essere presentato come segue. Si consideri una semplice figura, per esempio la regione racchiusa da un'ellisse nel piano, e si supponga di ricoprirla con regioni sufficientemente piccole (si immagina che ciascuna contenga il proprio contorno). Allora qualunque sia la forma delle regioni piccole, ci saranno necessariamente dei punti in cui si incontrano *tre* o più di queste regioni. Inoltre esisteranno suddivisioni in cui ogni punto della figura appartiene al massimo a *tre* regioni. La cosa interessante è che il numero *tre* è esattamente di una unità superiore alle dimensioni della figura.

Se si esamina la figura 2.2, in cui abbiamo ricoperto la regione racchiusa dall'ellisse con cerchi, si osserva che:

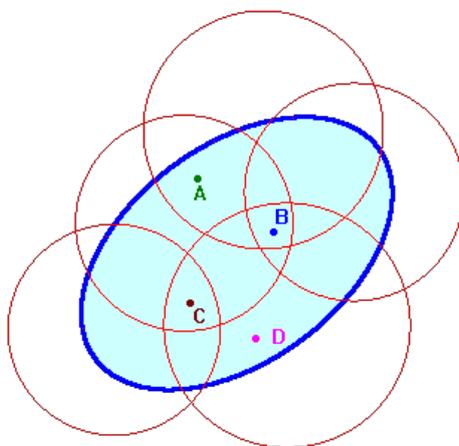


Figura 2.2: Ricoprimento di una regione piana con cerchi

- Il punto A appartiene a due cerchi.
- Il punto B appartiene a quattro cerchi.
- Il punto C appartiene a tre cerchi.
- Il punto D appartiene a un solo cerchio.

Il ricoprimento visualizzato nella figura 2.3, che si riferisce alla stessa regione della figura 2.2, è fatto in modo che nessun punto appartiene a più di tre regioni. Solo i punti A e B appartengono a tre regioni, gli altri al massimo a due.

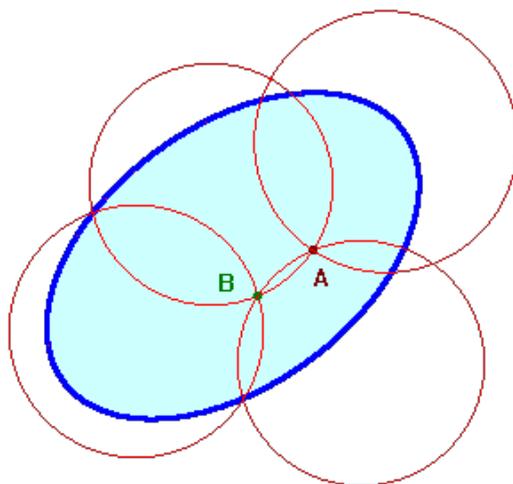


Figura 2.3: *Un altro ricoprimento di una regione piana con cerchi*

Anche se si considera un ricoprimento più regolare, come quello della figura 2.4, non si può sperare di ricoprire la regione in modo che i punti appartengano al massimo a due regioni: i punti A, B, C, D, E, F appartengono a tre regioni, gli altri a due. Il ricoprimento qui a fianco ricorda una pavimentazione con mattonelle: per questo motivo questo problema si chiama anche *problema delle mattonelle*.

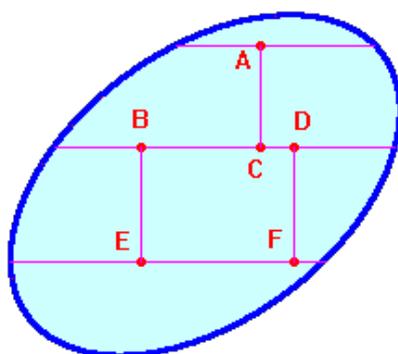


Figura 2.4: *Ricoprimento di una regione piana con mattonelle*

Se invece di una regione bidimensionale consideriamo una linea, cioè una regione a *una* dimensione, possiamo osservare che un qualunque ricoprimento con regioni sufficientemente piccole potrà prevedere punti comuni anche a più di *due* regioni, e ci saranno ricoprimenti con punti comuni al massimo a *due* regioni, ma nessun ricoprimento sarà possibile che non preveda punti comuni ad almeno *due* regioni.

