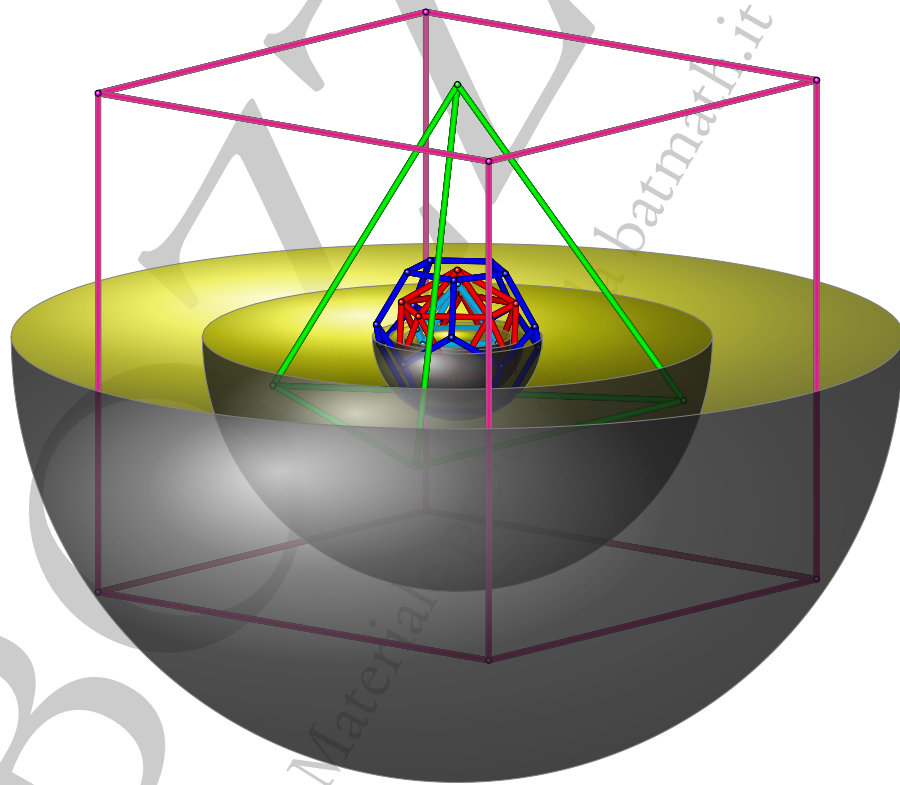


LUCIANO BATTIA

FANTASTICI POLIEDRI

1 - Solidi Platonici



www.batmath.it

Fantastici Poliedri

1 - Solidi Platonici

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.1 del 8 novembre 2018

In copertina: Riproduzione dell'immagine del Sistema Solare dal *Mysterium Cosmographicum* di Keplero (1596).

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>.

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

Attribuzione Devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale.

Non commerciale Non puoi usare il materiale per scopi commerciali.

Non opere derivate Se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, non puoi distribuire il materiale così modificato.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore usi di quest'opera in deroga da questa licenza.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

Indice

Premessa [xv](#)

Fascicoli pubblicati [xvii](#)

1 L'inizio della storia: il Timeo di Platone [1](#)

2 Poliedri [7](#)

3 I poliedri regolari [13](#)

3.1 Introduzione [13](#)

3.2 I cinque poliedri regolari [16](#)

3.2.1 Il tetraedro [16](#)

3.2.2 Il cubo o esaedro [20](#)

3.2.3 L'ottaedro [23](#)

3.2.4 Il dodecaedro [28](#)

3.2.5 L'icosaedro [31](#)

4 I poliedri “vacui” [35](#)

4.1 Figure impossibili [42](#)

5 I poliedri “elevati” [43](#)

6 Relazioni fra i poliedri regolari [53](#)

6.1 Dualità [53](#)

6.2 Poliedri inscritti in altri poliedri [54](#)

6.2.1 Tetraedri in un cubo [55](#)

6.2.2 Cubi in un dodecaedro [56](#)

6.2.3 Tetraedri in un dodecaedro [58](#)

6.2.4 Ottaedri intorno a un icosaedro [61](#)

6.3 Poliedri composti [63](#)

7 Costruzione dei poliedri regolari [67](#)

7.1 Le costruzioni di Euclide [67](#)

7.1.1 Il tetraedro regolare [67](#)

7.1.2 Il cubo o esaedro regolare [68](#)

7.1.3 L'ottaedro regolare [69](#)

7.1.4	Il dodecaedro regolare	69
7.1.5	L'icosaedro regolare	72
7.2	Altre costruzioni	73
7.2.1	Il dodecaedro regolare	73
7.2.2	L'icosaedro regolare	78
8	Tassellazioni della sfera e dello spazio	83
8.1	Linee e poligoni sulla sfera	83
8.2	Tassellazioni regolari sulla sfera	86
8.2.1	Fette di mele	88
8.3	Dualità e tassellazioni sulla sfera	90
8.3.1	Poliedri sferici e simmetrie per riflessione	98
8.4	Tassellazioni dello spazio	99
A	Miscellanea	105
A.1	Simboli di Schläfli	105
A.2	Sulla definizione di poligono e poliedro regolare	109
A.3	Poligoni di Petrie dei poliedri regolari	110
A.4	Diagrammi di Schlegel	116
A.5	Keplero e i poliedri	118
A.6	La formula di Eulero	120
A.7	I parenti del tetraedro	126
A.8	Triangolazioni	135
B	Anelli di Borromeo	141
	Bibliografia	147
	Indice analitico	149

Elenco delle figure

- 2.1 Coppia di piramidi unite per il vertice e di prismi uniti per uno spigolo 7
- 2.2 Una piramide con pentagramma di base e una stella octangula 7
- 2.3 I poliedri duali di Szilassi e Császár 8
- 2.4 Un poliedro di forma toroidale 8
- 2.5 Un anello ottenuto incollando otto ottaedri regolari 9
- 2.6 Un anello con prismi e piramidi 9
- 2.7 Un solido costituito da due tetraedri sovrapposti, con il dettaglio di una delle facce 10
- 2.8 Il dodecaedro e il grande dodecaedro 10
- 2.9 Una figura al vertice costituita da una poligonale non piana 12

- 3.1 Poliedro non regolare con sei facce triangolari equilateri e particolare di alcune figure al vertice 13
- 3.2 Il cubottaedro, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare 14
- 3.3 Il dodecaedro rombico, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare 14
- 3.4 Un prisma a base esagonale, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare 15
- 3.5 Un tetraedro con facce a triangolo isoscele, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare 15
- 3.6 Il tetraedro regolare 16
- 3.7 Il tetraedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani sferici passanti per due dei quattro vertici del tetraedro e il parallelo passante per tre dei quattro vertici 17
- 3.8 Il tetraedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i quattro punti di tangenza della sfera con le facce del tetraedro, i meridiani sferici passanti per due e il parallelo passante per tre di questi quattro punti. 17
- 3.9 Il tetraedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i tre meridiani tangenti a uno spigolo e il parallelo tangente a tre spigoli 18
- 3.10 Lo sviluppo piano più comune del tetraedro: passo intermedio 18
- 3.11 Sviluppo del tetraedro: passo finale in 3D 19
- 3.12 Sviluppo del tetraedro: proiezione 2D 19
- 3.13 Il cubo o esaedro regolare 20
- 3.14 Il cubo o esaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro degli otto vertici 20
- 3.15 Il cubo o esaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro dei sei punti di tangenza tra la sfera e le facce del cubo 21
- 3.16 Il cubo o esaedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i meridiani tangenti a due spigoli e i paralleli tangenti a quattro spigoli 21

- 3.17 Lo sviluppo piano più comune del cubo o esaedro: passo intermedio in 3D 22
- 3.18 Sviluppo del cubo o esaedro: passo finale in 3D 22
- 3.19 Sviluppo del cubo o esaedro: proiezione 2D 23
- 3.20 L'ottaedro regolare 23
- 3.21 L'ottaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani e il parallelo passanti per quattro dei sei vertici 24
- 3.22 L'ottaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro degli otto punti di tangenza 24
- 3.23 L'ottaedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i meridiani e il parallelo (equatore) tangenti a quattro spigoli 25
- 3.24 Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo 25
- 3.25 Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: secondo passo nello sviluppo 26
- 3.26 Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: terzo passo nello sviluppo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo 26
- 3.27 Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: lo sviluppo completo in 3D 27
- 3.28 Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo 27
- 3.29 Il dodecaedro regolare 28
- 3.30 Il dodecaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani passanti per quattro dei venti vertici e i paralleli passanti per cinque dei venti vertici 28
- 3.31 Il dodecaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i punti di tangenza, i meridiani passanti per quattro e i paralleli passanti per cinque dei dodici punti di tangenza 29
- 3.32 Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo 29
- 3.33 Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: secondo passo nello sviluppo. È evidenziato il pentagono base dello sviluppo 30
- 3.34 Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: lo sviluppo completo in 3D 30
- 3.35 Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il pentagono base dello sviluppo 31
- 3.36 L'icosaedro regolare 31
- 3.37 L'icosaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i paralleli passanti per tre e i meridiani passanti per quattro dei dodici vertici 32
- 3.38 L'icosaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i punti di tangenza, i meridiani passanti per quattro e i paralleli passanti per tre o sei dei punti di tangenza 32
- 3.39 Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo 33
- 3.40 Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro: secondo passo nello sviluppo 33
- 3.41 Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro: lo sviluppo completo in 3D 34
- 3.42 Sviluppo dell'icosaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo 34

- 4.1 Tetraedron Planum Vacuum 36
- 4.2 Tetraedron Planum Vacuum, da una seconda angolazione 37

4.3	Tetraedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione	37
4.4	Hexaedron Planum Vacuum	38
4.5	Hexaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione	38
4.6	Octaedron Planum Vacuum	39
4.7	Octaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione	39
4.8	Dodecaedron Planum Vacuum	40
4.9	Dodecaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione	40
4.10	Icosaedron Planum Vacuum	41
4.11	Icosaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione	41
4.12	Il cubo impossibile: la figura 2D	42
4.13	Modello 3D del cubo impossibile, visto da una angolazione che svela il trucco	42
5.1	Il tetraedro regolare elevato	44
5.2	Il tetraedro regolare elevato: figura esplosa per mostrare le componenti	44
5.3	Il cubo elevato	45
5.4	Il cubo elevato: figura esplosa per mostrare le componenti	45
5.5	L'ottaedro elevato	46
5.6	L'ottaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti	46
5.7	L'ottaedro elevato come compenetrazione di due tetraedri regolari: la <i>Stella octangula</i>	47
5.8	I due tetraedri componenti della <i>Stella octangula</i>	47
5.9	La stella octangula "vacua"	48
5.10	La stella octangula "vacua" con una diversa colorazione e l'evidenziazione dello scheletro dell'ottaedro di base	48
5.11	Il dodecaedro elevato	49
5.12	Il dodecaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti	49
5.13	Il dodecaedro elevato: figura completamente esplosa per evidenziare al meglio le componenti	50
5.14	L'icosaedro elevato	51
5.15	L'icosaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti	51
5.16	L'icosaedro elevato: figura completamente esplosa per evidenziare al meglio le componenti	52
6.1	Autodualità del tetraedro	53
6.2	Dualità fra cubo e ottaedro	54
6.3	Dualità fra dodecaedro e icosaedro	54
6.4	I due tetraedri inscritti in un cubo	55
6.5	I due tetraedri inscritti in un cubo riuniti a formare la stella octangula	55
6.6	I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro	56
6.7	I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro, sovrapposti	56
6.8	I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro, sovrapposti, con una diversa colorazione per evidenziare al meglio i componenti	57
6.9	I cinque cubi inscritti in un dodecaedro: particolare delle porzioni di cubi visibili da una faccia	57
6.10	I cinque cubi inscritti in un dodecaedro a formare il poliedro detto "Composto di cinque cubi"	58

- 6.11 Due tetraedri sovrapposti inscritti in un dodecaedro, in due cubi diversi e senza alcun vertice comune 59
- 6.12 Cinque tetraedri sovrapposti inscritti in un dodecaedro, in cinque cubi diversi e senza alcun vertice comune 59
- 6.13 Dieci tetraedri inscritti in un dodecaedro a formare il poliedro “Composto di dieci tetraedri” 60
- 6.14 Due tetraedri inscritti in un dodecaedro, con un vertice in comune 61
- 6.15 Un ottaedro “intorno” a un icosaedro 62
- 6.16 Cinque ottaedri intorno a un icosaedro: il “Composto di cinque ottaedri” 63
- 6.17 Poliedro composto di un cubo e un ottaedro 64
- 6.18 Poliedro composto da un dodecaedro e un icosaedro 65
- 6.19 Poliedro composto da quattro cubi, prima versione 66
- 6.20 Poliedro composto da quattro cubi, seconda versione 66

- 7.1 La costruzione del tetraedro regolare inscritto in una sfera secondo Euclide 68
- 7.2 La costruzione del cubo inscritto in una sfera secondo Euclide 68
- 7.3 La costruzione dell’ottaedro regolare inscritto in una sfera secondo Euclide 69
- 7.4 Costruzione della sezione aurea 70
- 7.5 La costruzione del dodecaedro regolare secondo Euclide 71
- 7.6 La costruzione del dodecaedro regolare secondo Euclide: la figura completa 71
- 7.7 Schema della costruzione dell’icosaedro regolare secondo Euclide 72
- 7.8 L’icosaedro costruito secondo Euclide 73
- 7.9 Interpretazione alternativa della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: primi passi 74
- 7.10 Interpretazione alternativa della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: lo schema 74
- 7.11 Rettangolo aureo e sua proprietà 75
- 7.12 Variante del rettangolo aureo 75
- 7.13 Una seconda implementazione della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: primi passi 76
- 7.14 Una seconda implementazione della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: la figura completa 76
- 7.15 Costruzione del dodecaedro regolare a partire da un pentagono: lo schema 77
- 7.16 Costruzione del dodecaedro regolare a partire da un pentagono: la figura completa 78
- 7.17 Costruzione dell’icosaedro regolare a partire dal cubo: primi passi 79
- 7.18 Costruzione dell’icosaedro regolare a partire dal cubo: la costruzione completa 79
- 7.19 Costruzione dell’icosaedro a partire da tre rettangoli aurei 80
- 7.20 Costruzione dell’icosaedro mediante composizione di due piramidi e un antiprisma 81

- 8.1 Un triangolo sferico 83
- 8.2 Triangoli uguali, ma non sovrapponibili rimanendo nel piano 84
- 8.3 Triangoli equilateri non simili sulla sfera 85
- 8.4 Un fuso sferico: “poligono” sulla sfera con soli due lati 85
- 8.5 Il tetraedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta 86
- 8.6 Il cubo e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta 86

- 8.7 L'ottaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta 87
- 8.8 Il dodecaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta 87
- 8.9 L'icosaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta 88
- 8.10 Triangoli equilateri ed esagoni oppure pentagoni: una tassellazione possibile e una impossibile nel piano 88
- 8.11 Suddivisione di una sfera in quattro parti identiche 89
- 8.12 Il tetraedro regolare con le facce decomposte in triangoli rettangoli 90
- 8.13 Il duale del tetraedro regolare della figura 8.12, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli 91
- 8.14 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il tetraedro regolare della figura 8.12 sulla sfera circoscritta 91
- 8.15 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il tetraedro regolare della figura 8.13 sulla sfera circoscritta 92
- 8.16 Le tassellazioni delle figure 8.14 e 8.15 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia dei due tetraedri delle figure 8.12 e 8.13 92
- 8.17 Il cubo con le facce decomposte in triangoli rettangoli 93
- 8.18 L'ottaedro regolare, duale del cubo della figura 8.17, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli 93
- 8.19 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il cubo della figura 8.17 sulla sfera circoscritta 94
- 8.20 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando l'ottaedro regolare della figura 8.18 sulla sfera circoscritta 94
- 8.21 Le tassellazioni delle figure 8.19 e 8.20 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia del cubo della figura 8.17 e dell'ottaedro della figura 8.18 95
- 8.22 Il dodecaedro regolare con le facce decomposte in triangoli rettangoli 95
- 8.23 L'icosaedro regolare, duale del dodecaedro della figura 8.22, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli 96
- 8.24 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il dodecaedro regolare della figura 8.22 sulla sfera circoscritta 96
- 8.25 La tassellazione della sfera ottenuta proiettando l'icosaedro regolare della figura 8.23 sulla sfera circoscritta 97
- 8.26 Le tassellazioni delle figure 8.24 e 8.25 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia del dodecaedro della figura 8.22 e dell'icosaedro della figura 8.23 97
- 8.27 L'ottaedro sferico e i cerchi massimi ottenuti mediante i piani di simmetria per riflessione 98
- 8.28 Tassellazione dello spazio mediante cubi 99
- 8.29 Impossibilità della tassellazione dello spazio mediante tetraedri 100
- 8.30 Piramide costruita a partire da un cubo e che costituisce un ottavo di ottaedro 100
- 8.31 L'ottaedro ottenuto "incollando" opportunamente otto piramidi come quella della figura 8.30 101
- 8.32 Due piramidi, a sinistra, e tre piramidi, a destra, da sottrarre a un cubo: secondo e terzo passo per la costruzione di un tetraedro inscritto in un cubo 101
- 8.33 Il tetraedro inscritto in un cubo, ottenuto sottraendo al cubo quattro piramidi 102
- 8.34 Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: primo passo 102
- 8.35 Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: un "alveare" di tetraedri 103

- 8.36 Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: riempimento degli spazi vuoti con ottaedri [103](#)
- 8.37 Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: tassellazione mediante un diverso nucleo [104](#)
- A.1 Costruzione di un poligono regolare [105](#)
- A.2 Costruzione di un poligono regolare stellato [106](#)
- A.3 Tre diversi ennagoni regolari stellati [106](#)
- A.4 Pentagonagramma ottenuto per stellazione dal pentagono regolare [107](#)
- A.5 Le due possibili stellazioni dell'eptagono: ABCDEFG e HIJKLMN [108](#)
- A.6 I quattro ennagoni regolari sovrapposti [108](#)
- A.7 Triangoli con circonferenze inscritta e circoscritta non concentriche [109](#)
- A.8 Trapezio e pentagono con circonferenze inscritta e circoscritta non concentriche [110](#)
- A.9 Un poligono di Petrie sul tetraedro regolare [111](#)
- A.10 Poligoni di Petrie per le tassellazioni regolari del piano [111](#)
- A.11 Poligoni di Petrie e tetraedro regolare [112](#)
- A.12 Poligoni di Petrie: il cubo [112](#)
- A.13 Poligoni di Petrie: l'ottaedro regolare [113](#)
- A.14 Poligoni di Petrie: il dodecaedro regolare [114](#)
- A.15 Poligoni di Petrie: l'icosaedro regolare [115](#)
- A.16 Il cubo e una sua proiezione prospettica su un piano [116](#)
- A.17 Proiezione tridimensionale di un ipercubo [117](#)
- A.18 Diagrammi di Schlegel del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro [118](#)
- A.19 Diagrammi di Schlegel del cubo e del dodecaedro [118](#)
- A.20 Costruzione del cubo secondo Keplero [118](#)
- A.21 Costruzione del dodecaedro secondo Keplero [119](#)
- A.22 Dettaglio dei pianeti interni del sistema solare di Keplero dal *Mysterium Cosmographicum* [119](#)
- A.23 Riproduzione dell'immagine illustrante il sistema solare, presa dal *Mysterium Cosmographicum* [120](#)
- A.24 Paralleli, meridiani e una curva chiusa su una sfera [121](#)
- A.25 Superficie toroidale, a sinistra, e una curva chiusa che la divide in due regioni disgiunte, a destra [121](#)
- A.26 Superficie toroidale con due esempi di curve chiuse che non la dividono in regioni disgiunte [122](#)
- A.27 Superficie toroidale con due esempi di due curve chiuse che la dividono in regioni disgiunte [122](#)
- A.28 Superficie toroidale doppia [123](#)
- A.29 Superficie toroidale doppia con linea chiusa che la divide in due regioni disgiunte [123](#)
- A.30 Superficie toroidale doppia con tre linee chiuse [124](#)
- A.31 Da una piramide con 10 spigoli a un poliedro con 11 spigoli [125](#)
- A.32 Il poliedro con 11 spigoli ottenuto con il processo indicato nella figura [A.31](#) [125](#)
- A.33 Un parallelepipedo e un tronco di piramide con $n = 4$ e $m = 3$ [126](#)
- A.34 I poliedri duali di Szilassi, a sinistra, e Császár, a destra [127](#)
- A.35 Dettaglio della struttura interna del poliedro di Császár dopo rotazione di alcune facce della parte alta [128](#)

- A.36 Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una quarta faccia 129
- A.37 Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una quinta faccia 130
- A.38 Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una sesta faccia 131
- A.39 Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una settima faccia 132
- A.40 Il poliedro di Császár: sviluppo della parte alta 133
- A.41 Il poliedro di Császár: sviluppo della parte bassa 133
- A.42 Il poliedro di Császár in un proiezione che lascia intravedere la struttura toroidale 134
- A.43 Un esagono e le sue nove diagonali 135
- A.44 “Orecchi” individuabili nell’esagono della figura A.43 136
- A.45 Triangolazione completa dell’esagono della figura A.43 136
- A.46 Le cinque triangolazioni di un pentagono 137
- A.47 Cubo e una sua triangolazione elementare 137
- A.48 Una triangolazione efficiente del cubo della figura A.47 138
- A.49 Costruzione del poliedro non triangolabile di Schönhardt 138
- A.50 Triangolazione del poliedro di Császár 139
- B.1 Gli anelli di Borromeo in una proiezione che li fa sembrare circolari 141
- B.2 Gli anelli di Borromeo in una proiezione che evidenzia il fatto che non si tratta di anelli circolari 142
- B.3 Gli anelli di Borromeo realizzati con tre ellissi identiche 142
- B.4 Il logo dell’IMU, basato sugli anelli di Borromeo 143

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

Premessa

Questo fascicolo fa parte di una raccolta dedicata ai poliedri. Non si tratta di un lavoro teorico sui poliedri, quanto piuttosto di una serie di immagini che illustrano le spettacolari caratteristiche “estetiche” di queste figure geometriche.

Ci preme anche segnalare che il lavoro non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità: non basterebbe una voluminosa enciclopedia per raccogliere quanto è noto su questo argomento.

Nella bibliografia, che è comune per tutti i fascicoli della raccolta, sono riportati i testi consultati, sui quali si possono trovare tutte le dimostrazioni necessarie a giustificare le affermazioni e costruzioni via via proposte in questo lavoro.

Lo spunto per realizzare questa raccolta è nato per soddisfare le esigenze del corso di *Matematica per il Design*, svolto presso l’ISIA Roma, sede di Pordenone.

Tutte le figure proposte sono state realizzate con il pacchetto grafico Tikz del sistema L^AT_EX, e anzi uno degli scopi di questo lavoro è proprio quello di mostrare come si possano realizzare con questo pacchetto anche figure tridimensionali molto complesse.

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

Fascicoli pubblicati

Solidi Platonici. Introduzione generale ai poliedri. I cinque poliedri regolari. Poliedri regolari elevati. Relazioni tra i poliedri regolari. Costruzioni dei poliedri regolari. Tassellazioni della sfera e dello spazio a partire dai poliedri regolari. Appendice sugli anelli di Borromeo. Miscellanea: simboli di Schläfli, poligoni di Petrie. Oltre duecentocinquanta illustrazioni.

Solidi di Archimede e Catalan. Dualità. Dai poliedri regolari ai poliedri semiregolari mediante troncature o mediante espansione. Solidi di Catalan. Tassellazioni semiregolari della sfera e dello spazio. Il problema dei dittatori nemici. Poliedri di Goldberg e sfere geodetiche. Osservazioni sul cubottaedro. Oltre cinquecento illustrazioni.

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

1. L'inizio della storia: il Timeo di Platone

Quanto antica è la conoscenza dei poliedri e, in particolare, dei solidi Platonici? Sicuramente l'origine dell'interesse per questi solidi si perde nella notte dei tempi: basti ricordare qui le *Carved Stone Balls*, pietre sagomate come poliedri, rinvenute in Scozia e risalenti al 2000 a.C, anche se non c'è accordo unanime sul fatto che esse siano in effetti costruite sul modello dei poliedri platonici. Un dado invece rinvenuto sul Monte Loffa, nelle colline Veronesi, è indubbiamente un dodecaedro con diversi simboli incisi sulle facce: esso risale a circa il quinto secolo prima di Cristo.

Quasi sicuramente almeno alcuni dei cinque poliedri regolari erano noti ai Pitagorici e finalmente Teeteto (415-369 a.C) sviluppa una teoria generale dei solidi regolari, aggiungendo esplicitamente l'ottaedro e l'icosaedro ai solidi fino ad allora noti.

Tuttavia è con Platone che la vera storia dei poliedri regolari ha inizio, con la sua trattazione contenuta nel *Timeo*: è per questo motivo che ne riporteremo di seguito i passi salienti, con alcuni commenti. Naturalmente Euclide non poteva non includere nei suoi *Elementi* una dettagliata trattazione dei poliedri, con in particolare la dimostrazione che i poliedri regolari sono solo cinque. Torneremo in seguito con brevi cenni a parlare degli altri studiosi che hanno contribuito a estendere l'interesse per queste figure solide.