Nel caso della linea rossa della figura 2.5 il ricoprimento indicato prevede punti comuni al massimo a due regioni, e non si può scendere al di sotto di due: da questo segue che la linea ha dimensione *uno*.

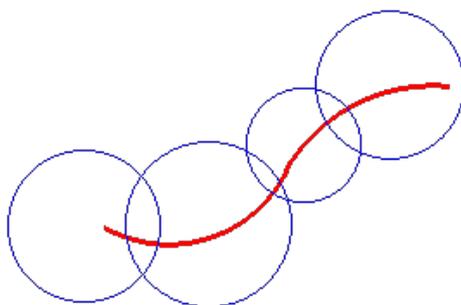


Figura 2.5: Ricoprimento di una linea piana

Seguendo la falsariga di questi esempi enunciamo il teorema di Brower-Lebesgue relativo alla dimensione topologica di una figura:

Teorema 2.1 (Brower-Lebesgue). *Se una figura a n dimensioni è coperta in modo qualsiasi da regioni parziali sufficientemente piccole, esisteranno punti appartenenti ad almeno $n + 1$ di queste regioni; inoltre è sempre possibile ricoprire la figura con regioni arbitrariamente piccole, in modo che nessun punto appartenga a più di $n + 1$ regioni. La proprietà enunciata è caratteristica delle figure a n dimensioni.*

Proviamo ad applicare questa tecnica all'insieme di Cantor: è chiaro che l'insieme può tranquillamente essere ricoperto da regioni circolari piccole quanto si vuole che siano completamente disgiunte, cioè con punti appartenenti al massimo a una regione. Per questo motivo la dimensione topologica dell'insieme di Cantor è zero. Si veda la figura 2.6.



Figura 2.6: Ricoprimento dell'insieme di Cantor

Non ci vuole molto a provare, nello stesso modo, che il merletto di Koch ha invece dimensione topologica uno.

In ragione di questo teorema la dimensione topologica si può anche chiamare dimensione di Brower-Lebesgue o dimensione di ricoprimento (*cover dimension*).

2.3 Verso la dimensione frattale

Cominciamo ora ad affrontare il problema della cosiddetta dimensione frattale. Una comprensione precisa di questo concetto non è semplice e richiede la conoscenza di tecniche matematiche abbastanza sofisticate e al di fuori degli scopi di questo corso. Ci proponiamo di avvicinarci il più possibile, e per gradi successivi, almeno limitatamente ad alcune situazioni semplici.

Consideriamo un segmento \overline{AB} e sezioniamolo in parti con un fattore di scala $s = 1/2$: otterremo $N = 2$ segmenti identici e simili all'originale. Se utilizziamo invece un fattore di scala $s = 1/3$, otterremo $N = 3$ segmenti identici e simili all'originale, e così via: si veda la figura 2.7.

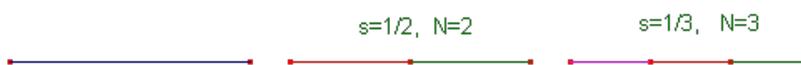


Figura 2.7: *Sezioni di un segmento in parti*

Se facciamo lo stesso procedimento su un quadrato, con $s = 1/2$ otteniamo $N = 4$ pezzi, con $s = 1/3$ otteniamo $N = 9$ pezzi, come mostrato nella figura 2.8.

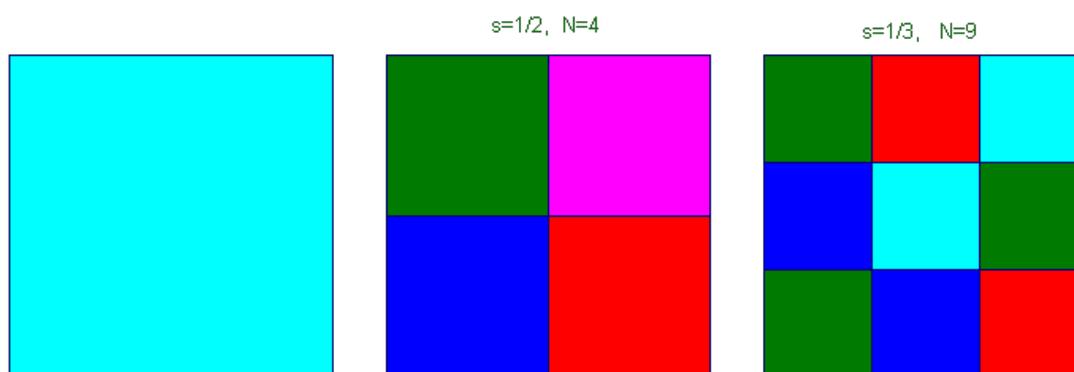


Figura 2.8: *Sezioni di un quadrato in parti*

Se infine ripetiamo lo stesso procedimento su un cubo otteniamo $N = 8$ con $s = 1/2$, $N = 27$ con $s = 1/3$, e così via.

È immediato che tra N ed s esiste una semplice relazione:

$$N = s^{-d},$$

dove d è la dimensione topologica dell'insieme in questione, ovvero rispettivamente 1, 2 o 3.

Dalla formula precedente si ricava

$$d = -\frac{\log N}{\log s},$$

qualunque sia la base del logaritmo.

Tentiamo ora di applicare la stessa tecnica all'insieme di Cantor. Se sezioniamo l'insieme in parti con un fattore di scala $1/3$, otteniamo 2 parti identiche e simili all'originale, se sezioniamo con un fattore di scala $1/9$ otteniamo 4 parti identiche e simili all'originale, e così via. Se calcoliamo il rapporto $-\log N / \log s$ otteniamo un valore costante al variare del rapporto di scala e quindi del numero di parti, ma con un valore non più intero: precisamente si ottiene 0.6309. Questo numero non rappresenta la dimensione topologica dell'insieme di Cantor che, come già visto, è zero, però è estremamente significativo il fatto che il rapporto $-\log N / \log s$ sia costante.

Proviamo a ripetere il calcolo con il merletto di Koch: se sezioniamo con un fattore $1/3$ otteniamo 4 parti identiche e simili all'originale, se usiamo un fattore $1/9$ otteniamo 16 parti identiche e simili all'originale, e così via. Questa volta il rapporto, ancora costante, vale 1.2619.

Comincia a venirci il sospetto che questi rapporti abbiano un ben preciso significato e che sia giustificato attribuire loro un nome specifico che ricordi la somiglianza con la formula della dimensione valida per segmento, quadrato e cubo. In realtà il fatto che per l'insieme di Cantor questo numero sia maggiore di zero soddisfa una certa idea intuitiva che ci fa pensare che la dimensione zero, attribuita con il metodo tradizionale, sia un po' troppo poco per un insieme che ha così tanti punti. Analogo discorso per il merletto di Koch, dove il fatto che questo rapporto sia maggiore di uno è in accordo con l'idea intuitiva che l'oggetto sia un po' più di una curva, anche se non è chiaramente una superficie, che avrebbe dimensione due.

Tenendo conto di queste osservazioni diamo la seguente definizione, valida per le figure *totalmente autosimili*.

Definizione 2.2. Si chiama *dimensione di un oggetto*, basata sull'autosimilarità, il rapporto $-\log N / \log s$, dove N è il numero di copie simili all'originale che si ottengono sezionando l'oggetto con un fattore di scala s .