Veniamo ora alle bellissime pagine del *Timeo* in cui si parla, con uno slancio lirico sublime fuso con un ragionamento matematico di assoluta precisione, dei poliedri regolari. Come afferma Francesco Lamendola⁽¹⁾ «nel *Timeo* la riflessione filosofica di Platone si allarga a dismisura, diviene cosmica e visionaria, riflette lampi di luce corrusca, scolpisce immagini di rara grandiosità e potenza, nello sforzo supremo di cogliere l'origine del mondo e dell'universo, sfiorando il sublime: qualche cosa di paragonabile al grandioso sforzo compiuto da Dante per giungere alla visione finale di Dio, nell'ultimo canto della *Divina Commedia*».

Ora però voglio cercare di mostrarvi con un discorso insolito come ciascuno di questi elementi è stato ordinato ed è nato, ma dal momento che conoscete il metodo scientifico con il quale bisogna mostrare le cose che dico, mi seguirete. In primo luogo è chiaro a chiunque che fuoco, terra, acqua e aria sono corpi: e ogni specie di corpo ha anche profondità. Ed è assolutamente necessario che la profondità includa la natura del piano; e la superficie piana e rettilinea è formata da triangoli. Tutti i triangoli derivano da due triangoli, ciascuno dei quali ha un angolo retto e due acuti⁽²⁾: e di questi triangoli l'uno ha, dall'una e dall'altra parte, una parte uguale di angolo retto diviso da lati uguali, l'altro due parti disuguali

¹Il mistero dei poliedri regolari nella teoria platonica del Timeo, http://www.ariannaeditrice.it/articolo.php?id_articolo=40565.

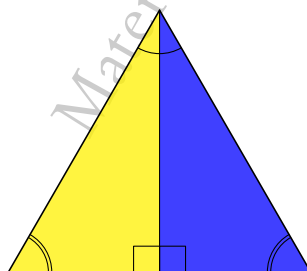
²Si noti come Platone scelga i triangoli rettangoli come figure base di tutti i triangoli, e quindi anche successivamente di tutti i poligoni.

di angolo retto diviso da lati disuguali⁽³⁾. Questo è il principio che noi stabiliamo per il fuoco e per gli altri corpi, procedendo secondo un ragionamento necessario e verosimile: quanto ai principi superiori a questi, li conosce il dio e, fra gli uomini, chi a lui è caro. Ora bisogna dire quali sono i quattro bellissimi corpi, fra di loro dissimili, di cui alcuni possono, dissolvendosi, generarsi reciprocamente: se scopriamo questa cosa, abbiamo la verità intorno alla nascita della terra e del fuoco e di tutti gli altri elementi che secondo una proporzione stanno nel mezzo. Non saremo infatti d'accordo con nessuno che affermi che vi sono corpi visibili più belli di questi, i quali costituiscono ciascuno un genere a se stante. Cercheremo dunque di accordare insieme questi quattro generi di corpi che si distinguono per la loro bellezza, e allora diremo di aver compreso a sufficienza la loro natura. Dei due triangoli l'isoscele ha ottenuto in sorte una sola forma, lo scaleno infinite: e dunque fra queste forme infinite bisogna scegliere la più bella, se vogliamo cominciare in modo conveniente. Se allora qualcuno fosse in grado di dirci, in base alla sua scelta, una più bella ancora per la composizione di questi corpi, quello dunque avrà ragione come amico e non come nemico: lasciando da parte gli altri triangoli, stabiliamo dunque che fra i molti triangoli uno sia il più bello, e cioè quel triangolo che ripetuto forma un terzo triangolo, l'equilatero⁽⁴⁾.

Spiegarne la ragione, sarebbe un discorso troppo lungo: e tuttavia vi è in premio la nostra amicizia per chi rifiuterà questa cosa e dimostrerà che non è così. I due triangoli scelti da cui sono stati realizzati i corpi del fuoco e degli altri elementi siano l'isoscele e quello che ha sempre il quadrato del lato maggiore triplo del quadrato del minore⁽⁵⁾. Ora definiamo meglio quel che prima si è detto in modo oscuro. Infatti ci sembrava che i quattro elementi traessero tutti origine uno dall'altro, ma questa visione non era corretta: in realtà i quattro elementi derivano dai triangoli che abbiamo scelto, e cioè tre si formano da quello che ha i lati disuguali, mentre il quarto è formato esso soltanto dal triangolo isoscele. Non possono dunque dissolversi tutti quanti reciprocamente, in modo che da un grande numero di corpi piccoli nasca un piccolo numero di corpi grandi, e viceversa, ma questo vale soltanto per i primi tre: poiché derivano tutti da un solo triangolo, quando i

³Si tratta del triangolo rettangolo ed isoscele (che ha i due angoli acuti che sono entrambi la metà di un angolo retto e naturalmente due cateti uguali) e del triangolo rettangolo scaleno (che invece ha i due angoli acuti, che sommati danno una angolo retto, diversi e quindi due cateti diversi).

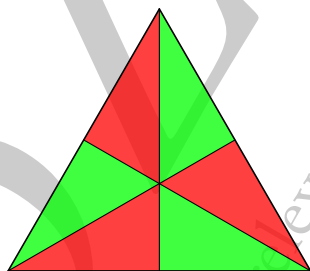
⁴È chiaro che, a meno di omotetie ed isometrie, di triangoli rettangoli ed isosceli ce n'è uno solo, mentre di triangoli rettangoli scaleni ce ne sono infiniti: Platone classifica tra questi come più bello quello che è la metà di un triangolo equilatero in quanto, "ripetuto", forma appunto un triangolo equilatero.



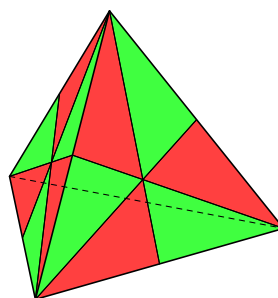
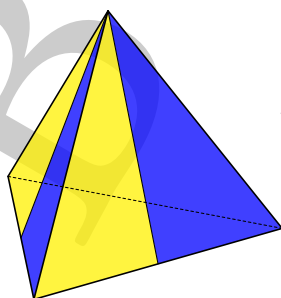
⁵Nel triangolo rettangolo scaleno scelto da Platone come il più bello, l'ipotenusa è il doppio del cateto minore e quindi, sulla base del teorema di Pitagora, il quadrato del cateto maggiore è triplo del quadrato del cateto minore.

più grandi si dissolvono, se ne formeranno molti e piccoli, i quali accolgono le figure a loro appropriate, e quando invece numerosi corpi piccoli si dividono nei triangoli, derivando un solo numero di una sola massa, costituiranno un'altra grande specie. Dunque, quanto si è detto sulla loro reciproca generazione sia sufficiente. Quello che si deve qui di seguito spiegare è come si è formata ciascuna specie di essi, e dalla combinazione di quanti numeri. Si comincerà dalla prima specie, che è ordinata nel modo più semplice: elemento di essa è il triangolo che ha l'ipotenusa lunga il doppio del lato minore. Se si accostano due triangoli di questo tipo secondo la diagonale, e per tre volte si ripete l'operazione, e le diagonali e i lati piccoli convergono nello stesso punto, come in un centro, dai sei triangoli nasce un solo triangolo equilatero⁽⁶⁾; e se si compongono insieme quattro triangoli equilateri, formano per ogni tre angoli piani un angolo solido, che segue immediatamente il più ottuso degli angoli piani. Formati questi quattro angoli, abbiamo la prima specie di solidi⁽⁷⁾, che può dividere l'intera sfera in parti uguali e simili. La seconda specie si forma dagli stessi triangoli, riuniti insieme in otto triangoli equilateri, in modo da formare un angolo solido da quattro angoli piani: e quando vi siano sei angoli di questo tipo, il corpo della seconda specie è così compiuto⁽⁸⁾. La terza specie è formata da centoventi triangoli connessi insieme, da dodici angoli solidi, compresi ciascuno da cinque triangoli equilateri piani, e ha per base venti

⁶Come già osservato, per costruire un triangolo equilatero sono sufficienti due triangoli rettangoli con l'ipotenusa doppia del cateto minore, appaiati. Questa costruzione però non è soddisfacente, in quanto non mantiene il gruppo delle simmetrie del triangolo equilatero: è evidente che con questa decomposizione del triangolo equilatero i tre vertici giocano un ruolo diverso, in quanto solo in uno concorrono due lati dei triangoli "costituenti". Molto più corretta invece la decomposizione qui descritta, in quanto sono mantenute tutte le simmetrie.



⁷Si tratta del tetraedro regolare, con quattro triangoli equilateri come facce e quindi in totale con ventiquattro triangoli rettangoli "elementari" costituenti. La necessità di suddividere ciascuna faccia in sei triangoli rettangoli ai fini di preservare il gruppo delle simmetrie risulta ancora più evidente con la costruzione del tetraedro: solo con questa decomposizione i quattro vertici risultano "equivalenti".

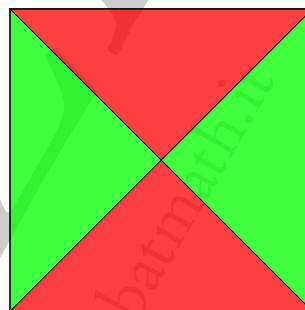
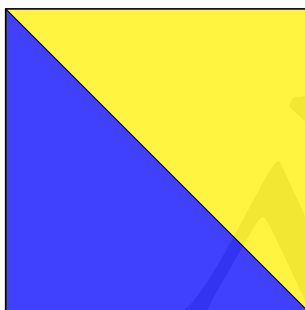


⁸Si tratta dell'ottaedro regolare: esso ha otto facce e quindi è composto da quarantotto triangoli rettangoli elementari.

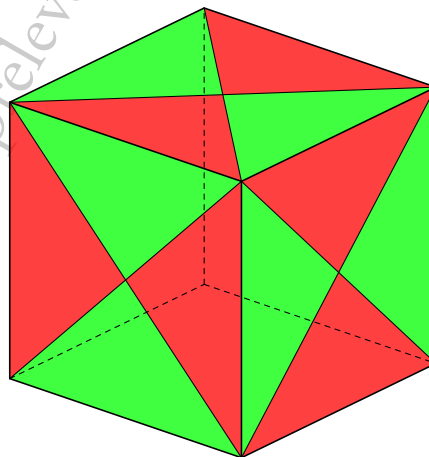
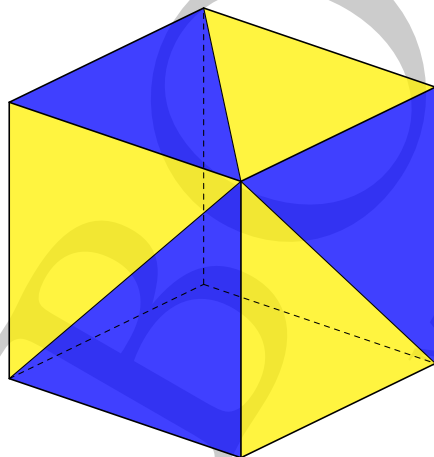
triangoli equilateri⁽⁹⁾. E l'uno dei due elementi, dopo aver generato queste figure, terminò la sua funzione. Il triangolo isoscele generò la natura della quarta specie, che è formata da quattro triangoli isosceli, con gli angoli retti congiunti nel centro, così da formare un tetragono equilatero⁽¹⁰⁾: sei di questi tetragoni equilateri, accostati insieme, formano otto angoli solidi, ciascuno dei quali è formato dall'armonica combinazione di tre angoli piani retti⁽¹¹⁾. La figura del corpo che così è formata è quella cubica, ed ha per base sei tetragoni equilateri piani. Vi era ancora una quinta combinazione, di cui il dio si servì per decorare l'universo⁽¹²⁾. Se qualcuno, riflettendo con attenzione su tutto quello che è stato detto, non

⁹Si tratta dell'icosaedro regolare che, avendo venti facce triangolari, è composto, come lo stesso Platone afferma, da ben centoventi triangoli rettangoli elementari.

¹⁰Il triangolo rettangolo isoscele viene utilizzato da Platone per costruire le sei facce quadrate ("tetragoni equilateri") del cubo: due triangoli rettangoli isosceli sarebbero sufficienti per generare un quadrato, ma ancora una volta la irrinunciabile necessità del mantenimento del gruppo delle simmetrie porta Platone a considerare una costruzione più complessa, con quattro triangoli rettangoli isosceli.



¹¹Si tratta del cubo, l'ultimo dei poliedri regolari costruibili con i due triangoli elementari scelti da Platone, precisamente con ventiquattro triangoli rettangoli isosceli. Anche per il cubo si può osservare che la scelta di utilizzare quattro triangoli rettangoli isosceli anziché solo due, già necessaria per mantenere le simmetrie del quadrato, si rivela ancora più importante per le simmetrie del cubo.



¹²La "quinta combinazione" è quella del dodecaedro, che non può essere costruita con i triangoli elementari considerati da Platone. Anche se essa è citata apparentemente di sfuggita, quasi certamente era la preferita dal filosofo in quanto utilizzata da dio per decorare l'universo. Come dice sempre Francesco Lamendola nell'articolo già citato (vedi nota 1 nella pagina 1) «si ricordi che, per la mentalità greca, ha natura più nobile ciò che non deve soddisfare alcuna esigenza o necessità pratica,

riuscisse a decidersi se conviene dire che i mondi sono infiniti oppure limitati, potrebbe effettivamente ritenere che il pensarli di numero illimitato sia proprio di chi conosce in modo limitato ciò che occorre sapere senza limiti; mentre sul fatto che sia più conveniente affermare che esso è uno solo o siano stati veramente generati nel numero di cinque, chi ponesse tale dubbio, a buon diritto dubiterebbe. Noi suggeriamo che, secondo una ragione verosimile, ne sia stato generato uno solo; un altro, in base ad altre considerazioni, può pensarla in un altro modo. Ma lasciamo perdere questa questione, e le specie che ora si sono formate mediante il ragionamento distribuiamole nel fuoco, nella terra, nell'acqua e nell'aria. E alla terra assegnamo la figura cubica: fra le quattro specie, infatti, la terra è quella meno soggetta a movimento, e fra tutti i corpi è la più plasmabile, ed è assolutamente necessario che sia tale quel corpo che ha le basi più salde: fra i triangoli che abbiamo posto in principio, è per natura più salda la base di triangoli a lati uguali che quella di quelli a lati disuguali, e la figura piana, che è formata dall'una e dall'altra specie di triangoli, il tetragono equilatero, sia nelle parti, sia nel tutto, è inevitabilmente più stabile del triangolo equilatero.

Perciò assegnando questa forma alla terra, manteniamo un discorso verosimile, mentre all'acqua assegnamo la forma meno soggetta a movimento fra le altre, al fuoco la più mobile, all'aria quella intermedia: e attribuiamo il corpo più piccolo al fuoco, il più grande all'acqua, quello intermedio all'aria. E ancora il più acuto al fuoco, il secondo per acutezza all'aria, il terzo all'acqua. Fra tutte queste forme, allora, quella che ha il minor numero di basi è inevitabile sia la più soggetta a movimento, essendo fra tutte le altre la più tagliente e la più acuta in ogni sua parte, ed inoltre la più leggera, essendo formata dal minor numero delle medesime parti: e la seconda di queste forme ha tutte queste proprietà in secondo grado, e la terza le possiede in terzo grado. Secondo un ragionamento corretto e verosimile, la figura solida della piramide sia l'elemento e la semenza del fuoco, seconda per generazione diciamo che sia la figura dell'aria, terza quella dell'acqua. Tutte queste figure bisogna concepirle così piccole, che nessuna delle singole parti di ciascuna specie è visibile ai nostri occhi per la sua piccolezza, ma, se molte si riuniscono insieme, è possibile vedere le loro masse: per quanto riguarda le proporzioni relative ai numeri, ai movimenti e a tutte le altre proprietà, il dio, dopo aver realizzato in ogni parte alla perfezione queste cose, finché la natura della necessità si lasciava spontaneamente persuadere, le unì in proporzione ed armonia.

così come è più nobile il lavoro intellettuale, puro e disinteressato, di quanto non lo sia il lavoro manuale, finalizzato alla produzione di qualche bene o servizio».

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

2. Poliedri

Non è facile dare una definizione precisa e rigorosa di poliedro e noi qui sfioreremo solamente il problema. Una definizione comunemente data nei testi di geometria elementare è la seguente: *un poliedro è una regione limitata dello spazio il cui bordo è costituito da poligoni aventi a due a due al più uno spigolo o un vertice in comune*. Con questa definizione si comprendono però molti tipi di figure e se ne escludono invece altre e bisogna accordarsi su quali chiamare poliedri: si vedano, per esempio, le figure 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8, dove sono rappresentate alcune situazioni non elementari.

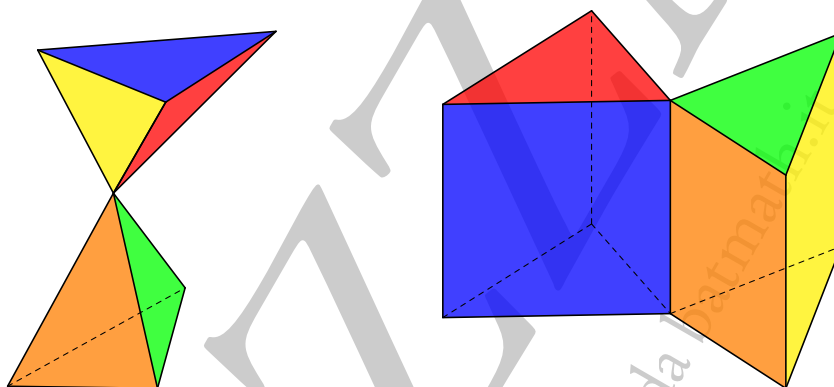


Figura 2.1.: Coppia di piramidi unite per il vertice e di prismi uniti per uno spigolo