La precisazione *basata sull'autosimilarità* è importante perché, come già visto, questo numero può essere diverso dalla dimensione topologica e perché esistono altri metodi per introdurre un concetto di dimensione per questi oggetti, anche se non saranno oggetti del nostro studio. La definizione appena data è uno dei metodi, il più semplice ma non l'unico, per introdurre la cosiddetta *dimensione frattale*. L'aggettivo *frattale* è dovuto al fatto che essa può essere espressa da un numero non intero.

È opportuno, per sgomberare il campo da equivoci, segnalare che il concetto di *dimensione frattale* appena introdotto è completamente diverso da quello usuale di dimensione topologica e il fatto che si usi lo stesso nome non deve trarre in inganno. La dimensione topologica continua ad avere un chiaro e preciso significato, solo che oltre a questo numero che caratterizza una determinata proprietà degli oggetti, ora ne abbiamo considerato un altro, che caratterizza *un'altra* proprietà degli stessi oggetti. Rispetto a questa *nuova* proprietà che abbiamo ora preso in esame succede che per alcuni oggetti il numero che la rappresenta è lo stesso della dimensione topologica, per altri no: nel primo gruppo rientrano il segmento, il quadrato, il cubo, nel secondo la Polvere di Cantor, il merletto di Koch, e altri oggetti che abbiamo già considerato o che considereremo più avanti.

Possiamo ora dare la seguente definizione:

Definizione 2.3. Si chiama *frattale un oggetto autosimile per cui la dimensione frattale è strettamente maggiore di quella topologica*.

Nessuna "meraviglia" se esistono oggetti che hanno una dimensione non intera: fin quando li si esamina da un certo punto di vista essi possono avere al massimo dimensione tre, e la dimensione deve essere intera; quando invece si esaminano altre caratteristiche degli stessi oggetti, possiamo loro attribuire, oltre al numero che qualifica se sono *solo lunghi*, o *anche larghi* o *anche alti*, anche un altro numero, che può essere non intero, e che misura, se così possiamo dire, il loro *livello di autosimilarità*. Non vale dunque la pena di usare punti esclamativi quando ci si accorge che, per certi oggetti, la dimensione frattale è, appunto, non intera.

Osserviamo che la definizione di dimensione frattale aggiunge, per ora solo per gli insiemi autosimili, un nuovo numero tra quelli che possiamo collegare agli insiemi di punti dello spazio, numero che va ad aggiungersi alla cardinalità e alla ordinaria dimensione topologiche.

Il concetto di dimensione frattale può essere esteso anche ad altri oggetti che non godono della proprietà di autosimilarità. Quella che oggi si ritiene la definizione più generale è detta dimensione di Hausdorff-Besicovitch, di cui però purtroppo non possiamo occuparci qui. In ogni caso il breve cenno che ne abbiamo fatto giustifica l'importanza di questo concetto.

Tra i frattali che abbiamo già considerato segnaliamo che il quadrato di Cantor ha dimensione 1.2619, mentre il cubo di Cantor ha dimensione 1.8928. La curva di Hilbert ha invece dimensione 2, come è logico visto che riempie un quadrato. Incontreremo altri insiemi nel capitolo successivo.

3 Altri frattali

3.1 Il setaccio di Apollonio

Come probabilmente provato già da Apollonio, dati tre cerchi esternamente tangenti esistono due altri cerchi tangenti a tutti tre. Si tratta di un caso particolare del famoso problema di Apollonio volto a determinare, in tutti i casi possibili, i cerchi tangenti a tre cerchi, eventualmente degeneri. Cartesio trovò una formula per determinare i raggi di questi due cerchi, dati i raggi dei tre cerchi assegnati. Il risultato è noto, tra l'altro, come “Teorema dei cerchi baciantsi”. Si veda la figura 3.1, dove i cerchi dati sono colorati in giallo, i due cerchi tangenti a tutti tre sono colorati in rosso e azzurro.

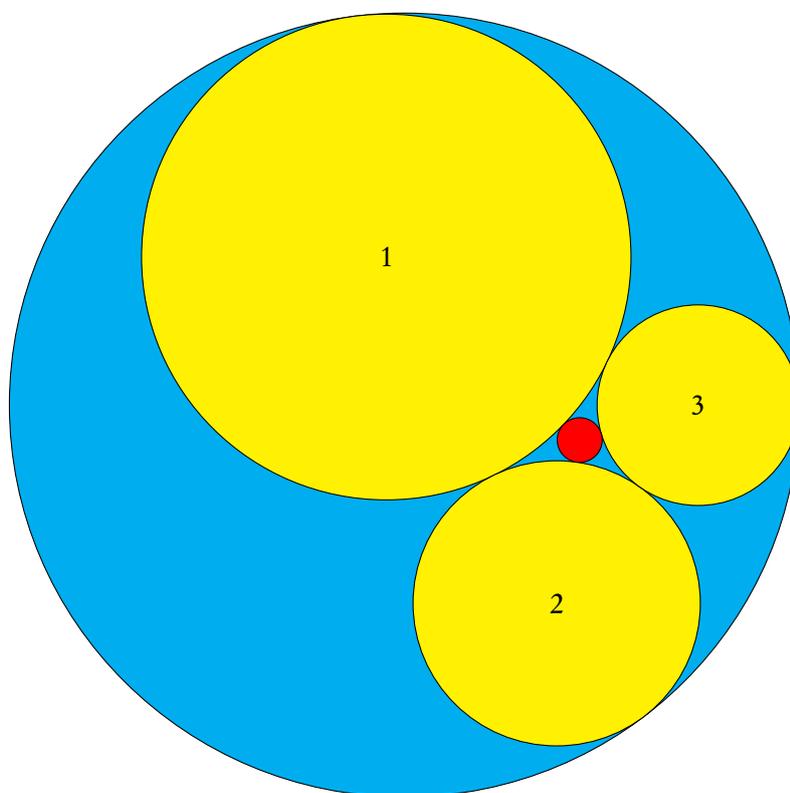


Figura 3.1: *Teorema dei “Cerchi baciantsi”*

Anche se non è strettamente inerente l'argomento di questi appunti, proponiamo, nella figura 3.2, l'immagine che visualizza la risoluzione del famoso problema di Apollonio, già citato, di costruire tutte le circonferenze tangenti a tre circonferenze date. Nel caso più generale, trattato appunto nella figura 3.2, ci sono ben 8 soluzioni al problema.