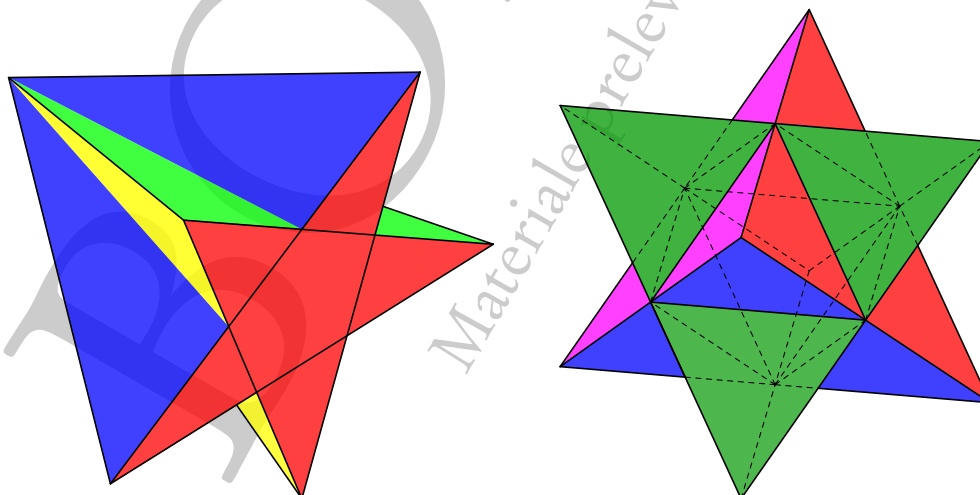


Figura 2.2.: Una piramide con pentagramma di base e una stella octangula

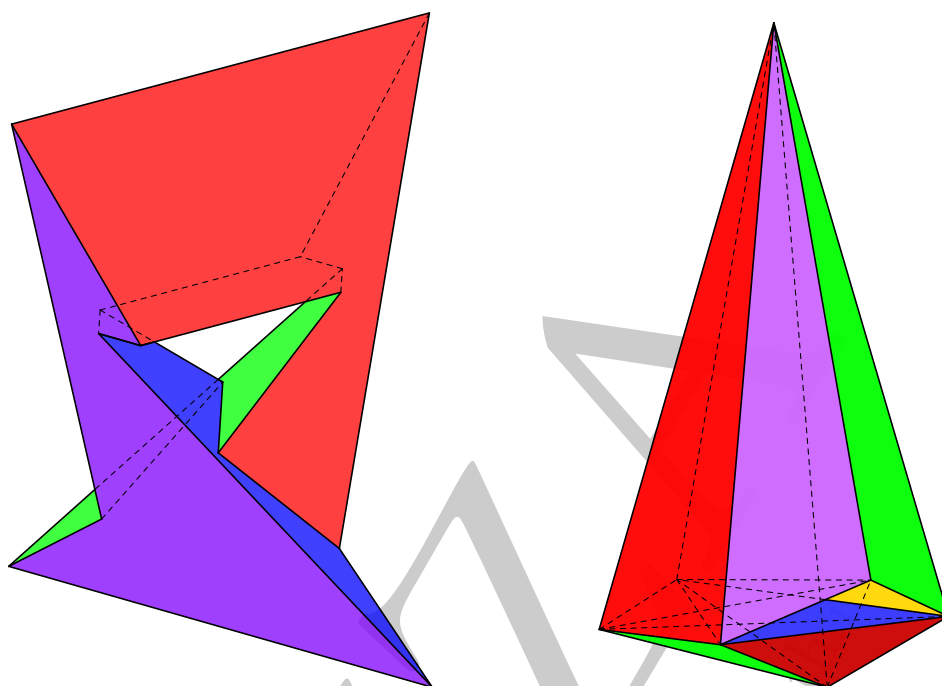


Figura 2.3.: I poliedri duali di Szilassi e Császár

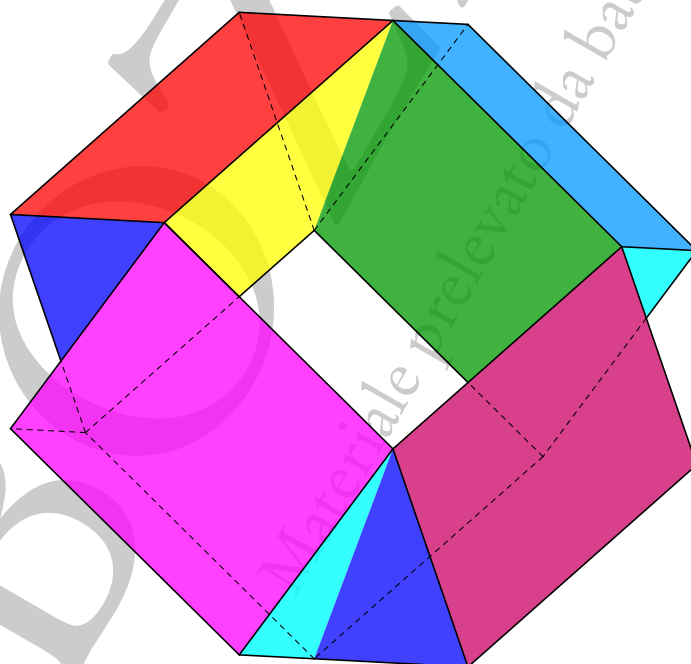


Figura 2.4.: Un poliedro di forma toroidale

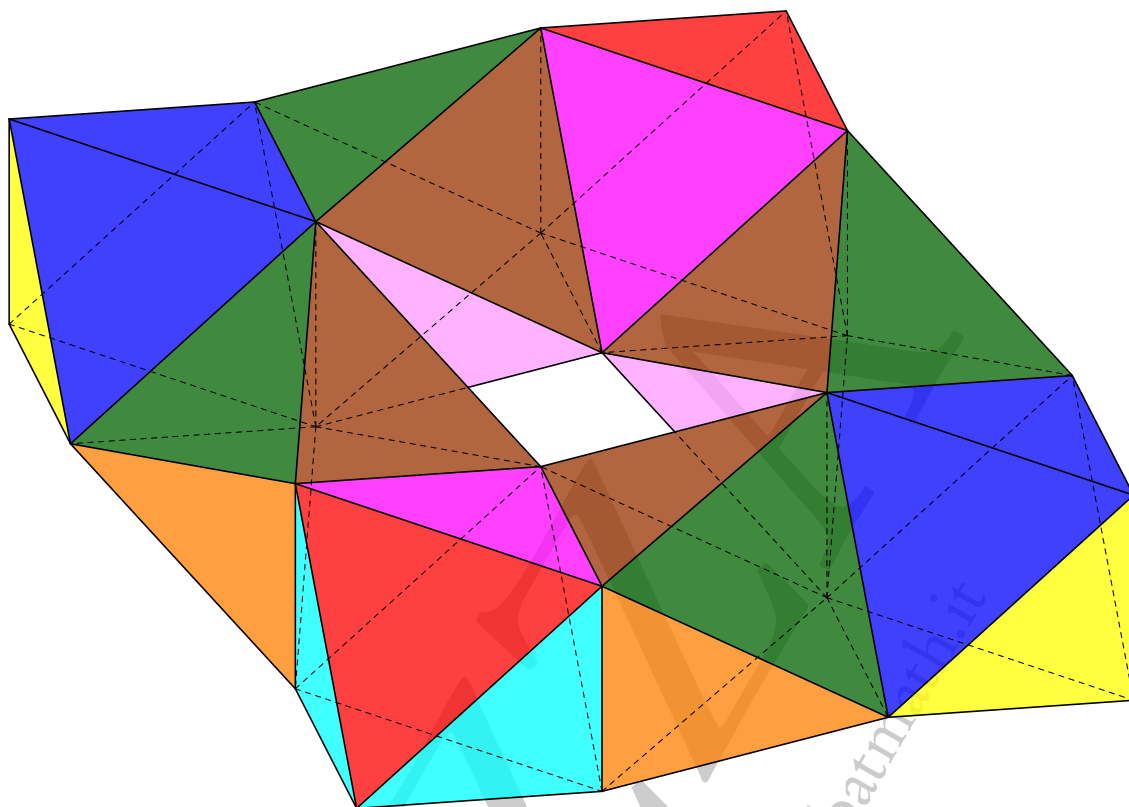


Figura 2.5.: *Un anello ottenuto incollando otto ottaedri regolari*

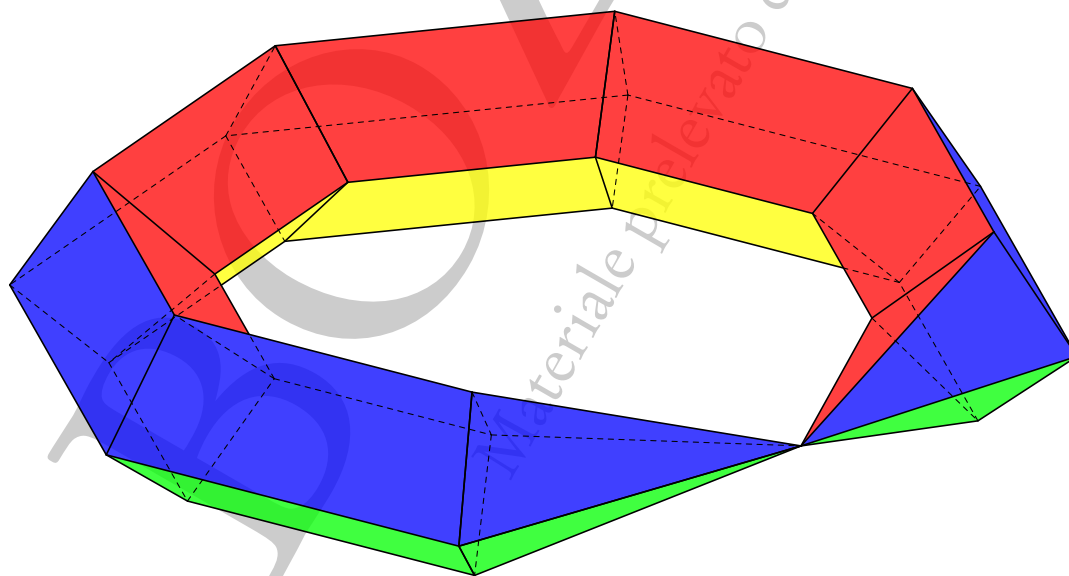


Figura 2.6.: *Un anello con prismi e piramidi*

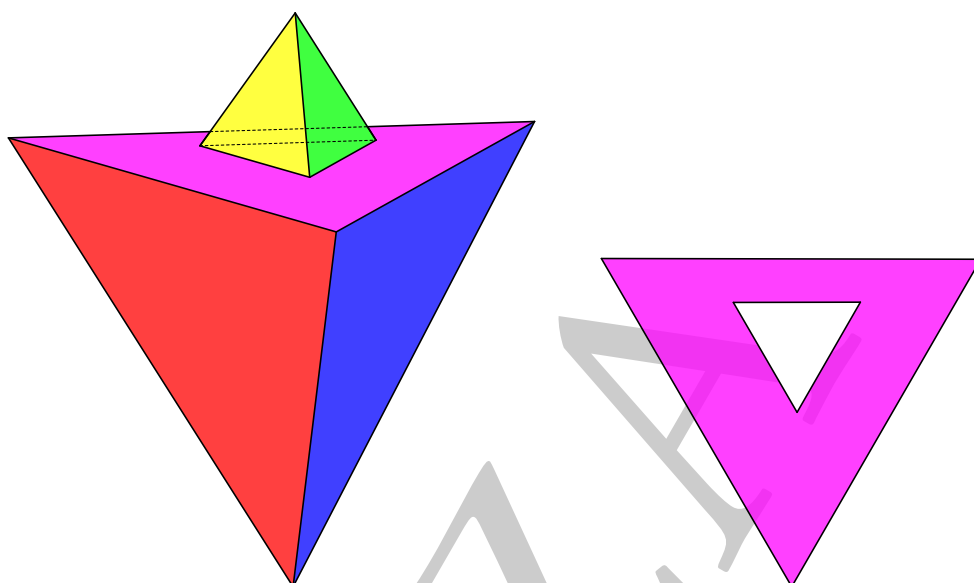


Figura 2.7.: Un solido costituito da due tetraedri sovrapposti, con il dettaglio di una delle facce

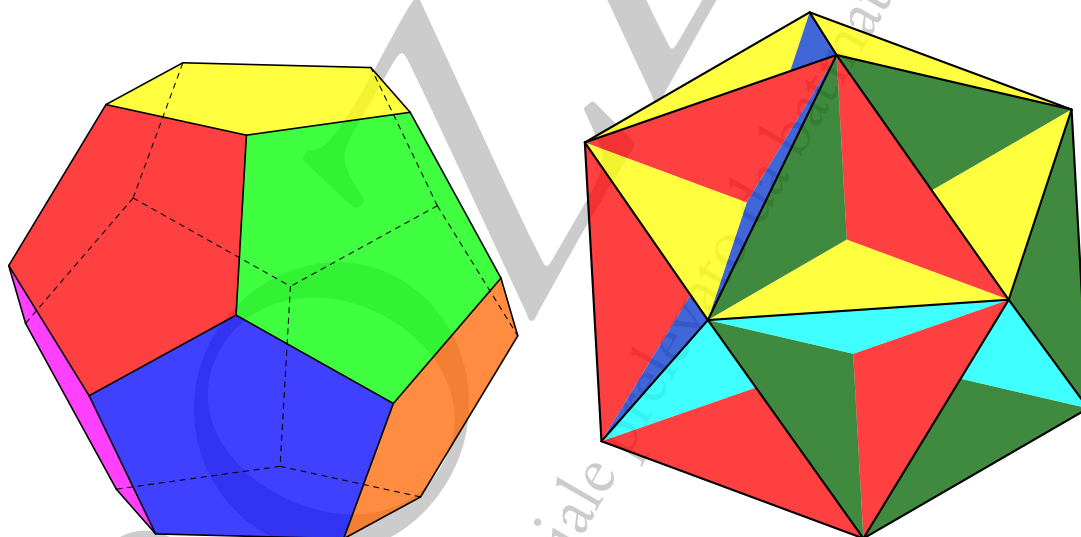


Figura 2.8.: Il dodecaedro e il grande dodecaedro

Dal momento che il concetto di poliedro è la naturale estensione allo spazio del concetto di poligono nel piano, occorrerebbe dare innanzitutto una definizione formale di poligono. Ebbene anche questa definizione non è per niente facile e ci accontentiamo della nozione intuitiva che tutti abbiamo.

Innanzitutto chiamiamo *spezzata* una linea piana costituita da un numero finito di segmenti a due a due consecutivi (ma non adiacenti). La spezzata si dice *non intrecciata* se i segmenti che la costituiscono hanno al massimo un estremo in comune, altrimenti si dice *intrecciata*. La spezzata si dice inoltre *chiusa* se il primo estremo del primo segmento coincide con il secondo estremo dell'ultimo segmento,

altrimenti si dice *aperta*. Una spezzata chiusa si chiama anche una *poligonale*. Una poligonale non intrecciata divide il piano in due parti⁽¹⁾, una interna (limitata) e una esterna (illimitata): quella limitata si chiama *poligono*. I segmenti della spezzata si chiamano *lati* del poligono, gli estremi dei segmenti si chiamano *vertici* del poligono. Spesso si usa il nome di poligono indifferentemente sia per indicare la poligonale (che ne costituisce il bordo) che la superficie piana delimitata. Nel caso di una poligonale intrecciata non è facile individuare una parte interna e una esterna: in questi casi si usa normalmente la locuzione poligono per indicare la poligonale (cioè la linea di dimensione 1 e non una superficie di dimensione 2). In ogni caso una porzione di piano come quella di destra della figura 2.7 non rientra tra i poligoni.

Passiamo ora allo spazio, dove naturalmente le cose si fanno più complicate e cominciamo con il dare la definizione di *superficie poliedrale*. Tra le varie definizioni possibili una delle più comuni è la seguente [vedi 19].

Definizione 2.1. *Si dice superficie poliedrale l'unione di un numero finito di poligoni (detti facce e i cui lati sono detti spigoli) in modo che siano soddisfatte le seguenti condizioni:*

1. *l'intersezione di due facce, se non è vuota, è o uno spigolo o un vertice comune alle due facce;*
2. *ogni spigolo appartiene ad esattamente due facce;*
3. *due facce adiacenti (cioè aventi uno spigolo in comune) non sono complanari;*
4. *fissato un qualunque vertice e due facce che hanno quel vertice in comune, è possibile passare da una faccia all'altra percorrendo una catena di facce adiacenti e che abbiano quel vertice in comune.*

Anche per questo tipo di superfici vale il teorema di Jordan e lo spazio risulta diviso in due regioni una limitata e una illimitata: quella limitata è detta *poliedro*. Come già per i poligoni si usa normalmente la locuzione poliedro sia per indicare il solido che la superficie poliedrale.

Seguendo questa definizione non risultano essere poliedri i seguenti solidi delle figure precedenti.

- i due solidi della figura 2.1: nel primo manca la proprietà 4, nel secondo la 2;
- il solido di sinistra della figura 2.2 e i due solidi della figura 2.3: le facce si intersecano anche in segmenti che non sono spigoli;
- il solido della figura 2.4: le facce si intersecano anche in segmenti che non sono spigoli oppure, visto diversamente, ci sono spigoli comuni a più di due facce;
- il solido della figura 2.6: manca la proprietà 4;
- il solido della figura 2.7: una faccia non è un poligono;
- il grande dodecaedro della figura 2.8: le facce si intersecano anche in segmenti che non sono spigoli.

Tuttavia questa definizione è troppo restrittiva per i nostri scopi e nel seguito useremo la locuzione poliedro anche per i solidi tipo la piramide con pentagramma di base, i poliedri di Szilassi e Császár e il grande dodecaedro. Resteranno esclusi quelli della figura 2.1, quello della figura 2.6 e le due piramidi sovrapposte della figura 2.7, anche se qualcuno considera pure situazioni di questo tipo.

Non daremo però una definizione rigorosa che comprenda tutti i casi, accontentandoci dell'idea intuitiva che si verrà anche mano a mano precisando con le costruzioni che faremo.

Ci interesseranno però alcune caratteristiche speciali che esamineremo più in dettaglio nel seguito e di cui qui facciamo un breve cenno, unitamente ad un po' di nomenclatura che ci tornerà utile.

¹Questo risultato apparentemente banale è in realtà di difficile dimostrazione ed è in sostanza contenuto nel *Teorema della curva di Jordan*.

Innanzitutto un poliedro si dice *convesso* se, presi comunque due punti del poliedro, il segmento che li congiunge è interamente contenuto nel poliedro. Alternativamente si può dire che il piano che contiene una qualunque faccia del poliedro lascia lo stesso in uno solo dei due semispazi individuati dal piano. Dei solidi rappresentati nelle figure precedenti solo il dodecaedro è convesso.

Un poliedro si dice *semplicemente connesso* se non “ha buchi”, ovvero (anche se non è la definizione più formale possibile) se una qualunque curva tracciata all'interno del poliedro può essere deformata senza strappi in un punto che rimane nel poliedro. I solidi delle figure 2.3, 2.4, 2.5, 2.6 non sono solidi semplicemente connessi. È interessante, a questo proposito, il solido della figura 2.7 che risulta un solido semplicemente connesso, nonostante una delle sue facce non lo sia, e anzi è proprio per questo motivo che lo abbiamo inserito nella galleria di immagini. Si ricordi comunque che, abitualmente, un solido di questo tipo non è ritenuto un poliedro.

Nei vertici di un poliedro concorrono almeno tre spigoli: si chiama *valenza* di un vertice il numero degli spigoli (o, equivalentemente, delle facce) che vi concorrono.

Considerato un vertice di un poliedro e gli spigoli che vi concorrono, possiamo considerare i punti medi di questi spigoli: le poligonali che si ottengono congiungendo questi punti medi si chiamano *figure al vertice*: queste poligonali potrebbero anche non essere piane e quindi potrebbero non individuare un poligono; per esempio nel poliedro a sei facce triangolari della figura 2.9 la poligonale ABCD ha quattro lati che non stanno su un piano. Nei poliedri regolari e semiregolari, come vedremo, le figure al vertice sono invece sempre piane. È chiaro che se in un vertice concorrono tre lati, le corrispondenti figure al vertice sono piane perché per tre punti (non allineati, come sicuramente succede per i poliedri) passa sempre un piano (ed uno solo).

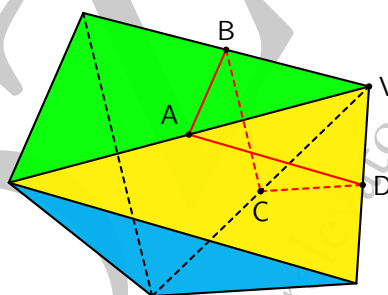


Figura 2.9.: Una figura al vertice costituita da una poligonale non piana

Purtroppo in alcuni testi le figure al vertice sono definite come figure ottenute per troncatura di un poliedro “vicino a un vertice” con un piano: si tratta di una definizione che produce un concetto di poco interesse.

Per quanto riguarda i poliedri (in senso stretto, cioè secondo la definizione che ne abbiamo dato), il risultato più importante è contenuto nel teorema seguente, dovuto ad Eulero, ma forse intuito anche da Cartesio:

Teorema 2.2 (di Eulero). *Se V è il numero dei vertici di un poliedro semplicemente connesso, S il numero degli spigoli e F il numero delle facce, vale la relazione*

$$V - S + F = 2.$$

3. I poliedri regolari

3.1. Introduzione

Cominciamo con il dare una definizione sufficientemente formale e precisa di che cosa sia un poliedro regolare.

Definizione 3.1. *Un poliedro convesso si dice regolare se:*

1. *tutte le facce sono poligoni regolari;*
2. *tutte le facce sono uguali tra loro;*
3. *tutte le figure al vertice sono uguali tra loro;*
4. *tutte le figure al vertice sono poligoni regolari.*

In realtà queste condizioni sono sovrabbondanti: tre di esse sarebbero sufficienti, con l'eccezione della prima e della quarta che, da sole, sarebbero sufficienti.

Proponiamo qui di seguito alcune immagini di poliedri in cui, mancando qualcuna di queste condizioni, si ottiene un poliedro non regolare.

Un primo esempio si ottiene unendo per una delle facce due tetraedri regolari (quattro facce costituite da triangoli equilateri). Si ottiene un poliedro con sei facce tutte costituite da triangoli equilateri uguali tra di loro: non è però un poligono regolare perché le figure al vertice, come mostra la seconda immagine della figura 3.1, non sono uguali tra di loro. Detto in altri termini i vertici non sono tutti *equivalenti*, ovvero giocano un ruolo diverso nel poliedro: in alcuni concorrono tre spigoli, in altri quattro. Sono dunque verificate solo le condizioni 1 e 2.

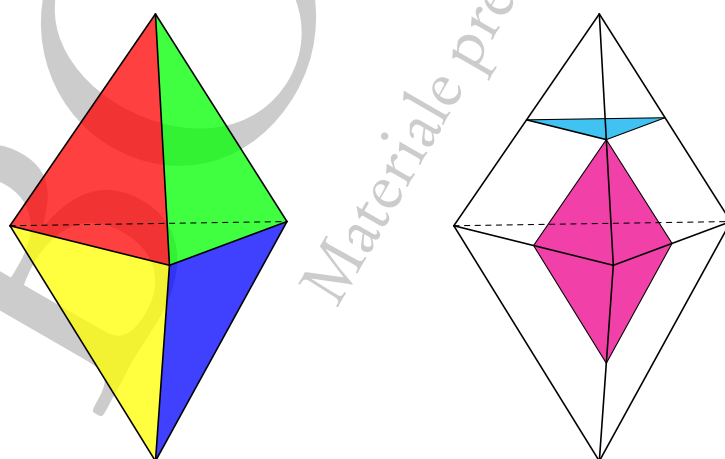


Figura 3.1.: Poliedro non regolare con sei facce triangolari equilateri e particolare di alcune figure al vertice

Un secondo esempio è costituito da uno dei poliedri di Archimede, precisamente dal *cubottaedro*, vedi la figura 3.2, di cui ci occuperemo ancora nel seguito. In questo caso le facce sono otto triangoli equilateri e sei quadrati (cioè poligoni regolari ma non tutti uguali tra loro), mentre le figure al vertice sono rettangoli uguali tra loro (ma non sono poligoni regolari). Sono dunque verificate solo le condizioni 1 e 3.

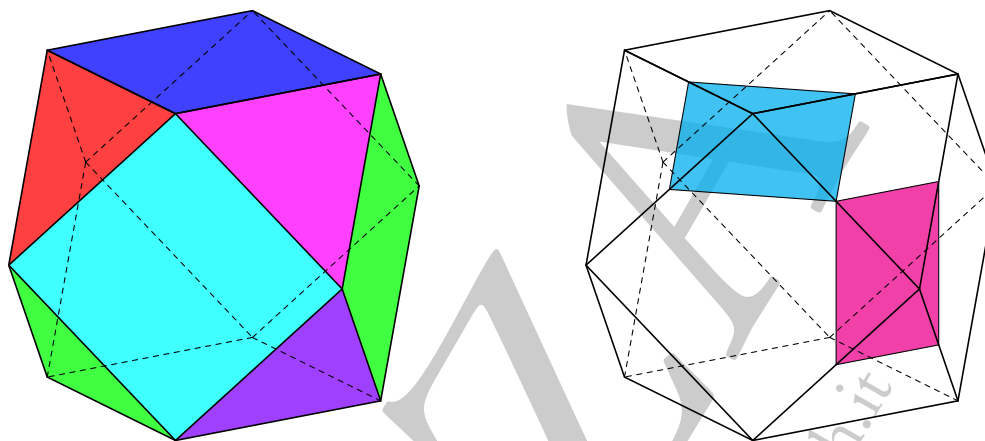


Figura 3.2.: Il cubottaedro, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare

Un altro esempio è costituito da uno dei solidi di Catalan, precisamente il *dodecaedro rombico*, vedi la figura 3.3, di cui ci occuperemo nel seguito. In questo caso le dodici facce sono tutte uguali, ma sono rombi, quindi non poligoni regolari, e le figure al vertice sono triangoli equilateri o quadrati, cioè poligoni regolari, ma non tutti uguali tra loro. Sono dunque verificate solo le condizioni 2 e 4.

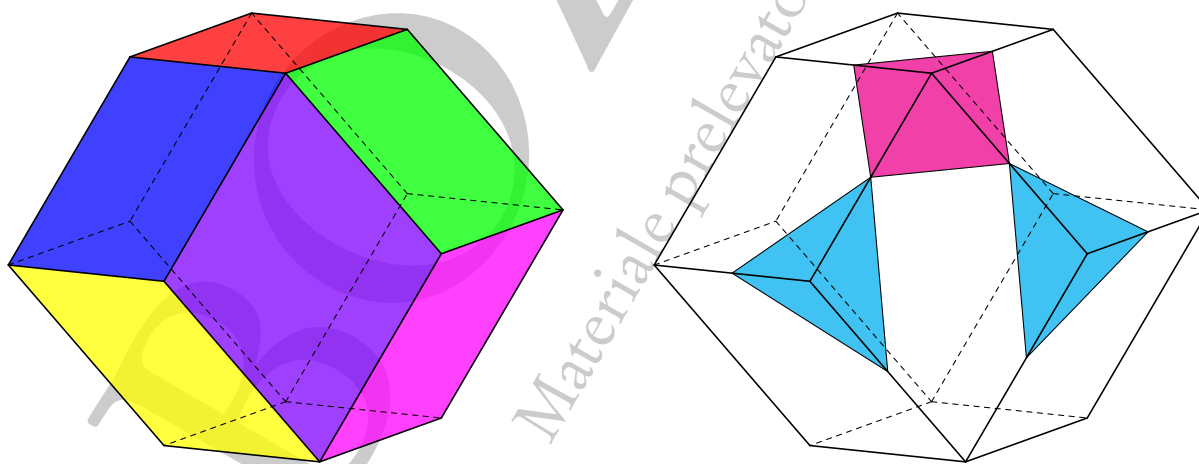


Figura 3.3.: Il dodecaedro rombico, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare

Successivamente consideriamo un prisma a base esagonale regolare, si veda la figura 3.4, con le facce laterali rettangolari, dunque poligoni non regolari, ma di altezza tale che le figure al vertice siano triangoli equilateri tutti tra di loro uguali. Sono dunque verificate solo le condizioni 3 e 4.

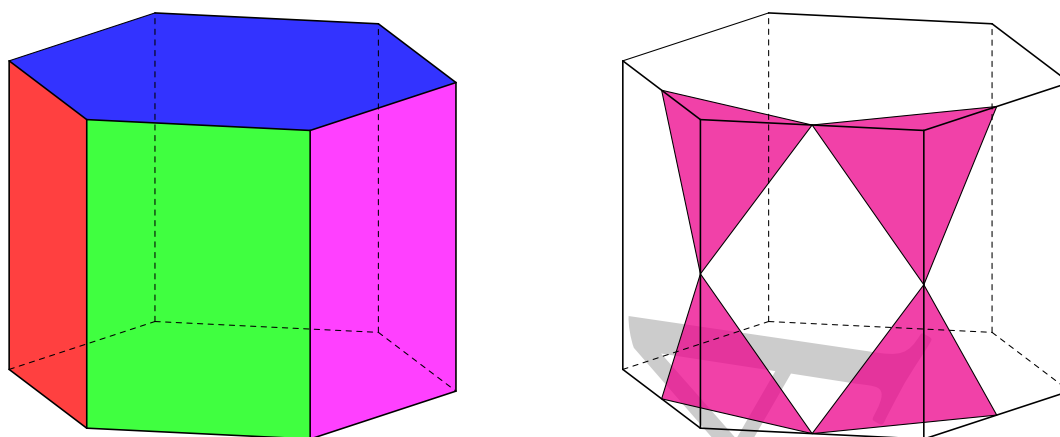


Figura 3.4.: Un prisma a base esagonale, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare

Infine consideriamo un tetraedro con quattro triangoli isosceli identici come facce, vedi la figura 3.5. Le facce, pur tra di loro uguali, non sono poligoni regolari. Le figure al vertice sono anch'esse triangoli isosceli identici, ma non sono poligoni regolari. Sono dunque verificate solo le condizioni 2 e 3.

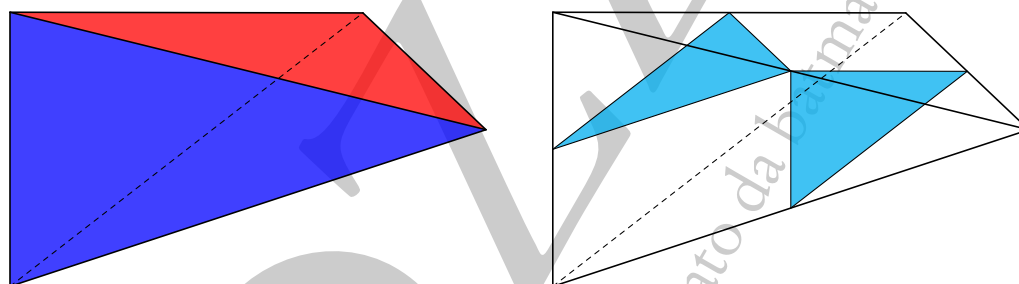


Figura 3.5.: Un tetraedro con facce a triangolo isoscele, con particolare di alcune figure al vertice: poliedro non regolare

In sostanza la definizione di poliedro regolare comporta che essi sono dei poliedri che presentano il massimo possibile di simmetrie: sia i vertici, sia gli spigoli, sia le facce sono indistinguibili rispetto all'azione del corrispondente gruppo di simmetria.

Il risultato fondamentale sui poliedri regolari è espresso dal seguente teorema, già intuito dai geometri greci precedenti Euclide, e poi formalizzato proprio da Euclide.

Teorema 3.2. *I poliedri regolari convessi sono esattamente cinque: il tetraedro (quattro facce triangolari), l'ottaedro (otto facce triangolari), l'icosaedro (venti facce triangolari), il cubo o esaedro (sei facce quadrate) e il dodecaedro (dodici facce pentagonali).*

Una dimostrazione elementare (anche se non completamente formale) che i poliedri siano al massimo cinque è basata sul seguente ragionamento. In uno spigolo devono convergere almeno tre facce per poter formare un angolo solido. Se le facce sono triangoli (equilateri) ciascuna avrà un angolo di 60° e quindi ne potrà avere tre (per un totale di 180°), quattro (per un totale di 240°) o cinque (per un totale di 300°), mentre con sei arriverei a 360° e quindi le sei facce sarebbero sullo stesso piano. Se le facce sono

quadrati, quindi con angoli di 90° , ne posso avere al massimo tre (per un totale di 270°), mentre già con quattro le facce sarebbero sullo stesso piano. Se le facce sono pentagoni⁽¹⁾, quindi con angoli di 108° , non si possono avere più di tre facce per spigolo (per un totale di 324°). Con esagoni la costruzione è impossibile, in quanto essi hanno angoli di 120° e quindi già con tre le facce si disporrebbero su un piano.

Questo ragionamento non prova che poi questi cinque poliedri esistano effettivamente, ma, come ben sappiamo, essi sono invece tutti costruibili e li esamineremo in dettaglio nelle pagine seguenti.

Come abbiamo già visto questi solidi sono stati descritti in dettaglio da Platone e per questo motivo sono noti con il nome di *Solidi Platonici*.

Per concludere questa introduzione riepiloghiamo le caratteristiche dei solidi platonici relativamente a vertici, spigoli e facce.

	Vertici	Spigoli	Facce
Tetraedro	4	6	4
Cubo	8	12	6
Ottaedro	6	12	8
Dodecaedro	20	30	12
Icosaedro	12	30	20

3.2. I cinque poliedri regolari

I cinque solidi platonici possono essere tutti inscritti e circoscritti a una sfera. Le figure che seguono illustrano i solidi e queste sfere. Esiste inoltre un'ulteriore sfera, intermedia alle due precedenti, tangente a tutti gli spigoli dei poliedri e che chiameremo *intersfera*: per il tetraedro, il cubo e l'ottaedro proponiamo anche l'illustrazione di questa sfera. Proponiamo inoltre, per ciascuno dei solidi, uno dei possibili sviluppi piani e la visualizzazione del percorso per la loro realizzazione.

3.2.1. Il tetraedro

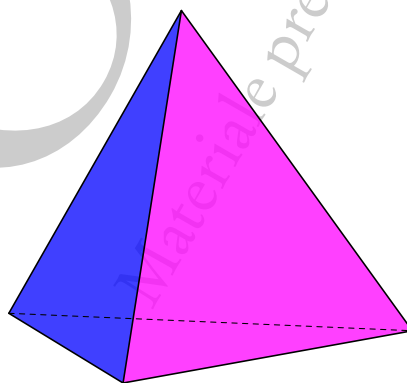


Figura 3.6.: *Il tetraedro regolare*

¹Ricordiamo che in un poligono convesso di n lati la somma degli angoli interni è $(n - 2)180^\circ$.

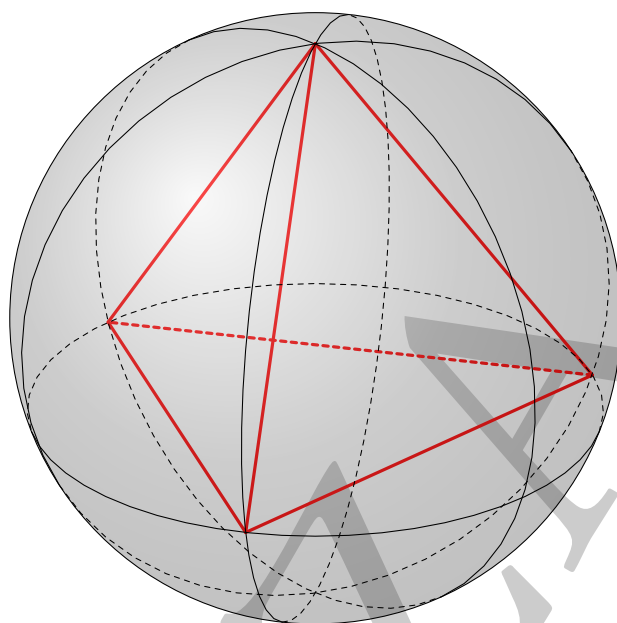


Figura 3.7.: Il tetraedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani sferici passanti per due dei quattro vertici del tetraedro e il parallelo passante per tre dei quattro vertici

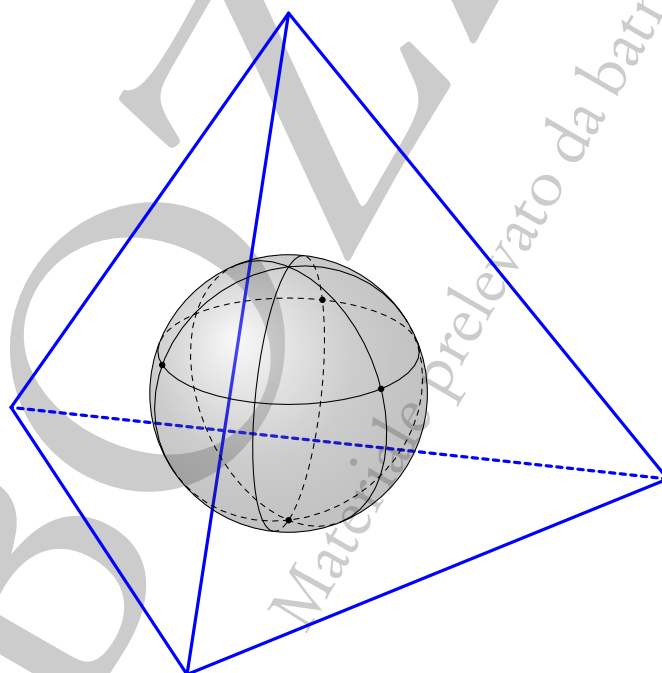


Figura 3.8.: Il tetraedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i quattro punti di tangenza della sfera con le facce del tetraedro, i meridiani sferici passanti per due e il parallelo passante per tre di questi quattro punti.

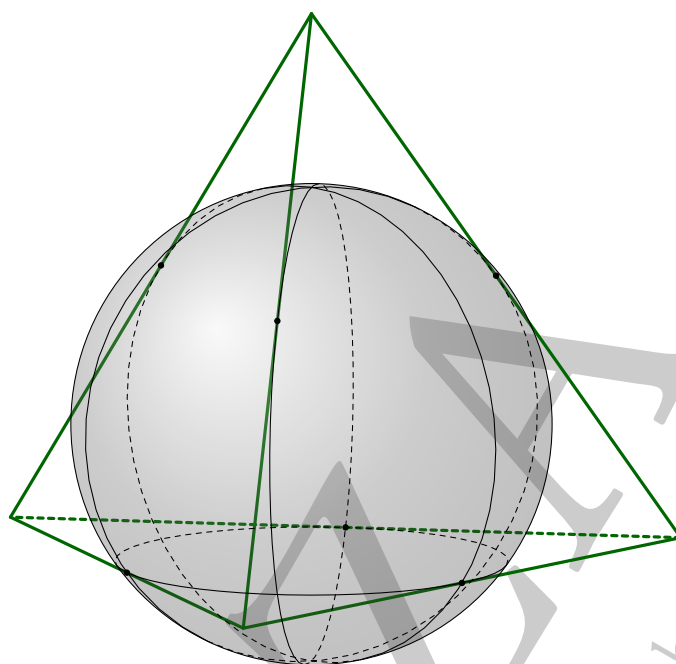


Figura 3.9.: Il tetraedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i tre meridiani tangenti a uno spigolo e il parallelo tangente a tre spigoli

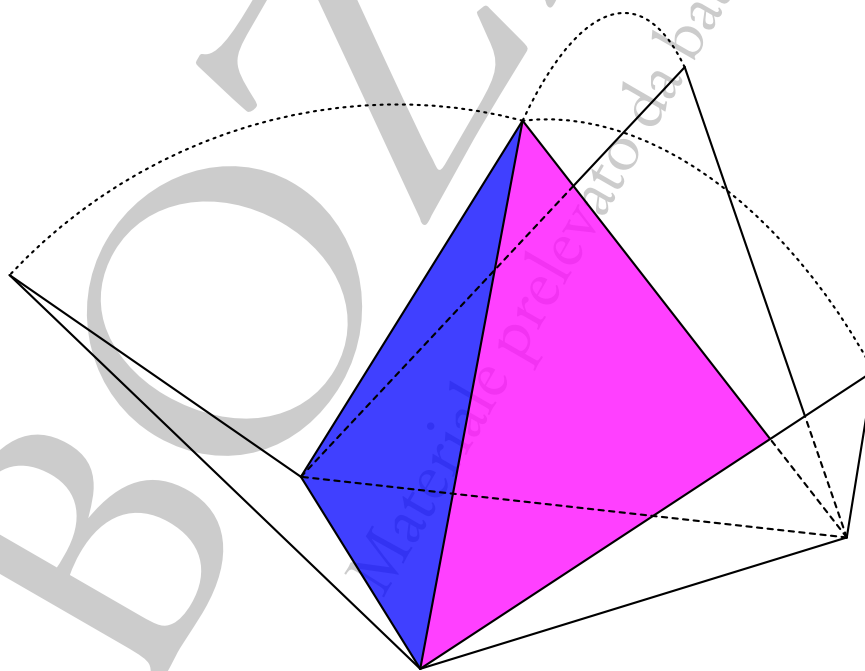


Figura 3.10.: Lo sviluppo piano più comune del tetraedro: passo intermedio

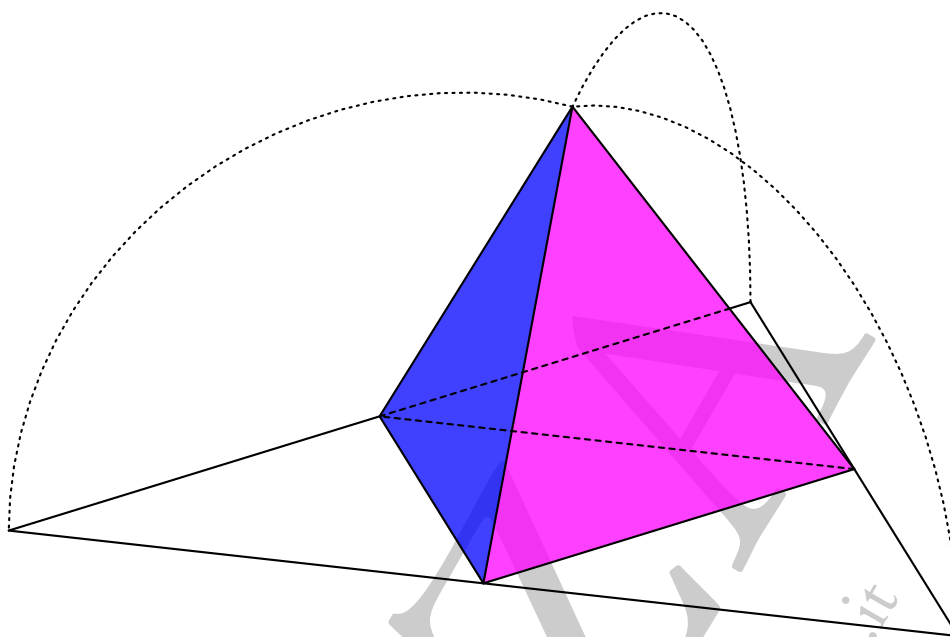


Figura 3.11.: *Sviluppo del tetraedro: passo finale in 3D*

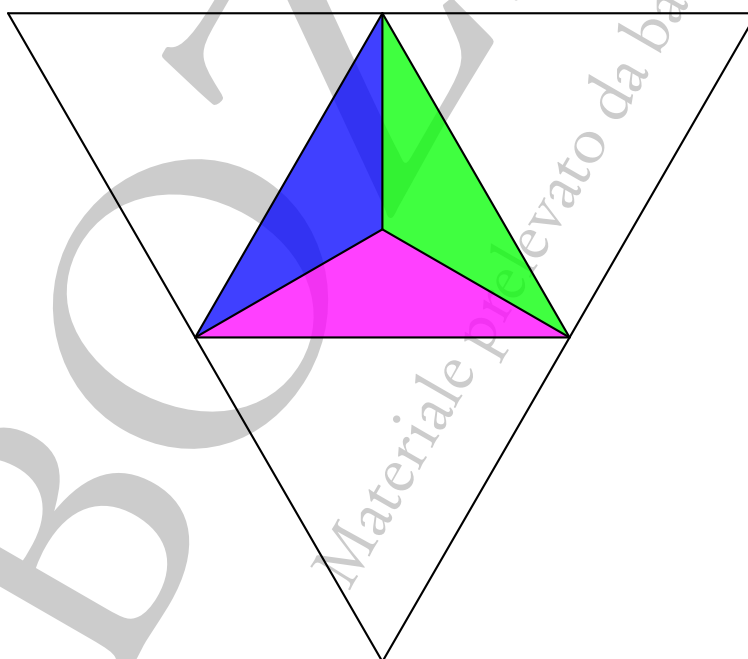
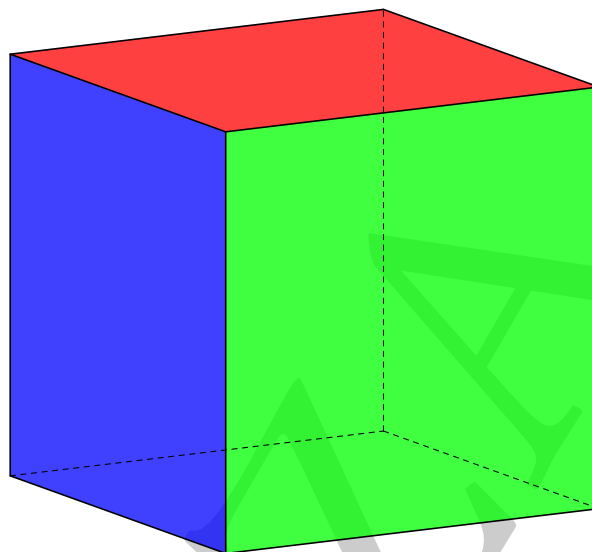
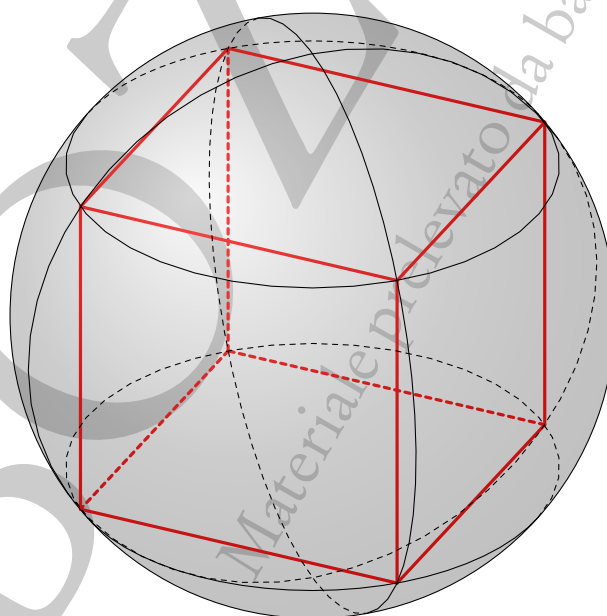


Figura 3.12.: *Sviluppo del tetraedro: proiezione 2D*

3.2.2. Il cubo o esaedro

Figura 3.13.: *Il cubo o esaedro regolare*Figura 3.14.: *Il cubo o esaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro degli otto vertici*

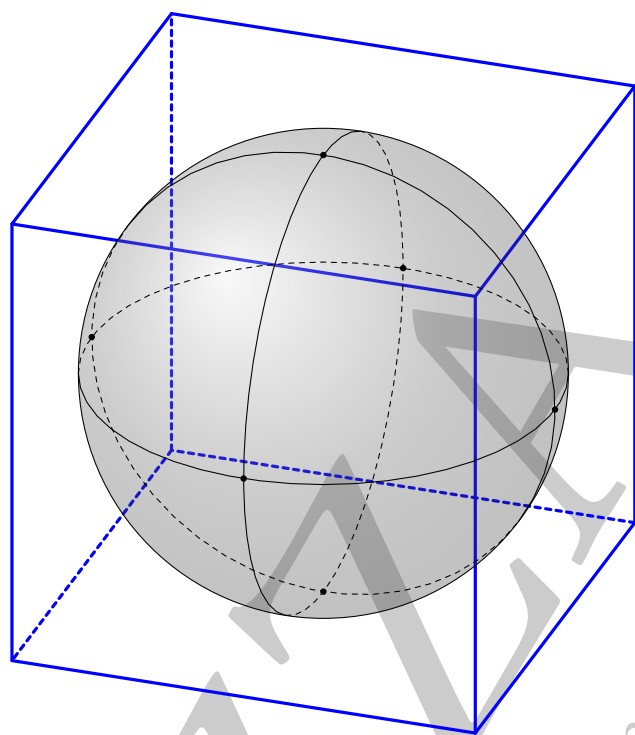


Figura 3.15.: Il cubo o esaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro dei sei punti di tangenza tra la sfera e le facce del cubo

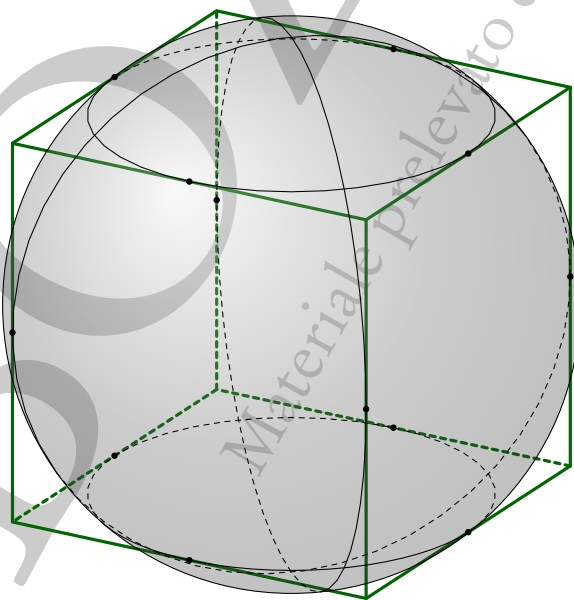


Figura 3.16.: Il cubo o esaedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i meridiani tangenti a due spigoli e i paralleli tangenti a quattro spigoli

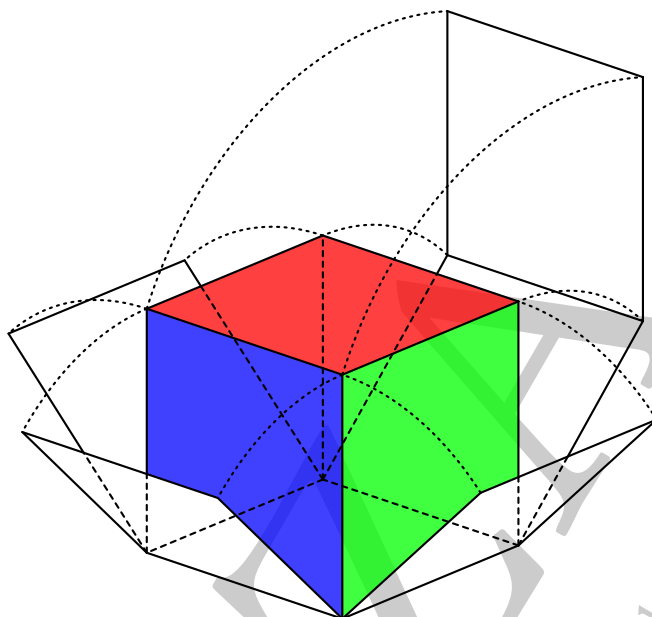


Figura 3.17.: Lo sviluppo piano più comune del cubo o esaedro: passo intermedio in 3D

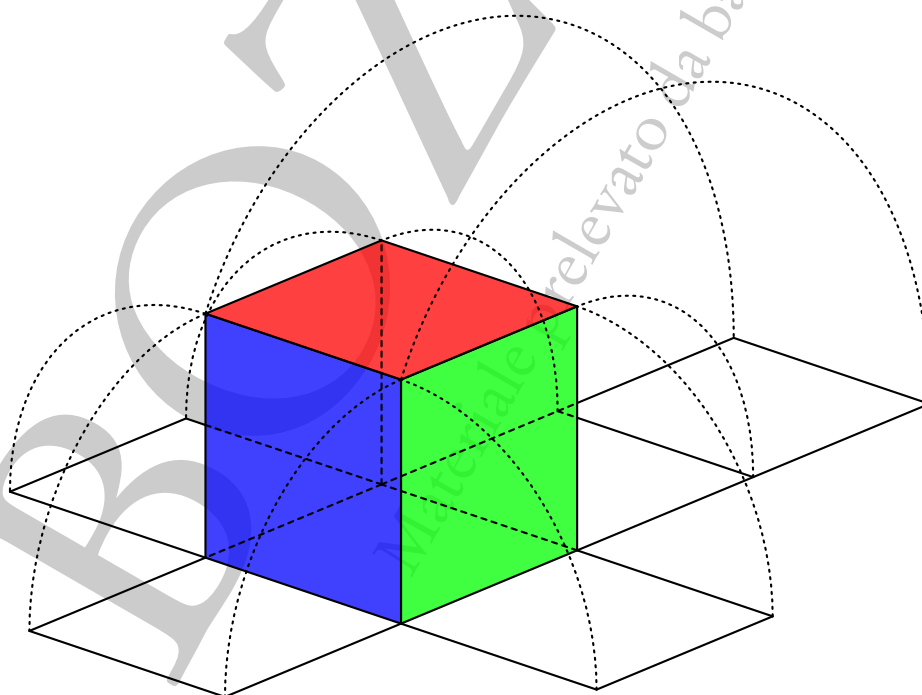


Figura 3.18.: Sviluppo del cubo o esaedro: passo finale in 3D

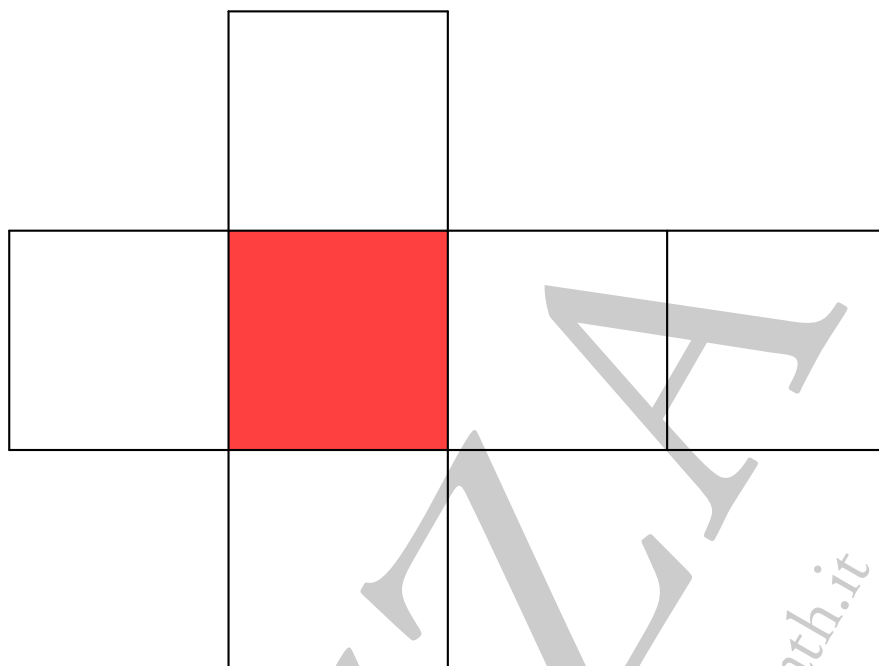


Figura 3.19.: *Sviluppo del cubo o esaedro: proiezione 2D*

3.2.3. L'ottaedro

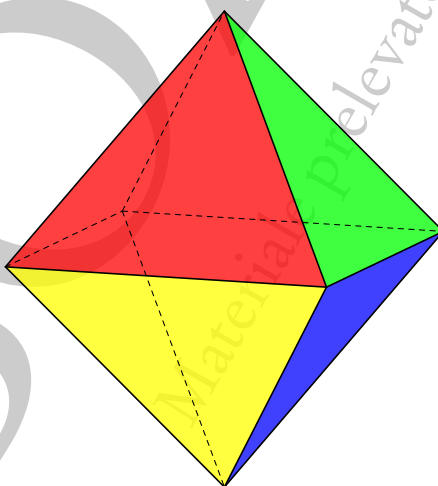


Figura 3.20.: *L'ottaedro regolare*

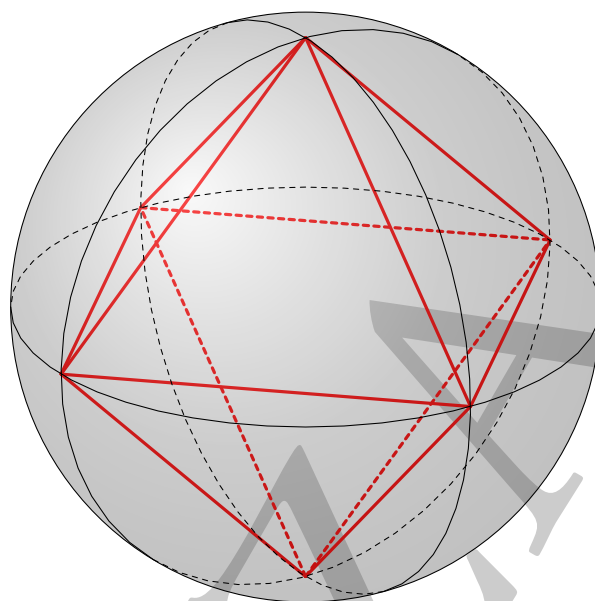


Figura 3.21.: *L'ottaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani e il parallelo passanti per quattro dei sei vertici*