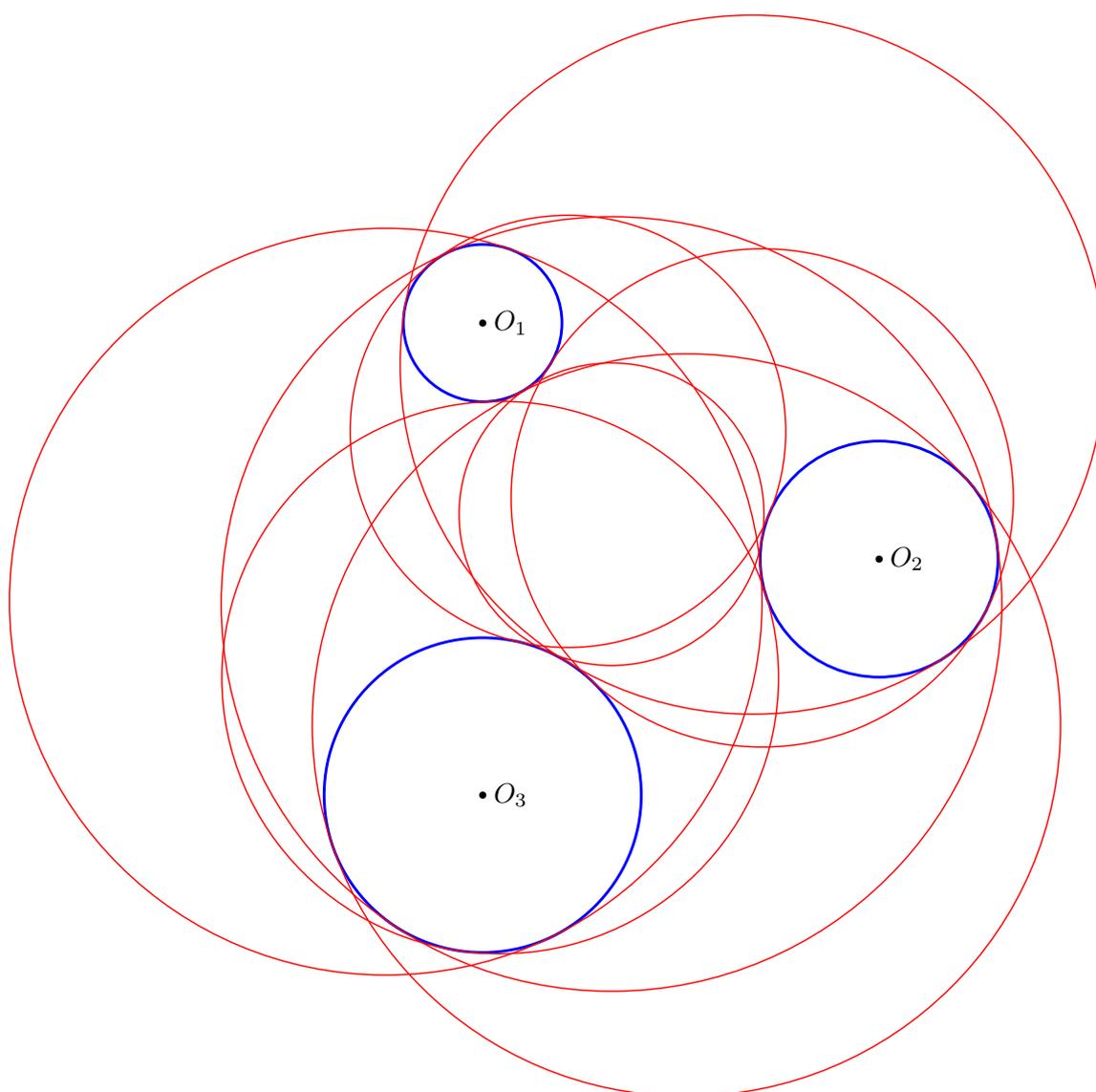


Figura 3.2: *Circonferenze tangenti a tre circonferenze date, nel caso generale*

Utilizzando il teorema dei cerchi baciantsi si può costruire un interessante frattale, detto *setaccio di Apollonio*, in onore proprio di Apollonio, anche se ovviamente egli non poteva essere interessato ai frattali.

Riconsideriamo la figura 3.1, considerando però ora i tre cerchi dati con lo stesso raggio. Il setaccio si costruisce con la seguente regola: a partire dal cerchio grande (celeste) si sottraggono i tre cerchi interni (gialli) tra di loro tangenti. Successivamente si sottrae, in ognuna delle quattro regioni rimaste, il cerchio tangente a tre dei quattro cerchi finora presenti (tra questi c'è il cerchio rosso) e si procede così all'infinito: si otterrà alla fine una regione di area nulla, detta appunto setaccio di Apollonio, la cui

dimensione frattale è 1.3057. Si veda la figura 3.3, dove abbiamo proposto una immagine in bianco e nero e una a colori.