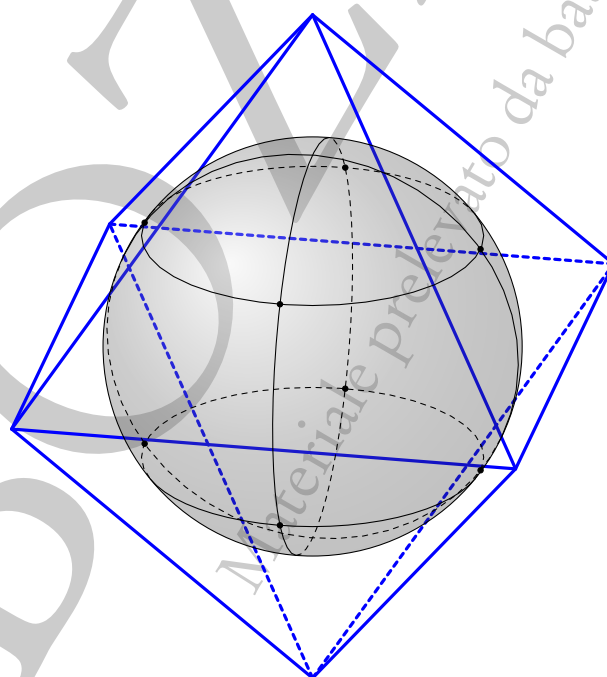


Figura 3.22.: *L'ottaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i meridiani e i paralleli passanti per quattro degli otto punti di tangenza*

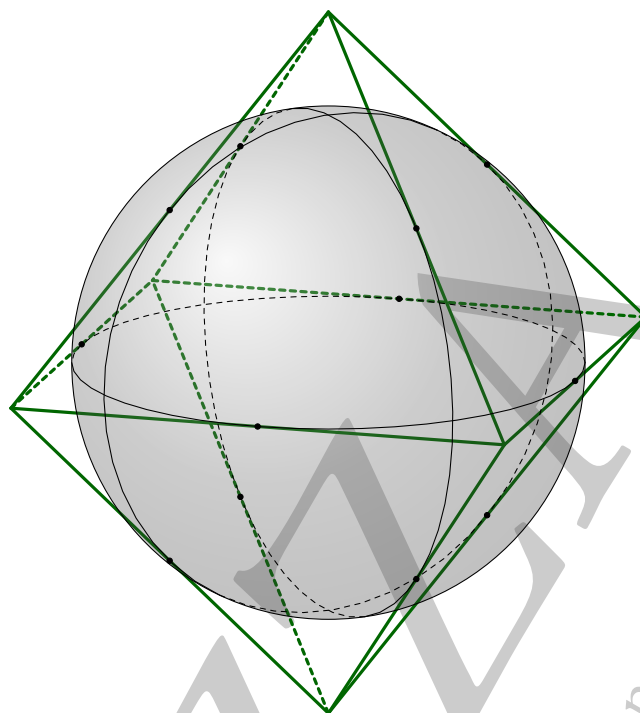


Figura 3.23.: L'ottaedro regolare e l'intersfera. Sono evidenziati i meridiani e il parallelo (equatore) tangenti a quattro spigoli

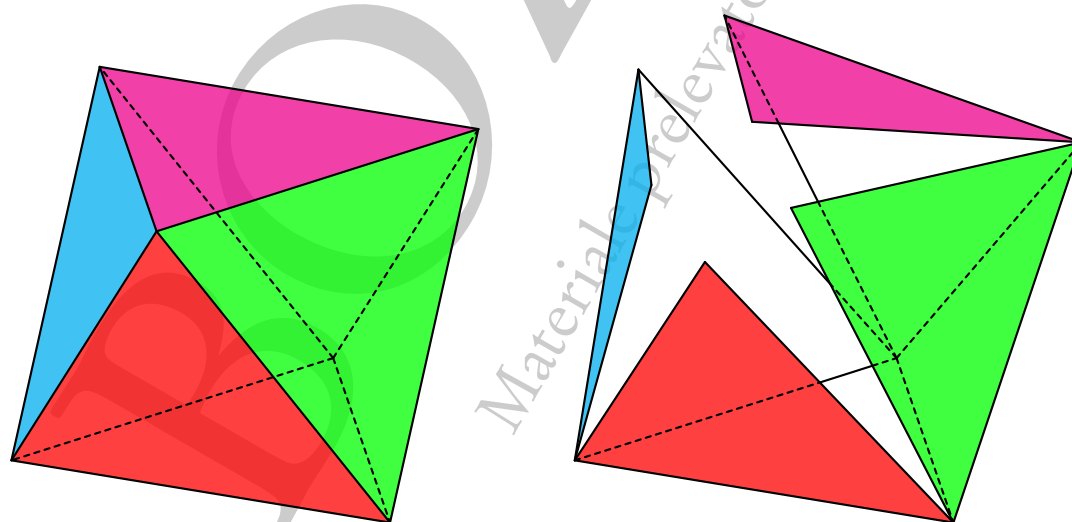


Figura 3.24.: Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo

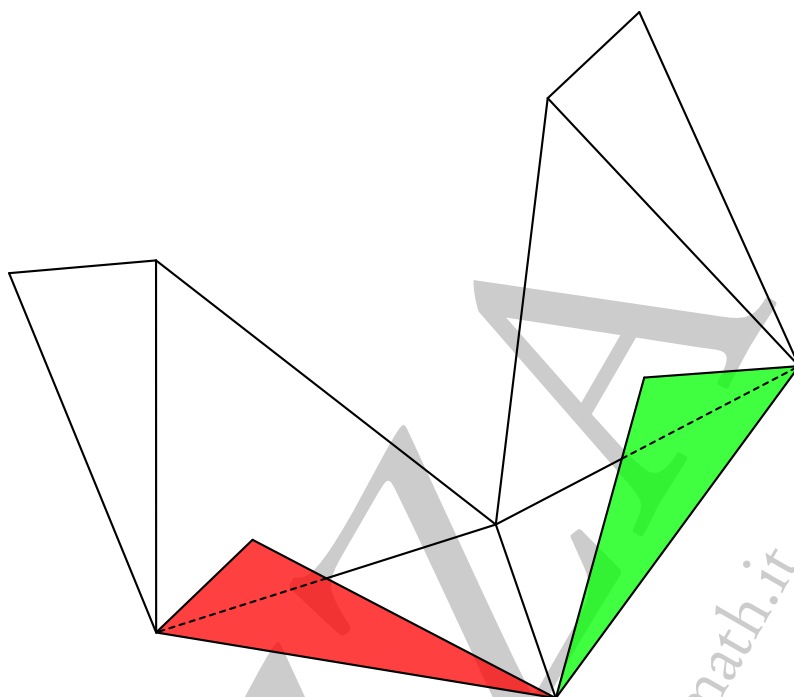


Figura 3.25.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: secondo passo nello sviluppo*

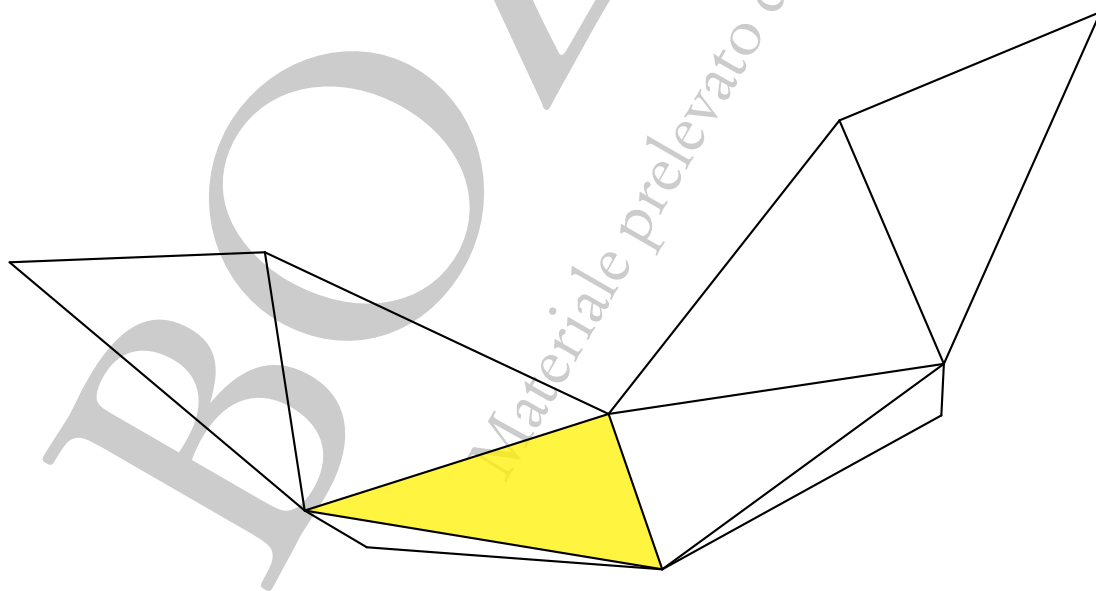


Figura 3.26.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: terzo passo nello sviluppo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo*

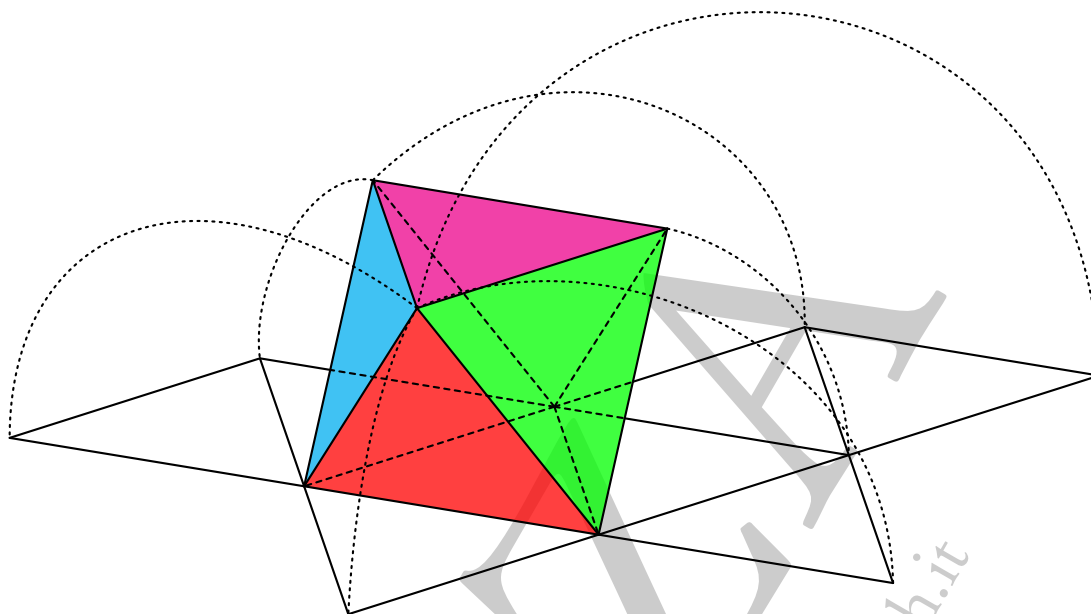


Figura 3.27.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: lo sviluppo completo in 3D*

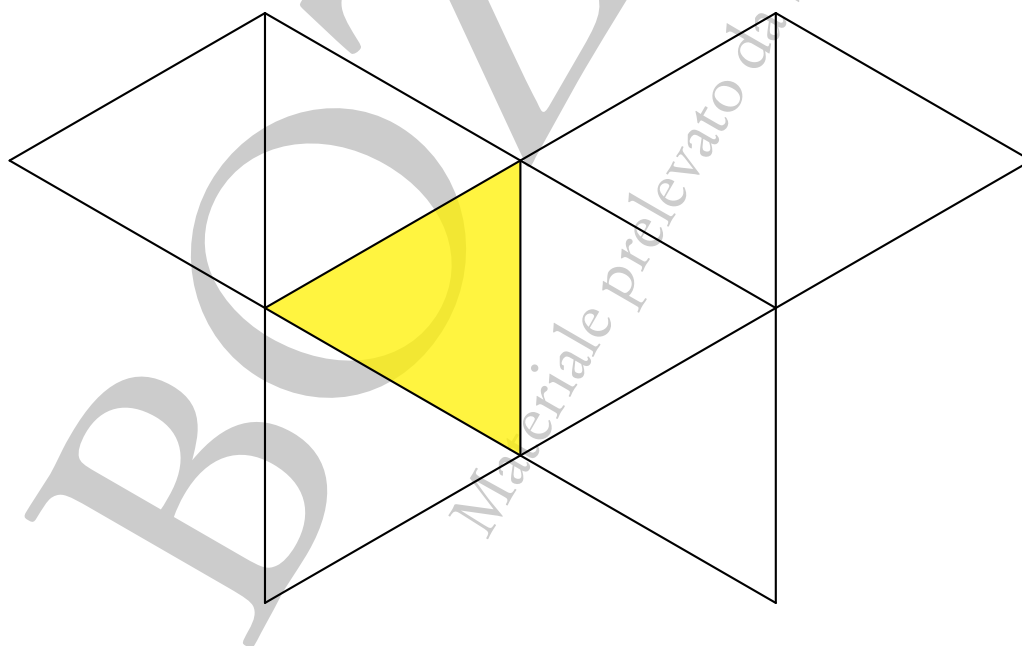
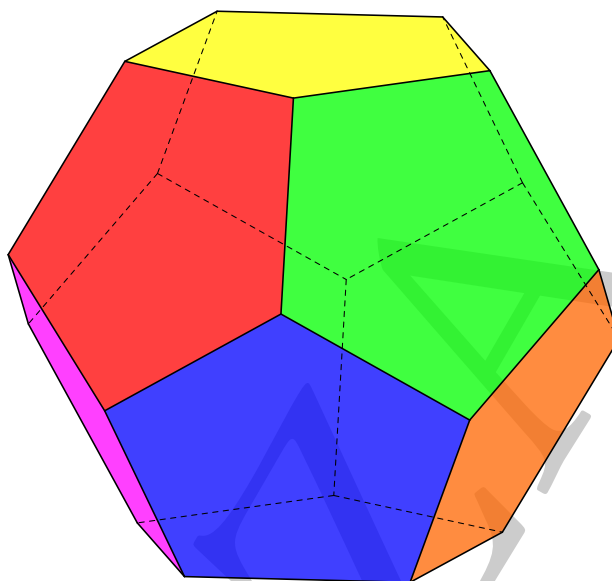
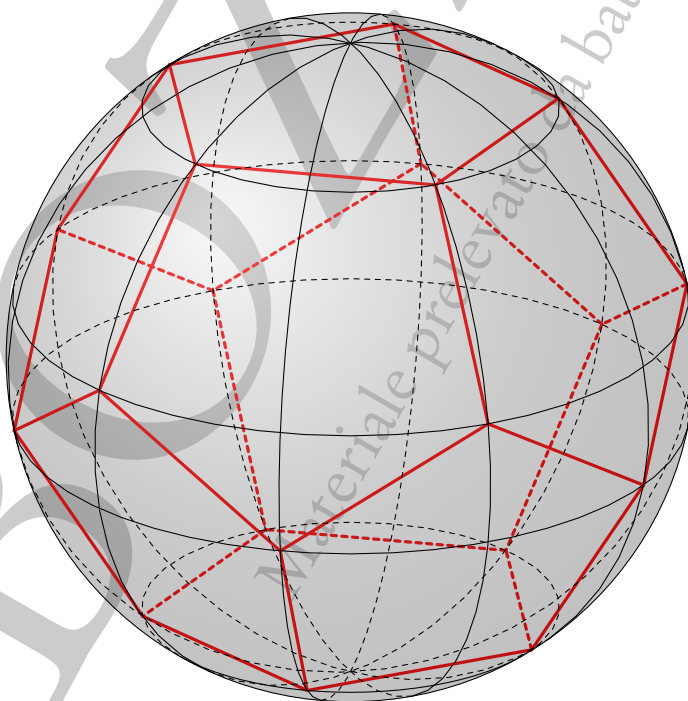


Figura 3.28.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'ottaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo*

3.2.4. Il dodecaedro

Figura 3.29.: *Il dodecaedro regolare*Figura 3.30.: *Il dodecaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i meridiani passanti per quattro dei venti vertici e i paralleli passanti per cinque dei venti vertici*

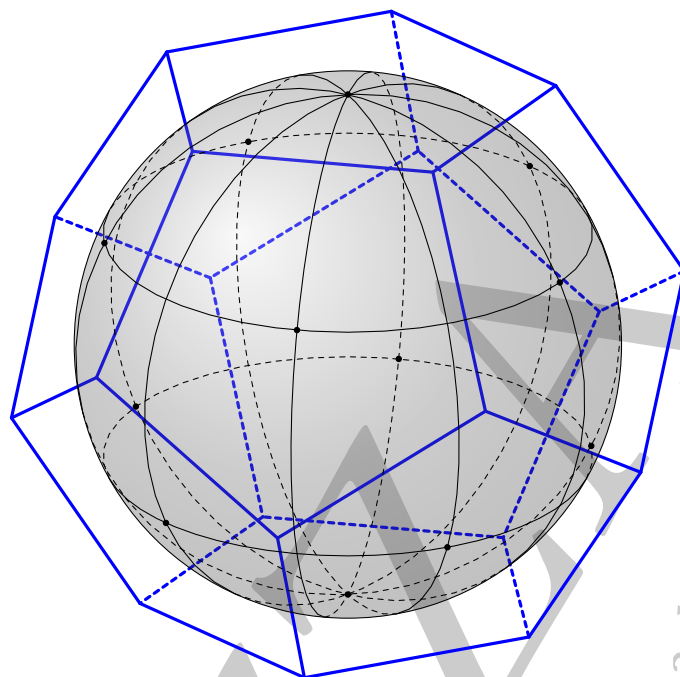


Figura 3.31.: Il dodecaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i punti di tangenza, i meridiani passanti per quattro e i paralleli passanti per cinque dei dodici punti di tangenza

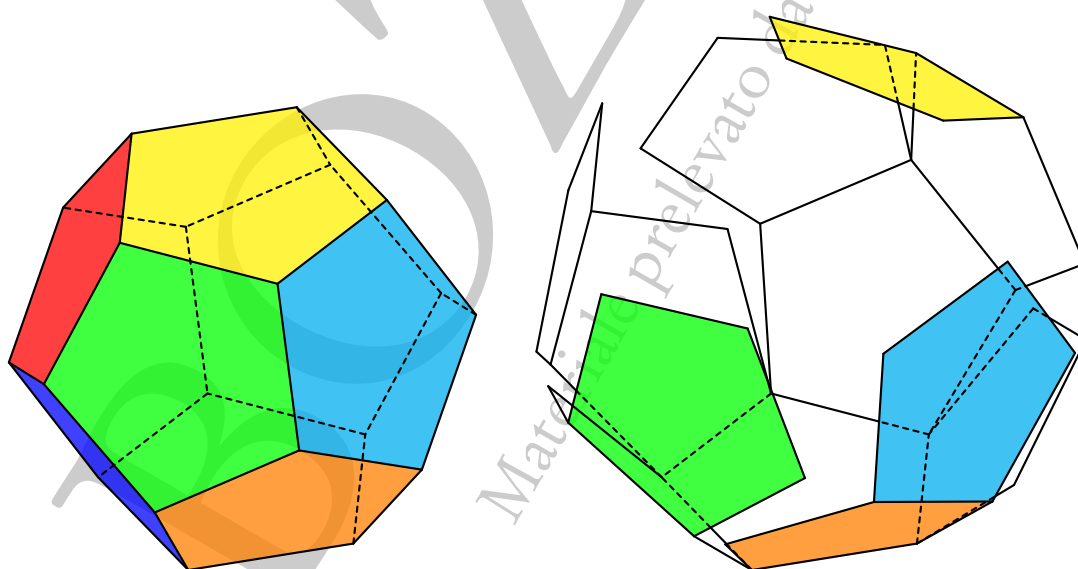


Figura 3.32.: Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo

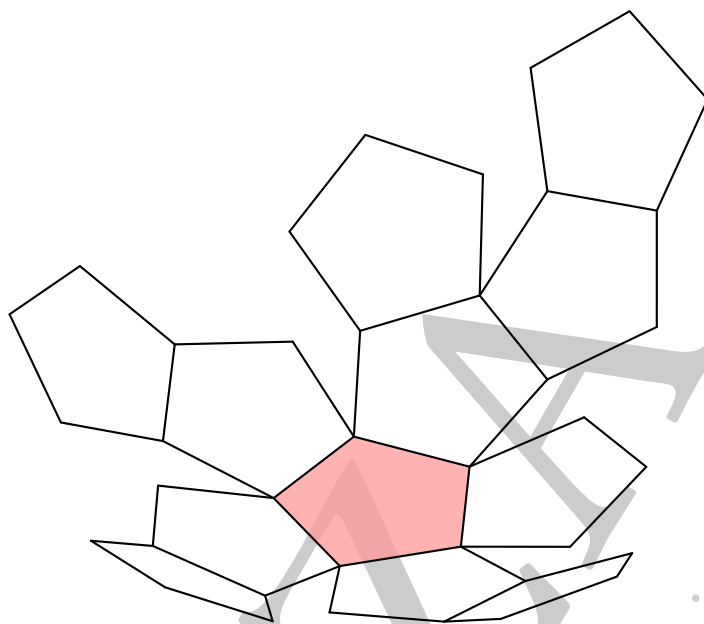


Figura 3.33.: *Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: secondo passo nello sviluppo. È evidenziato il pentagono base dello sviluppo*

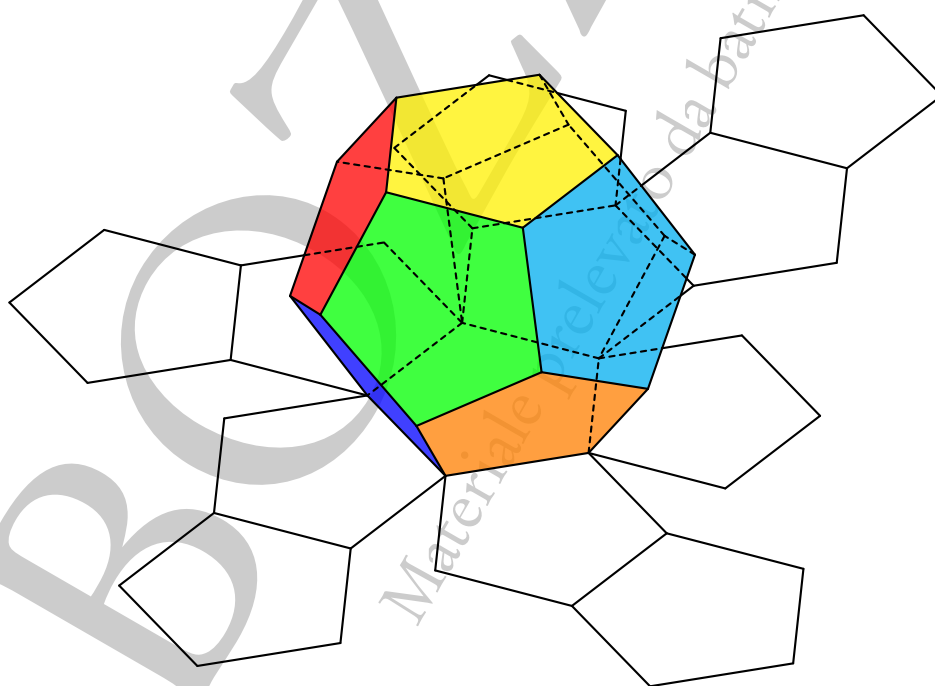


Figura 3.34.: *Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: lo sviluppo completo in 3D*

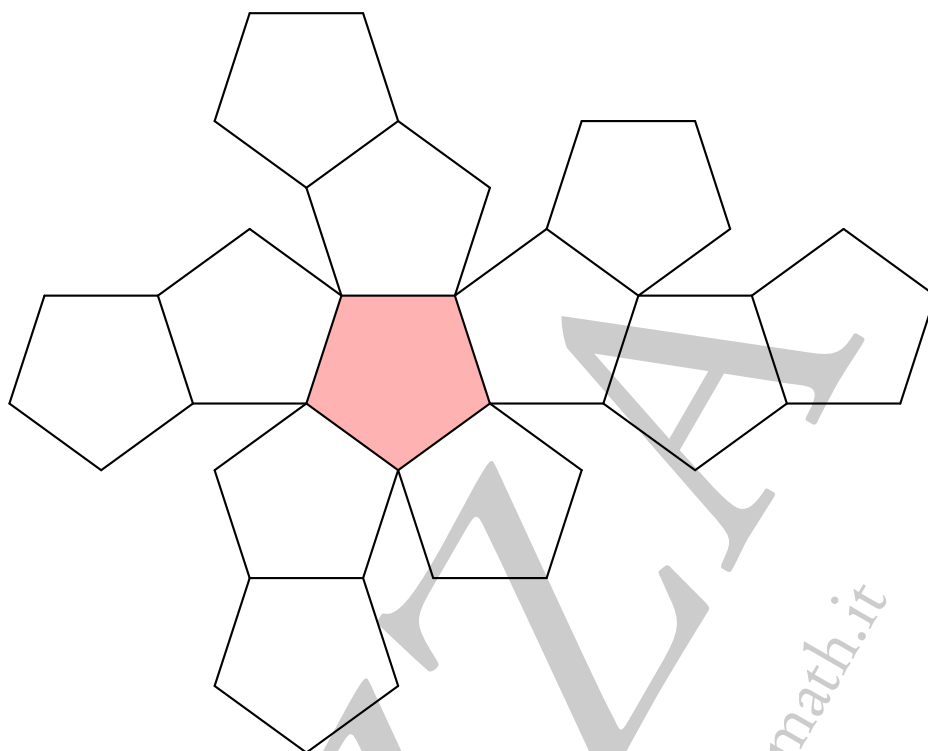


Figura 3.35.: *Uno dei possibili sviluppi piani del dodecaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il pentagono base dello sviluppo*

3.2.5. L'icosaedro

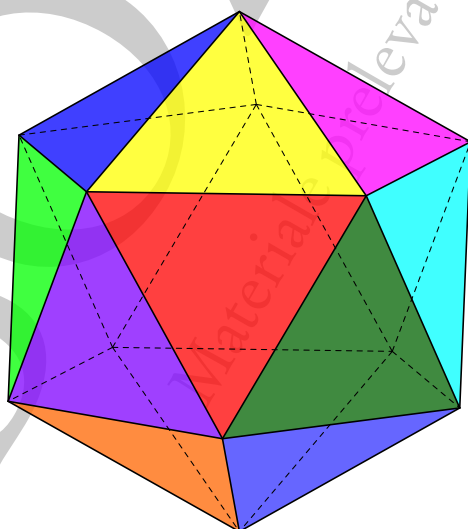


Figura 3.36.: *L'icosaedro regolare*

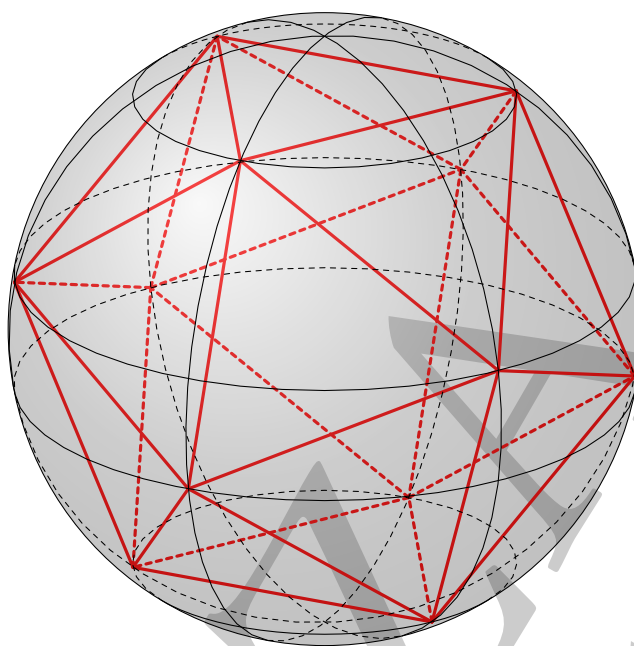


Figura 3.37.: L'icosaedro regolare e la sfera circoscritta. Sono evidenziati i paralleli passanti per tre e i meridiani passanti per quattro dei dodici vertici

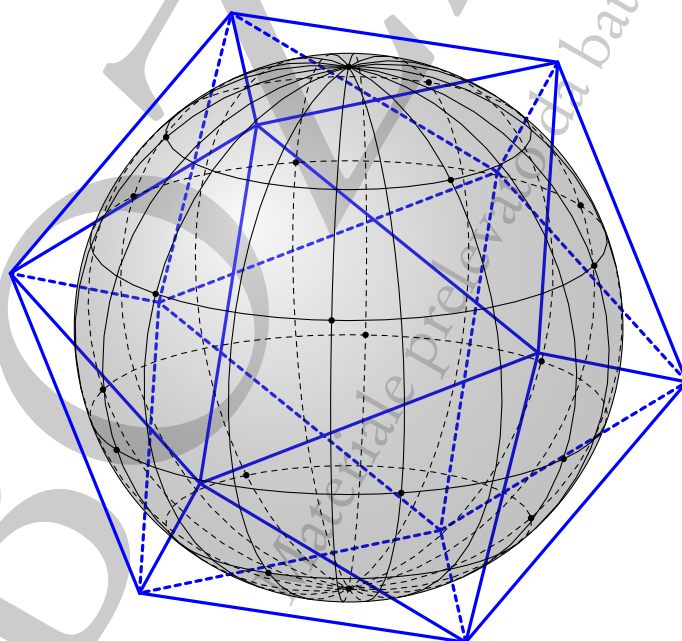


Figura 3.38.: L'icosaedro regolare e la sfera inscritta. Sono evidenziati i punti di tangenza, i meridiani passanti per quattro e i paralleli passanti per tre o sei dei punti di tangenza

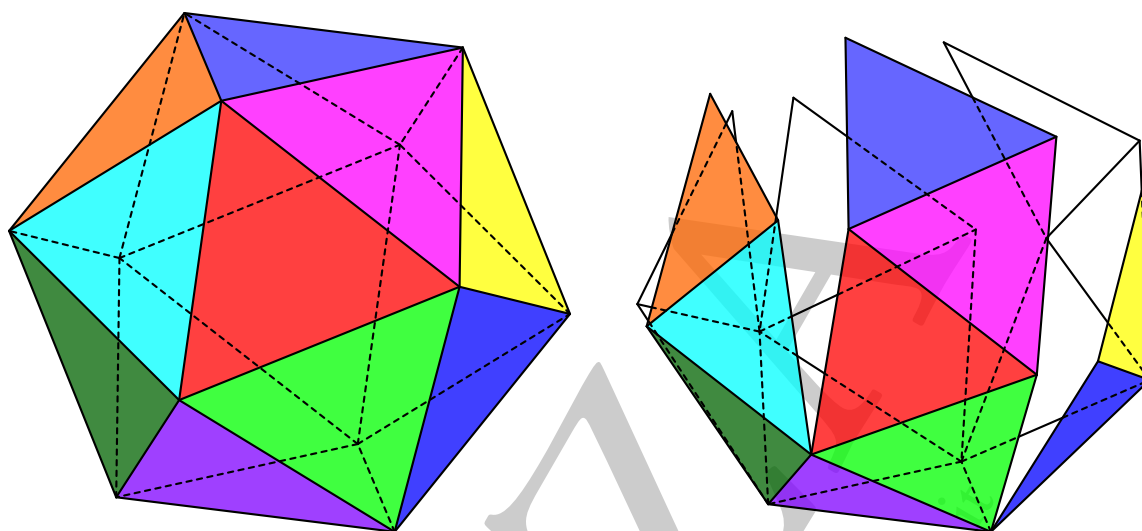


Figura 3.39.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro. A sinistra il poliedro intero, a destra primo passo nello sviluppo*

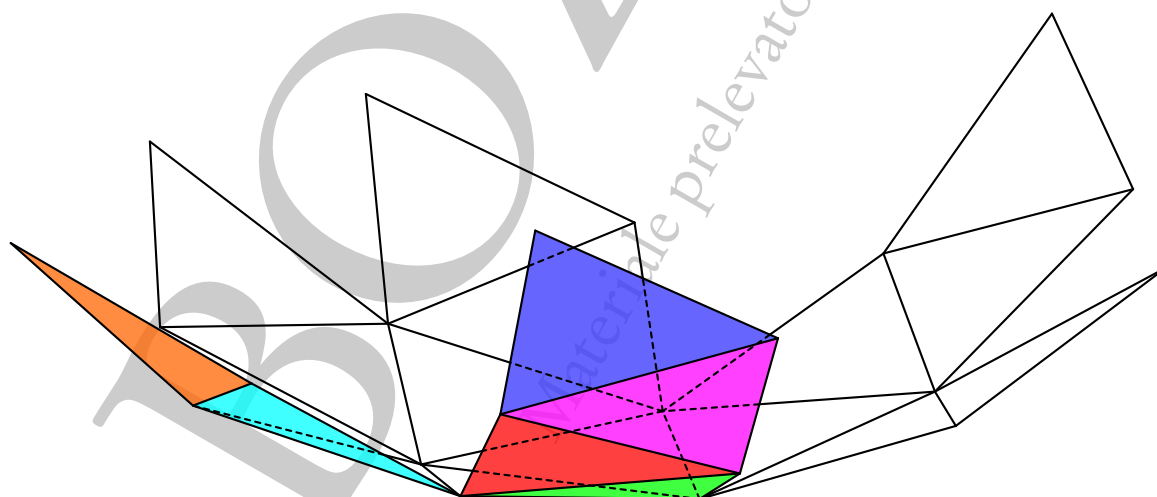


Figura 3.40.: *Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro: secondo passo nello sviluppo*

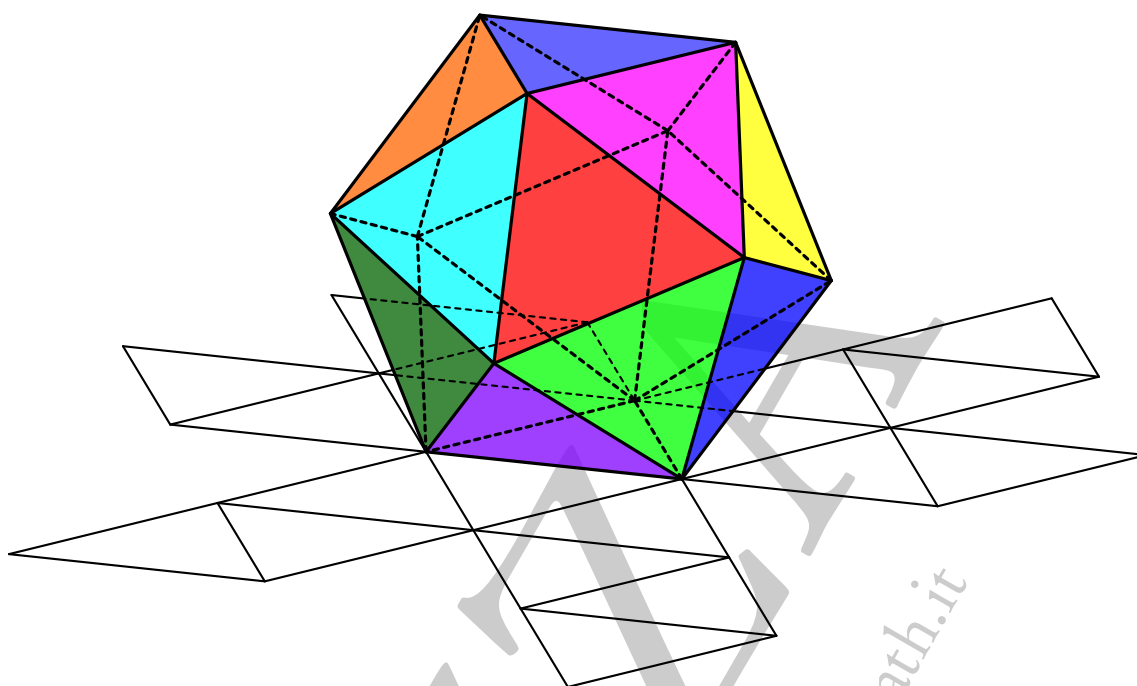


Figura 3.41.: Uno dei possibili sviluppi piani dell'icosaedro: lo sviluppo completo in 3D

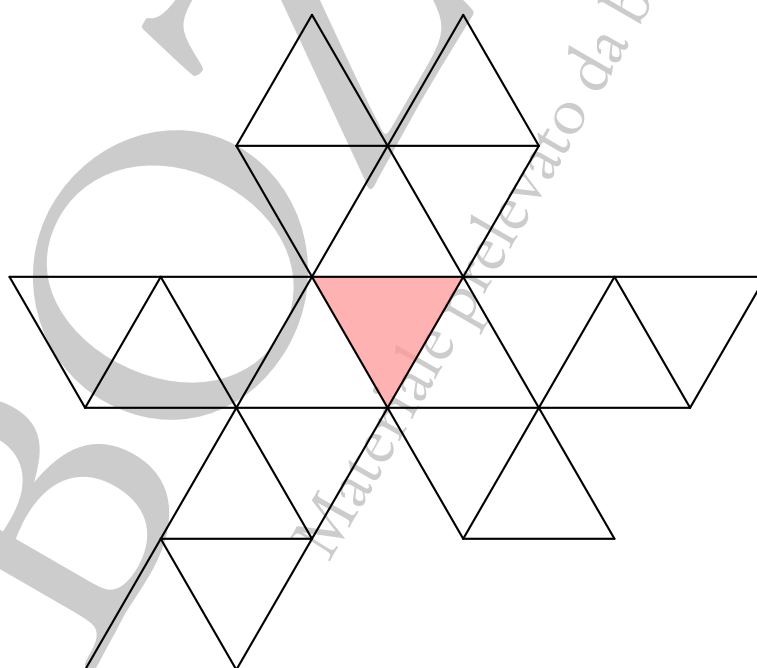


Figura 3.42.: Sviluppo dell'icosaedro: proiezione 2D dello sviluppo completo. È evidenziato il triangolo base dello sviluppo

4. I poliedri “vacui”

Tra le rappresentazioni più famose dei poliedri occorre sicuramente annoverare quelle presenti nel *Divina proportione*⁽¹⁾ di Luca Pacioli⁽²⁾: si tratta di 60 immagini realizzate da Leonardo da Vinci e in cui sono illustrati numerosi poliedri, tra cui i cinque poliedri regolari, a cui qui siamo particolarmente interessati.

I disegni di Leonardo si possono ammirare nel loro splendore nelle due versioni manoscritte sopravvissute: nulla cambia comunque nella sostanza anche nella versione a stampa, anche se ci sono lievi differenze nelle didascalie⁽³⁾.

Questi disegni rappresentano una pietra miliare nell’evoluzione della stereoscopia in quanto sono i primi a mostrare chiaramente la distinzione tra il fronte e il retro dei solidi tridimensionali. Leonardo infatti rappresenta ciascuno dei solidi in una versione *solida* e in una versione *vacua*. Nella prima le facce dei poliedri sono opache e quindi se ne vedono solo quelle anteriori. Nella seconda sono rappresentati nella sostanza solo gli spigoli dei poliedri, costituiti da “assicelle” di varie sezioni: questo stratagemma permette di vedere chiaramente anche le facce nascoste, nella corretta visione assonometrica. Da qui deriva anche il nome *vacuum*, cioè *vuoto*, che Leonardo assegna a questo tipo di rappresentazioni.

Le figure ritraggono, come già detto, i cinque poliedri regolari e altri da loro derivati per *troncatura*, per sostituzione delle facce con piramidi (cioè per *elevazione*⁽⁴⁾) o unendo entrambe le tecniche. Per esempio del cubo e varianti sono proposte le immagini seguenti:

- *Hexaedron Sive Cubus Planum Solidum* e *Hexaedron Planum Vacuum*,
- *Hexaedron Abscissum Solidum* e *Hexaedron Abscissum Vacuum*,
- *Hexaedron Elevatum Solidum* e *Hexaedron Elevatum Vacuum*,
- *Hexaedron Sive Cubus Abscissum Elevatum Solidum* e *Hexaedron Abscissum Elevatum Vacuum*.

L’aggettivo *Planum* è utilizzato per le immagini in cui le facce non sono sostituite da piramidi.

La corretta rappresentazione grafica dei poliedri vacui non è per niente banale e molto probabilmente Leonardo si servì di modellini di legno: oggi naturalmente tutto risulta semplificato con l’uso dei programmi di grafica computerizzata.

¹Il titolo, completo di sottotitolo, dell’opera è: *Divina proportione. Opera a tutti gl’ingegni perspicaci e curiosi necessaria. Ove ciascun studioso di Philosophia: Prospectiva: Pictura: Sculptura:, Architettura: Musica: e altre Mathematice: suavissima: sottile: e admirabile doctrina conseguira: e delectarassi: convarie questione de secretissima scientia.*

²Esistono due manoscritti realizzati da due diversi amanuensi di quest’opera: uno è conservato alla Bibliothèque de Genève, ed è la copia che fu donata dal Pacioli nel 1498 a Ludovico Sforza, duca di Milano, un’altra è conservata presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano ed è quella che fu regalata a Galeazzo Sanseverino. Un terzo manoscritto è invece andato perduto. L’opera fu poi stampata a Venezia nel 1509 da Paganino Paganini e successivamente ristampata più volte: è a questa edizione che facciamo riferimento nel seguito.

³In particolare i cinque poliedri platonici, nei manoscritti, sono chiamati, rispettivamente, *Tetradron*, *Exacedron*, *Octocedron*, *Duodecedron* ed *Ycocedron*.

⁴Anche se Luca Pacioli non dà una definizione formale di *elevazione*, dai risultati illustrati si può dedurre la definizione seguente: Per ottenere un *Poliedro elevato*, si considera il centro di ogni faccia e lo si innalza verso l’esterno fin quando i triangoli formati dal centro innalzato e da due vertici adiacenti della faccia non diventino equilateri.

Luca Pacioli attribuisce grande importanza ai poliedri regolari, tanto che all’inizio del suo trattato, in seconda di copertina, inserisce una composizione poetica loro dedicata. La trascriviamo qui, perché ci pare oltremodo interessante.

Sonetto del auctore.

Cinque corpi in natura son producti
 Da naturali semplici chiamati.
 Perche aciascun composito adunati
 Per ordine concorran fra lor tutti.
 Immixti netti e puri fur constructi
 Quattro elementi e ciel cosi nomati.
 Quale Platone vol che figurati
 Lesser dien a infiniti fructi.
 Ma perche eluacuo la natura abhorre
 Aristotil in quel de celo et mundo
 Per se nonfigurati volsse porre.
 Pero lingegeo geometra profondo
 Di plato edeuclide piacque exporre
 Cinqualtri che in spera volgan tundo
 Regolari daspeto iocundo.
 Comme vedi delati e basi pare.
 E vnaltro sexto mai sepo formare.

FINIS

Proponiamo, di seguito, le immagini dei solidi platonici nello stile *vacuo* di Leonardo, con due diverse colorazioni delle facce per evidenziarne al meglio la struttura.

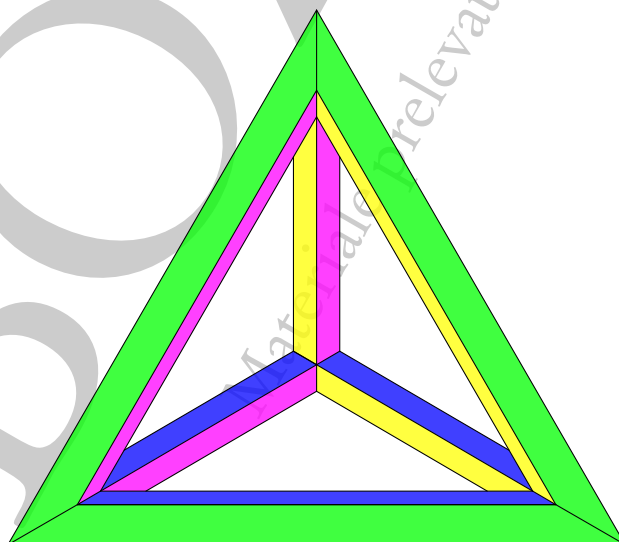


Figura 4.1.: *Tetraedron Planum Vacuum*

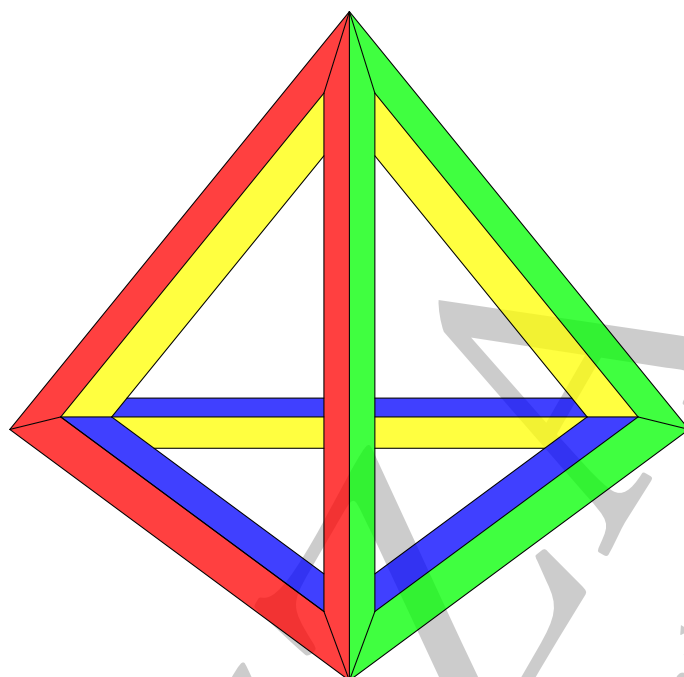


Figura 4.2.: *Tetraedron Plenum Vacuum*, da una seconda angolazione

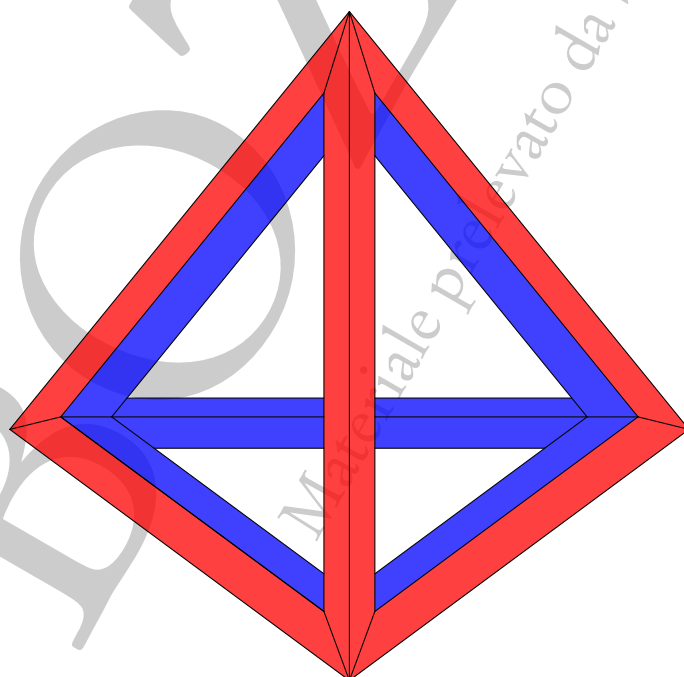
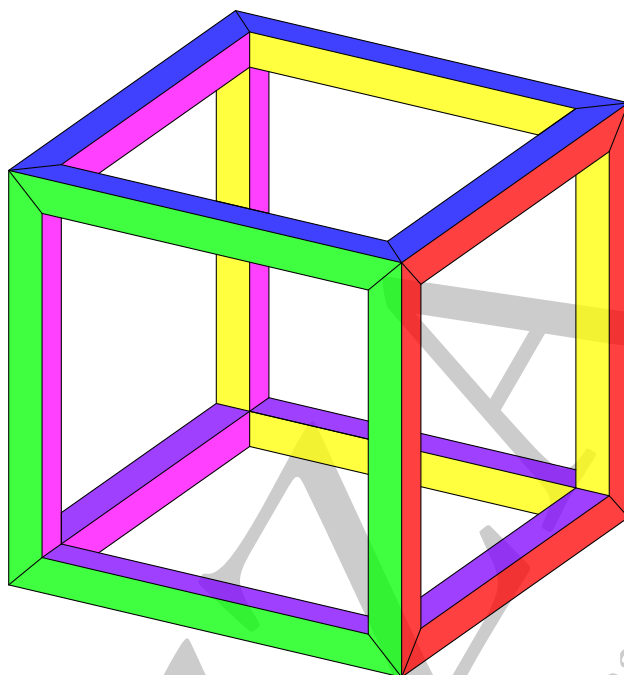
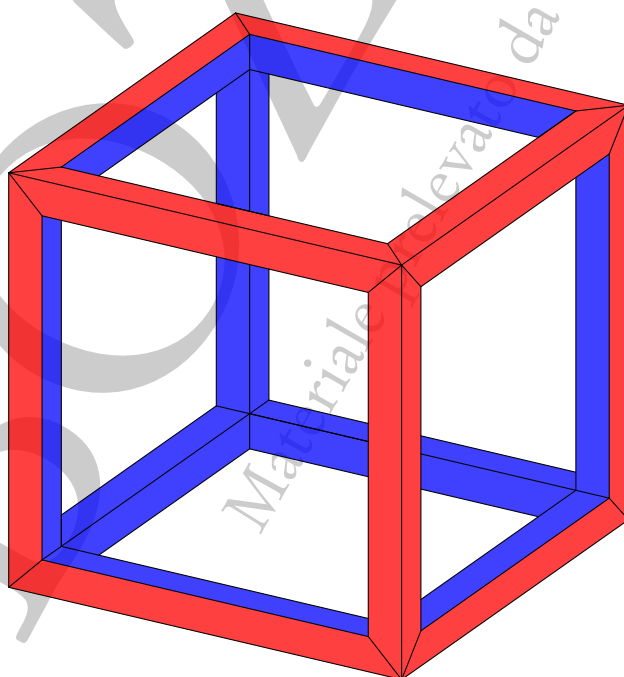