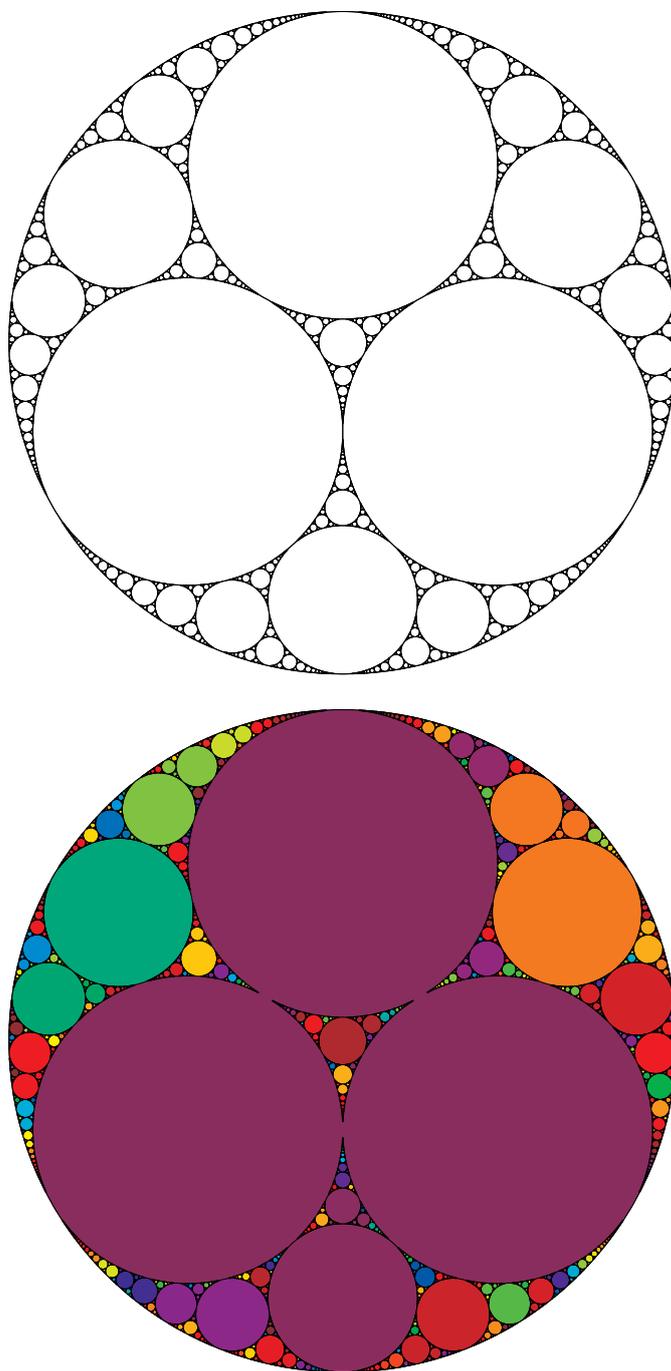


Figura 3.3: *Il setaccio di Apollonio*

3.2 Il triangolo di Sierpinski

In questo caso si parte da un triangolo equilatero, che viene diviso in quattro triangoli equilateri, sopprimendone quello centrale. In ognuno dei tre triangoli rimanenti si procede allo stesso modo e poi si itera il procedimento all'infinito. La dimensione frattale è 1.5850. La figura 3.4 illustra i primi passi della costruzione.

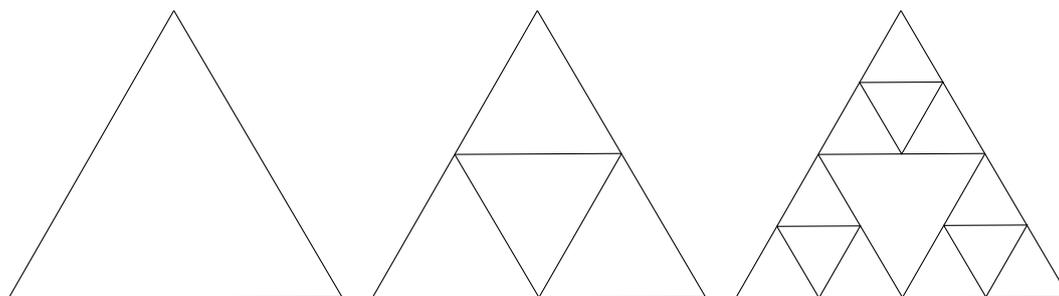


Figura 3.4: *Il triangolo di Sierpinski: primi passi nella costruzione*

Nella figura 3.5 è mostrato il risultato ottenuto dopo 6 iterazioni.