Figura 4.3.: *Tetraedron Plenum Vacuum*, con una diversa colorazione

Figura 4.4.: *Hexaedron Planum Vacuum*Figura 4.5.: *Hexaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione*

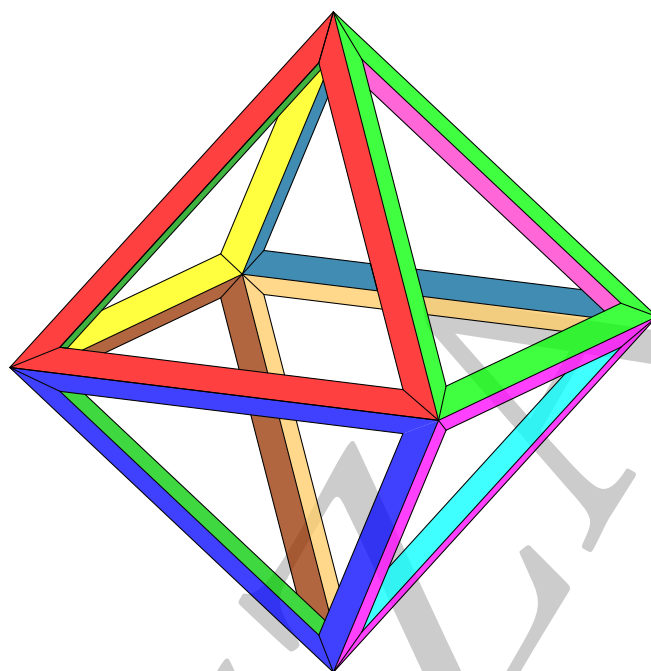


Figura 4.6.: *Octaedron Planum Vacuum*

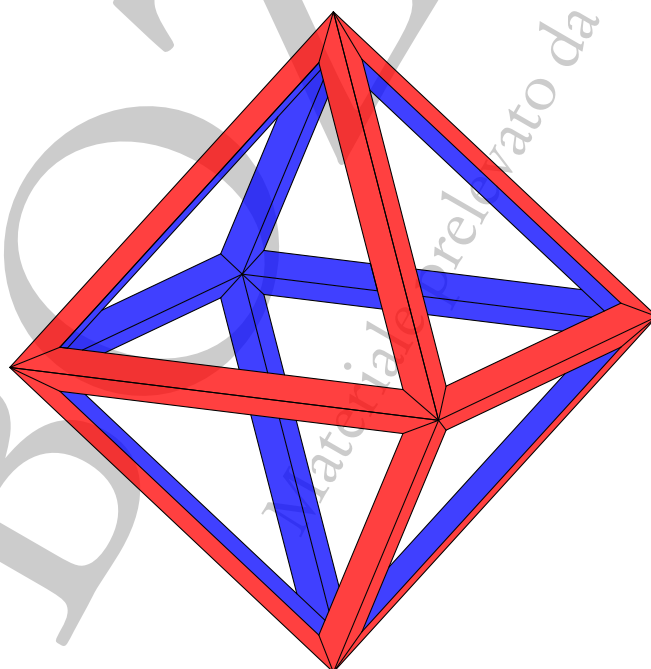
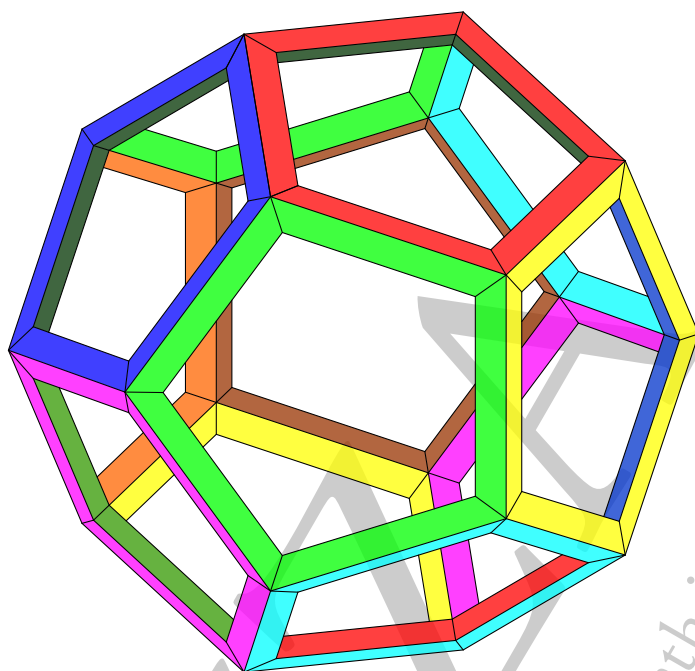
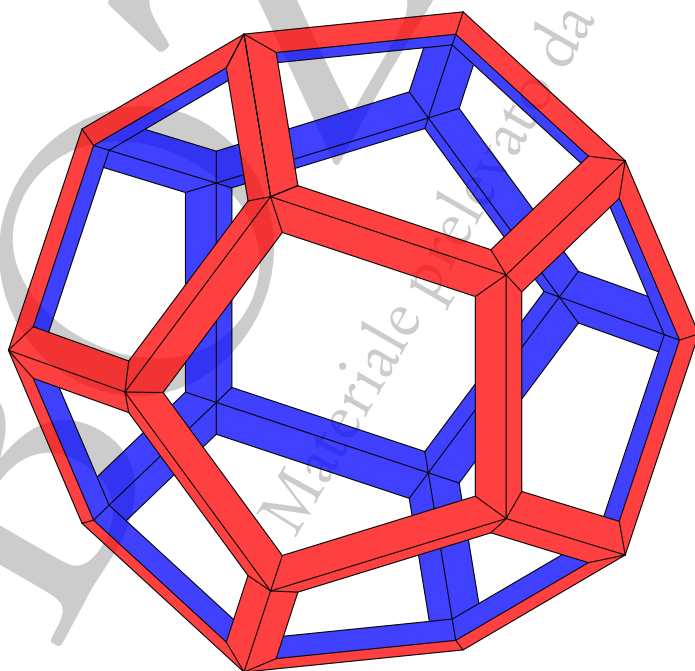


Figura 4.7.: *Octaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione*

Figura 4.8.: *Dodecaedron Planum Vacuum*Figura 4.9.: *Dodecaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione*

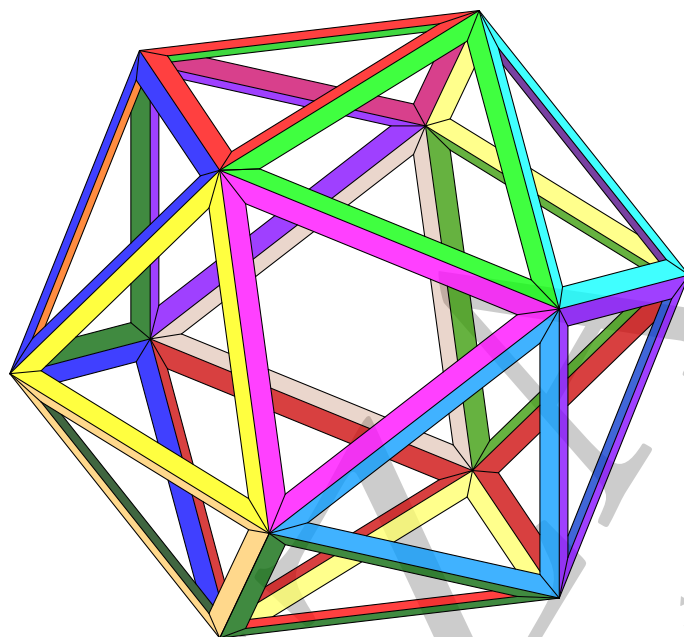


Figura 4.10.: *Icosaedron Planum Vacuum*

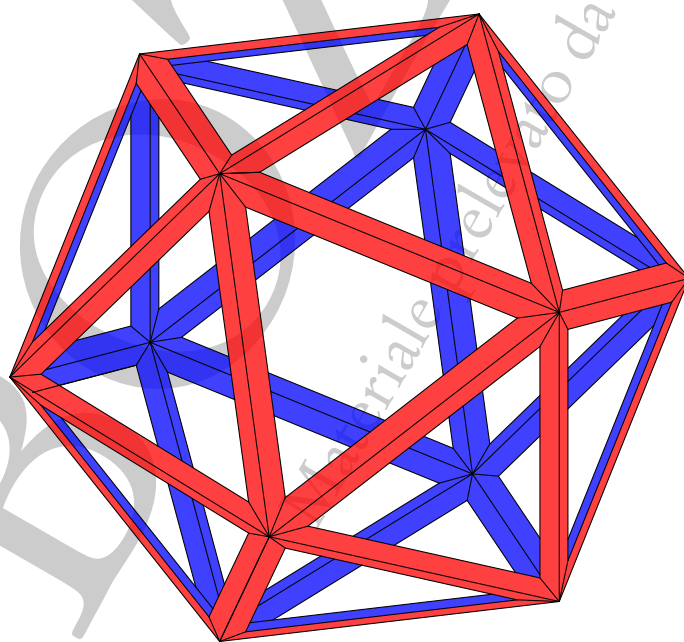


Figura 4.11.: *Icosaedron Planum Vacuum, con una diversa colorazione*

4.1. Figure impossibili

Approfittiamo della presentazione dei poliedri vacui per fare un breve cenno alle “figure impossibili”, rese famose da Maurits Cornelius Escher. Tra queste abbiamo scelto il *cubo impossibile*, una figura non costruibile nello spazio, in cui gli spigoli laterali si intrecciano in modo impossibile per un oggetto tridimensionale: si veda la figura 4.12.

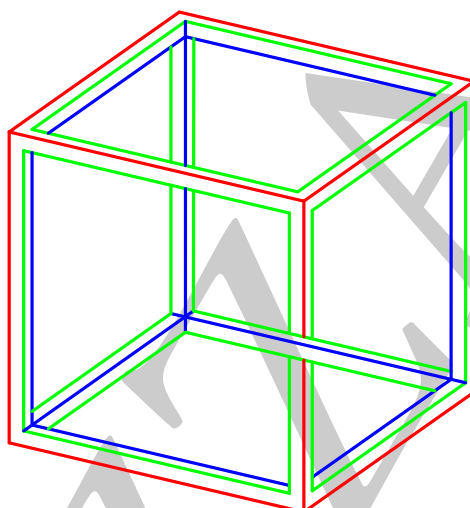


Figura 4.12.: *Il cubo impossibile: la figura 2D*

In realtà è possibile costruire un modello tridimensionale di questo cubo impossibile tagliando gli spigoli prismatici di una figura cubica reale in modo che si intravedano gli spigoli posti dietro come se passassero anteriormente: si veda la figura 4.13.

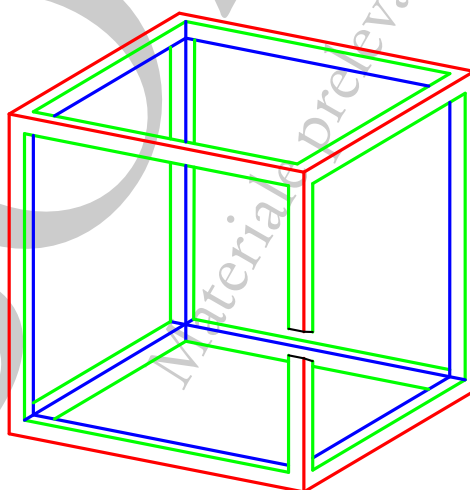


Figura 4.13.: *Modello 3D del cubo impossibile, visto da una angolazione che svela il trucco*

5. I poliedri “elevati”

Utilizzando i solidi platonici come base si possono ottenere numerosi altri poliedri operando opportune modifiche. I primi esempi risalgono addirittura ad Archimede che studiò i poliedri semiregolari (detti, appunto, *archimedei*) e di cui ci occuperemo in un altro fascicolo di questa raccolta.

In questo capitolo vogliamo considerare una tecnica introdotta sostanzialmente da Luca Pacioli nel suo *Divina Proportione* e diventata famosa soprattutto a causa delle illustrazioni di Leonardo: si tratta della tecnica dell’*elevazione*, cui abbiamo già fatto cenno nella nota 4 nella pagina 35. In sostanza si innalza il centro di ogni faccia verso l’esterno fin quando i triangoli formati dal centro innalzato e da due vertici adiacenti della faccia non diventino equilateri.

Il risultato si può anche ottenere incollando delle piramidi con base un poligono regolare e facce triangolari equilateri sulle facce dei poliedri di base. Piramidi siffatte sono possibili solo se la base è un triangolo equilatero (e allora si ottiene il tetraedro regolare), oppure un quadrato (e allora si ottiene il solido numero 1 di Johnson⁽¹⁾, cioè la piramide quadrata), oppure un pentagono (e allora si ottiene il solido numero 2 di Johnson, cioè la piramide pentagonale). L’operazione è dunque possibile per tutti i cinque solidi platonici che hanno, appunto, solo facce triangolari, quadrate o pentagonali.

I poliedri che si ottengono non sono convessi e hanno, per costruzione, tutte le facce costituite da identici triangoli equilateri, ma non sono poliedri regolari, nemmeno se si esclude il requisito della convessità, in quanto, a parte il requisito della convessità, sono verificate solo le prime due condizioni della definizione 3.1.

In un apposito fascicolo di questa collana ci occuperemo dei poliedri stellati: i poliedri elevati che consideriamo in questo capitolo non rientrano nemmeno nel gruppo dei poliedri regolari stellati, o poliedri di *Keplero-Poinsot*. Solo l’ottaedro regolare elevato può essere considerato una stellazione, in particolare l’unica possibile stellazione dell’ottaedro, in quanto può essere visto come un poliedro con otto grandi facce triangolari equilateri che si intersecano non solo sugli spigoli, ma anche all’interno, come mostra la figura 5.7, invece che come un poliedro costituito da 24 piccoli triangoli equilateri. Tuttavia anche l’ottaedro elevato non soddisfa le condizioni per poter essere considerato un poliedro regolare stellato. Torneremo su questo argomento in un apposito fascicolo.

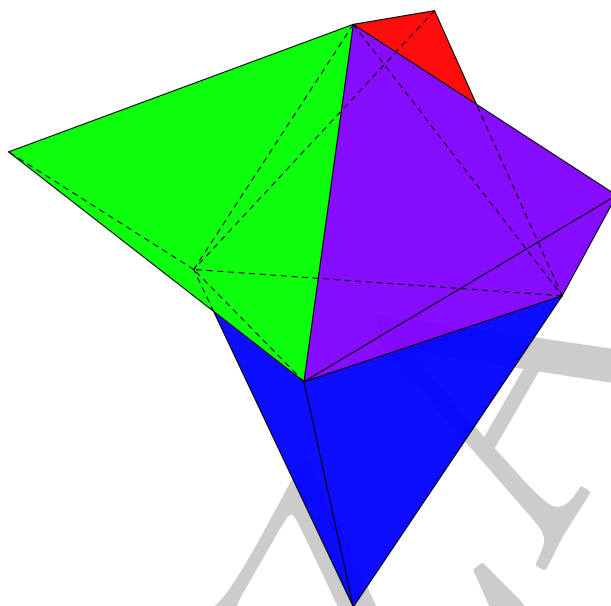
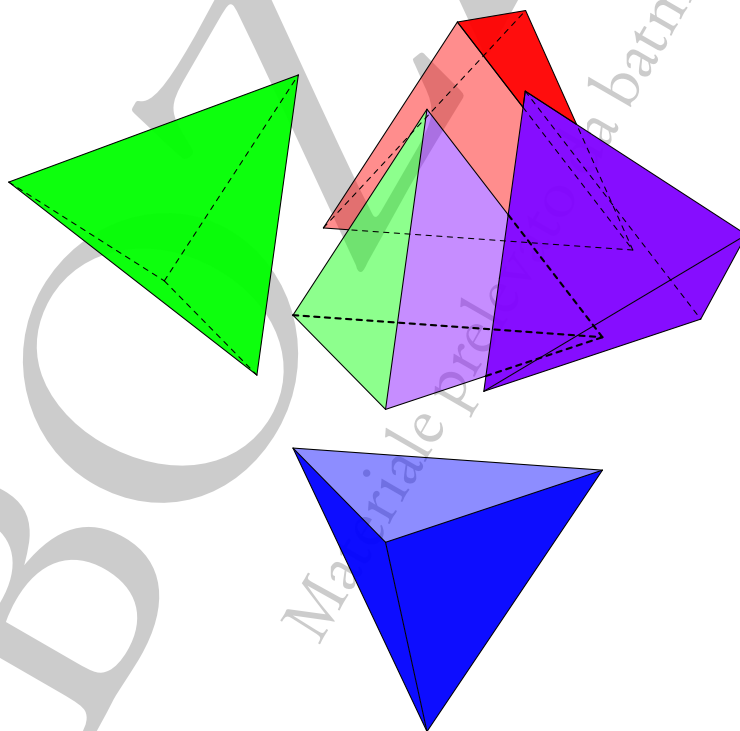
L’ottaedro regolare elevato merita una particolare considerazione: come appena osservato esso può essere visto come un poliedro stellato, ma è interessante il fatto che esso possa anche essere considerato come la compenetrazione di due tetraedri regolari, come mostrano le figure 5.7 e 5.8. In questo modo è stato considerato da Keplero che, nel 1611, gli diede il nome di *Stella octangula*.

La versione vacua della *Stella octangula*, vedi le figure 5.9 e 5.10, è anche conosciuta come la *Merkaba* ed è imbevuta di proprietà mistiche, di cui qui naturalmente non ci occuperemo.

Nelle pagine seguenti proponiamo le figure dei cinque poliedri regolari elevati, visualizzando anche, per ciascuno, la figura esplosa che ne evidenzia le componenti.

In ragione della loro struttura questi poliedri sono anche noti con il nome *poliedri regolari piramidati*.

¹Tratteremo, in un apposito fascicolo di questa raccolta, tutti i solidi di Johnson, che sono ben 92.

Figura 5.1.: *Il tetraedro regolare elevato*Figura 5.2.: *Il tetraedro regolare elevato: figura esplosa per mostrare le componenti*

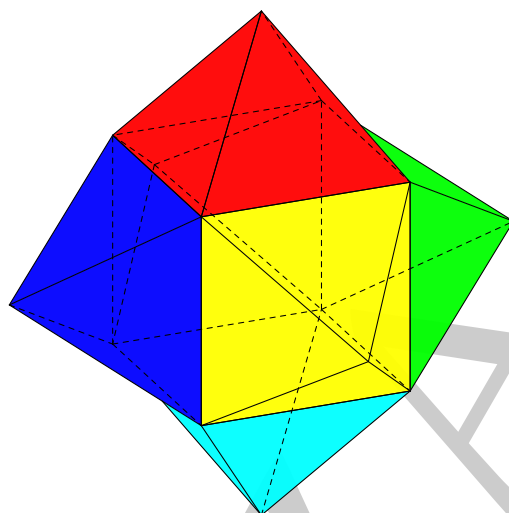


Figura 5.3.: *Il cubo elevato*

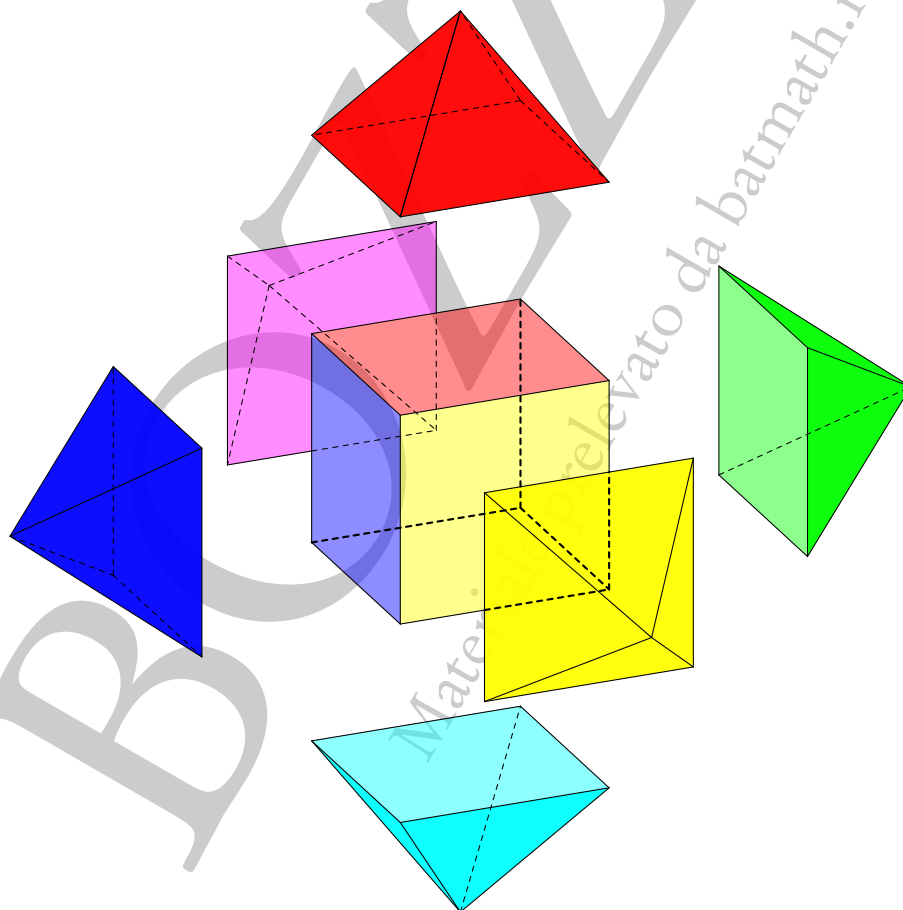


Figura 5.4.: *Il cubo elevato: figura esplosa per mostrare le componenti*

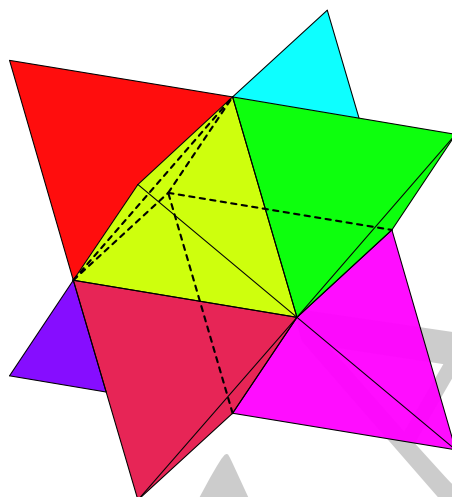


Figura 5.5.: *L'ottaedro elevato*

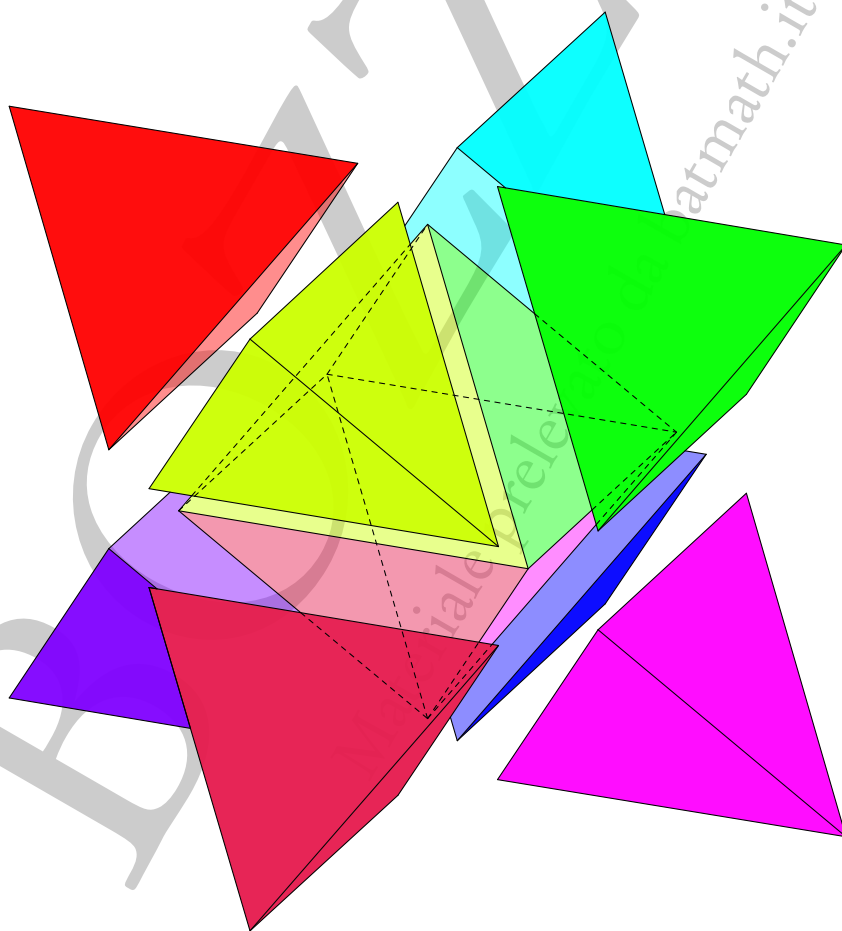


Figura 5.6.: *L'ottaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti*

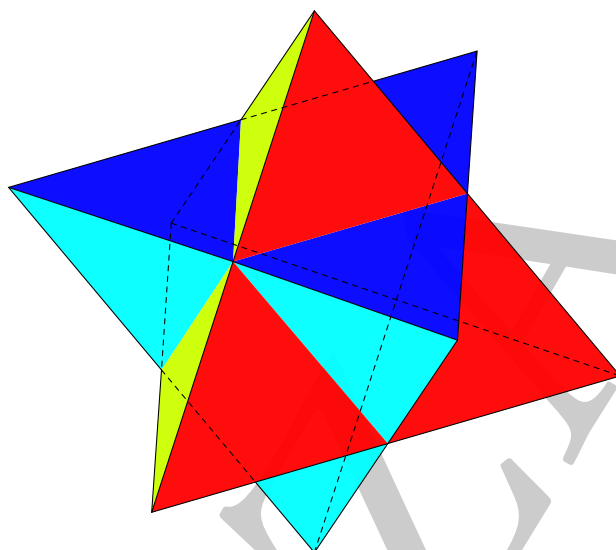


Figura 5.7.: *L'ottaedro elevato come compenetrazione di due tetraedri regolari: la Stella octangula*