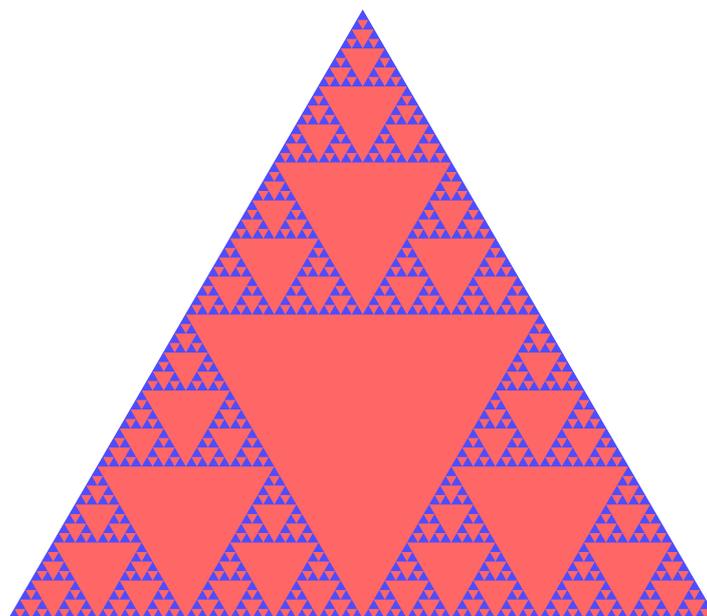


Figura 3.5: *Il triangolo di Sierpinski: iterazione al sesto passo*

3.3 Felci

Le felci sono, assieme al cavolfiore, i vegetali le cui forme più si avvicinano al concetto matematico di frattale, in quanto godono di una evidente proprietà di autosimilarità.

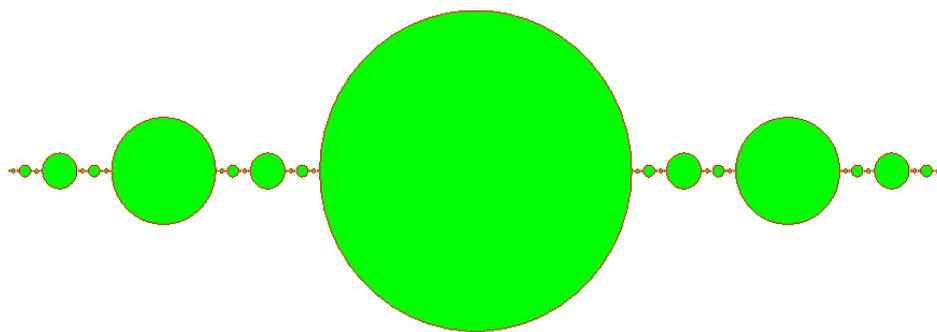
Nella figura 3.6 proponiamo un esempio di felce generata al computer con un procedimento iterativo. La sua dimensione frattale dipende dal processo iterativo usato per costruirla.



Figura 3.6: *Una felce generata al computer*

Solo per questioni di completezza citiamo infine gli insiemi di Julia e l'insieme di Mandelbrot, tra i frattali più conosciuti (e belli!): loro immagini si possono trovare ovunque in rete.

In ultima di copertina: *Il collier di Cantor. Gli anelli di Cantor.*



Introduzione ai frattali

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 24 gennaio 2018

Questo fascicoletto è rivolto agli studenti del secondo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, Sede di Pordenone. Contiene solo un'integrazione al testo in uso e alcune immagini.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematrica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.