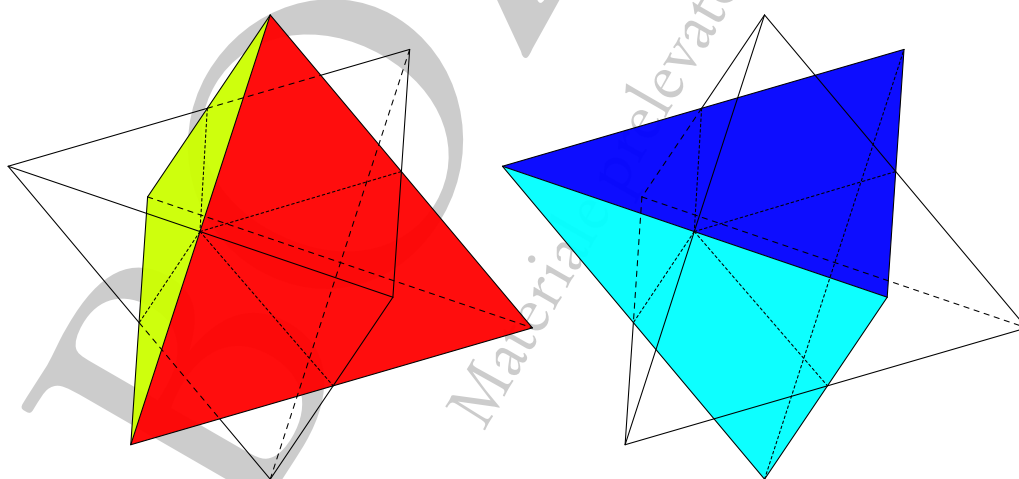


Figura 5.8.: *I due tetraedri componenti della Stella octangula*

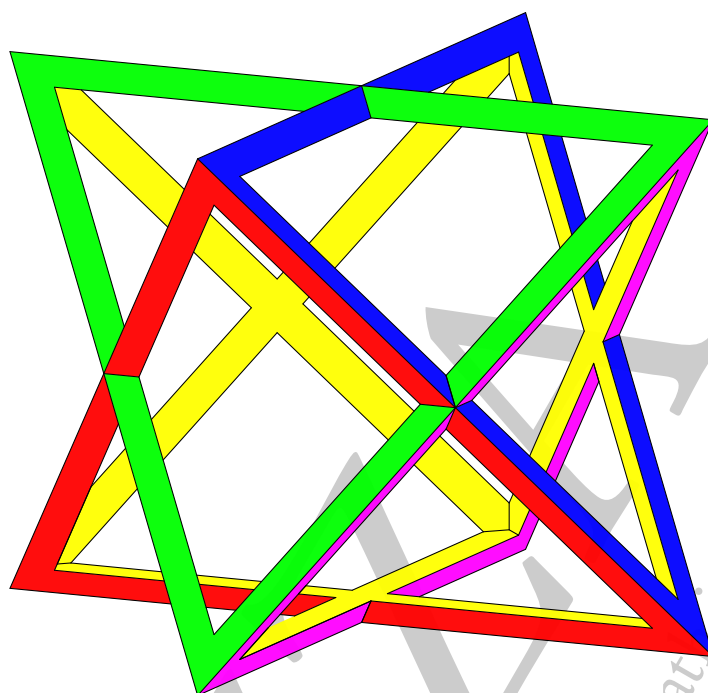


Figura 5.9.: *La stella octangula “vacua”*

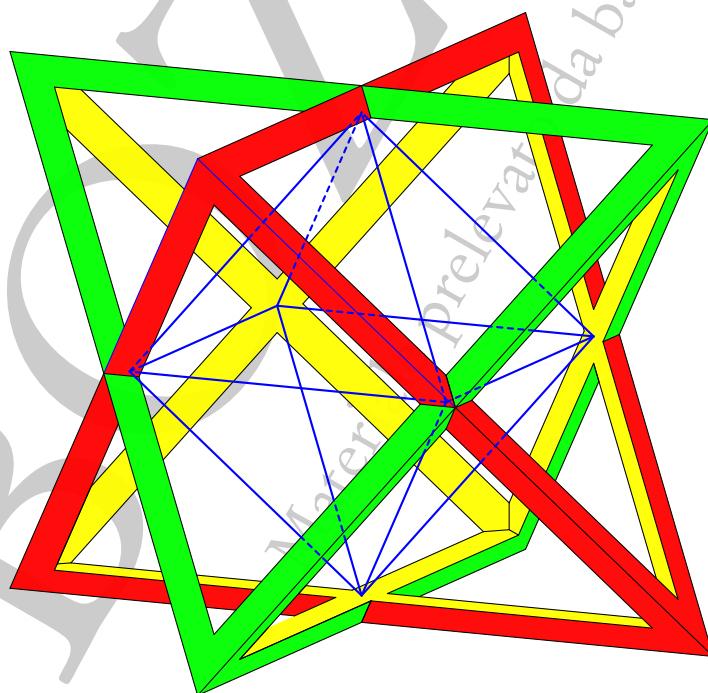


Figura 5.10.: *La stella octangula “vacua” con una diversa colorazione e l’evidenziazione dello scheletro dell’ottaedro di base*

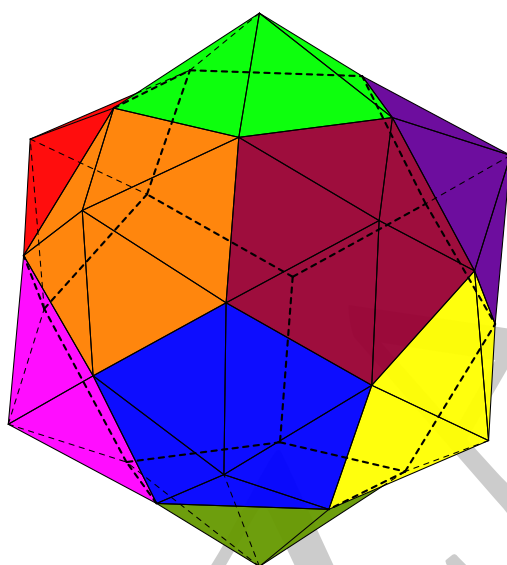


Figura 5.11.: *Il dodecaedro elevato*

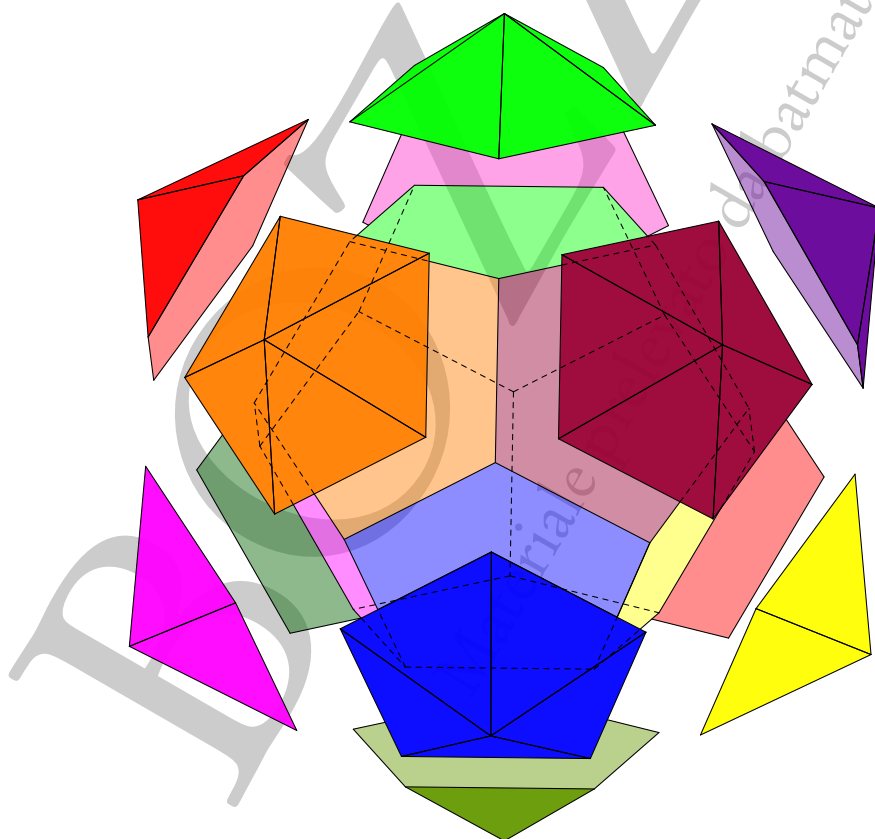


Figura 5.12.: *Il dodecaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti*

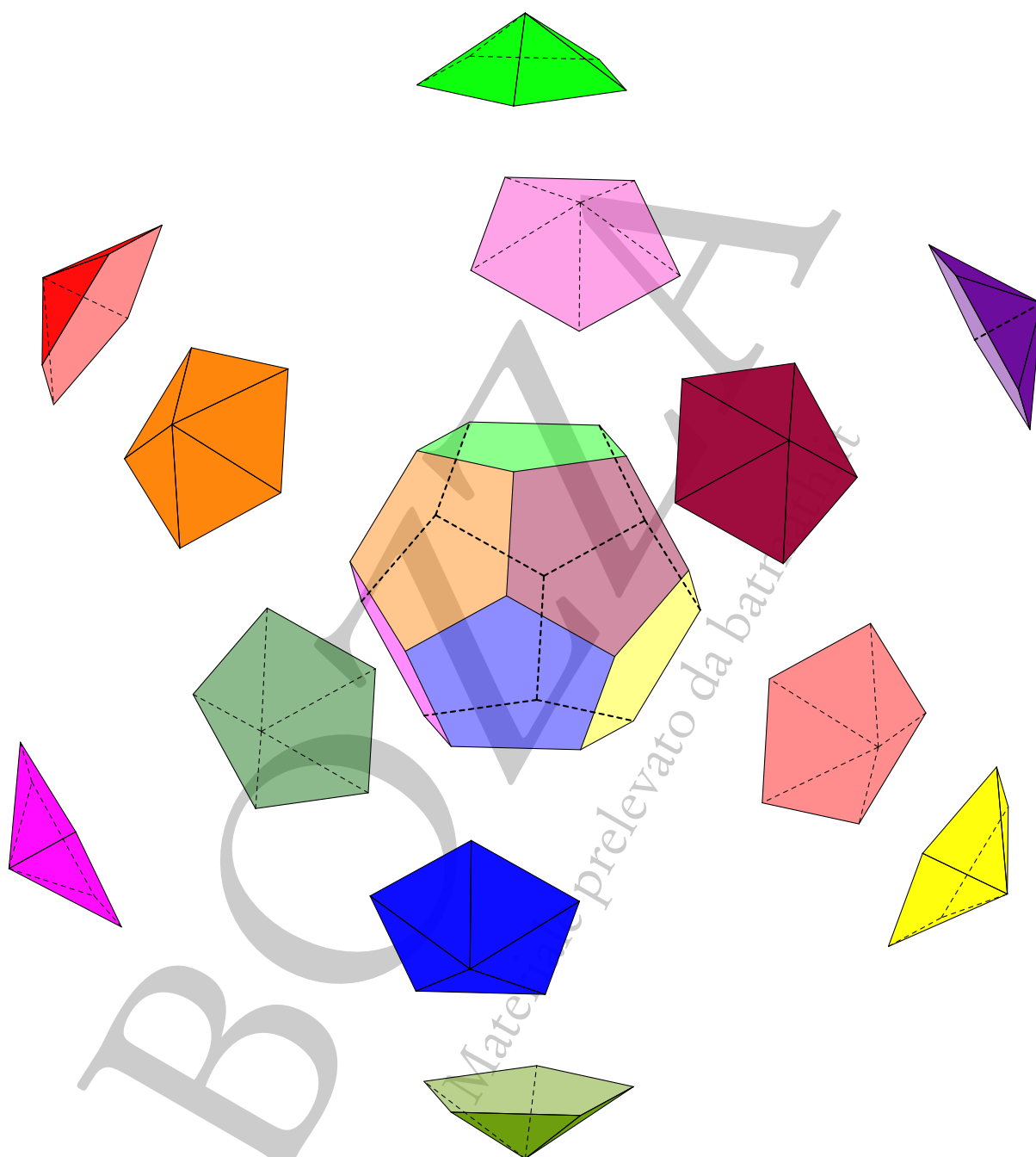


Figura 5.13.: Il dodecaedro elevato: figura completamente esplosa per evidenziare al meglio le componenti

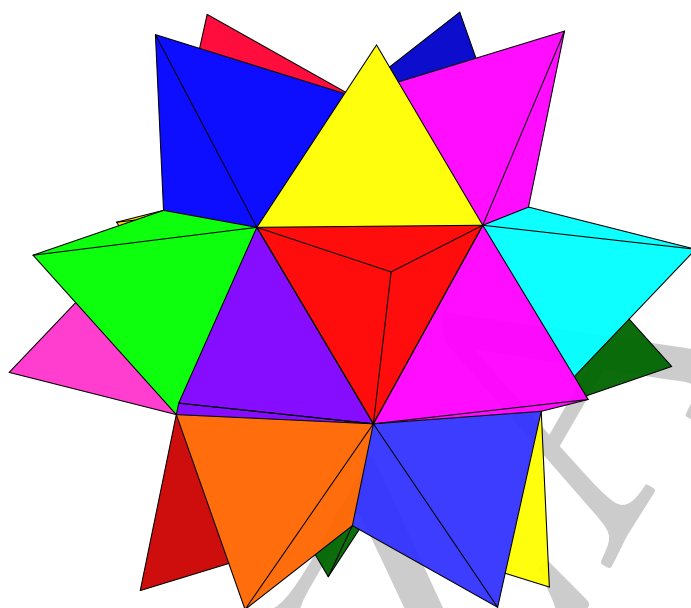


Figura 5.14.: *L'icosaedro elevato*

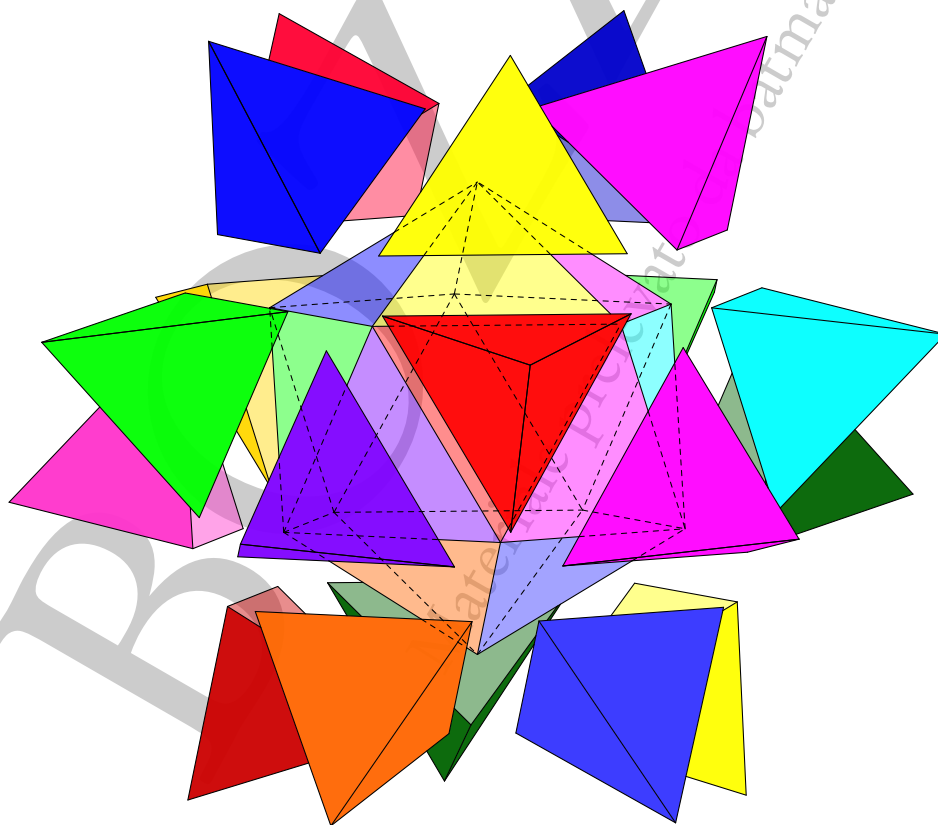


Figura 5.15.: *L'icosaedro elevato: figura esplosa per mostrare le componenti*

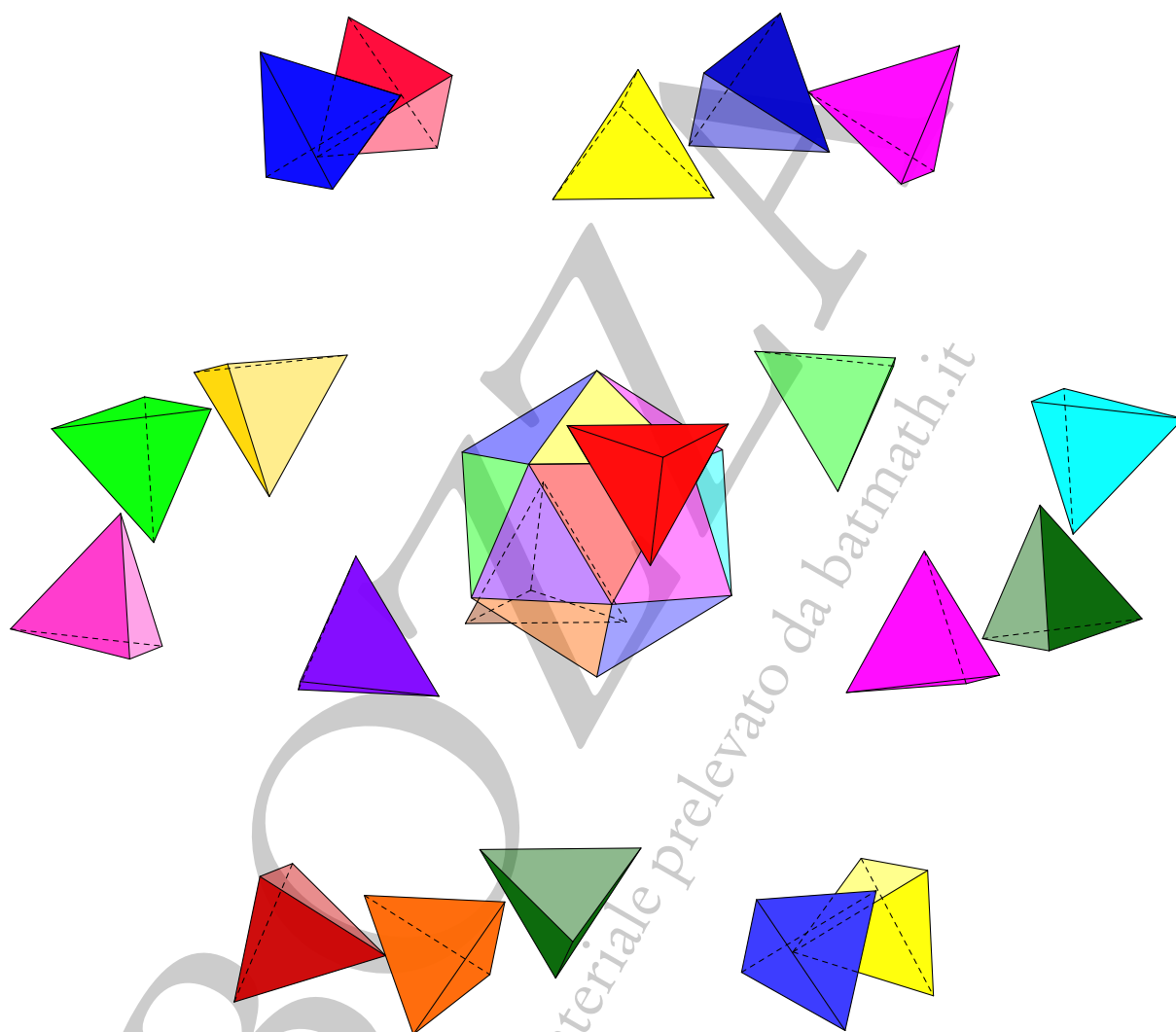


Figura 5.16.: *L'icosaedro elevato: figura completamente esplosa per evidenziare al meglio le componenti*

6. Relazioni fra i poliedri regolari

Esistono varie relazioni tra i cinque poliedri regolari. Ci occuperemo in questo capitolo di alcune di esse.

6.1. Dualità

La prima, e forse più importante, relazione che collega tra di loro i poliedri regolari è quella legata al concetto di dualità, la cui definizione è abbastanza complessa e su cui torneremo, sempre limitatamente a situazioni semplici, man mano che se ne presenterà la necessità.

L'idea di base è che ad ogni poliedro viene associato un altro poliedro che ha lo stesso numero di spigoli, ma in cui il numero dei vertici e delle facce si scambiano. Limitatamente ai poliedri regolari si può dare la seguente definizione semplificata.

Definizione 6.1. Dato un poliedro regolare P , si può considerare un altro poliedro P' costruito prendendo come vertici i centri delle facce del poliedro P : il poliedro così costruito è anch'esso uno dei cinque poliedri regolari, detto poliedro duale, e precisamente ha lo stesso numero di spigoli di P , mentre il numero dei vertici e delle facce si invertono.

Dalla definizione data segue subito che il poliedro duale del duale è di nuovo il poliedro di partenza.

Il tetraedro gioca un ruolo speciale in questo concetto, in quanto è duale di se stesso (*autoduale*), mentre il cubo e l'ottaedro sono duali uno dell'altro e così pure il dodecaedro e l'icosaedro.

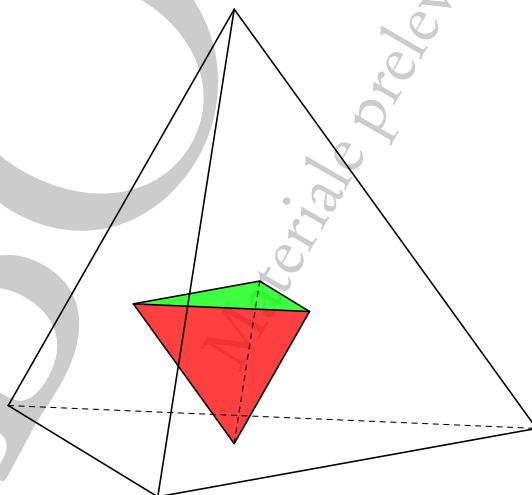
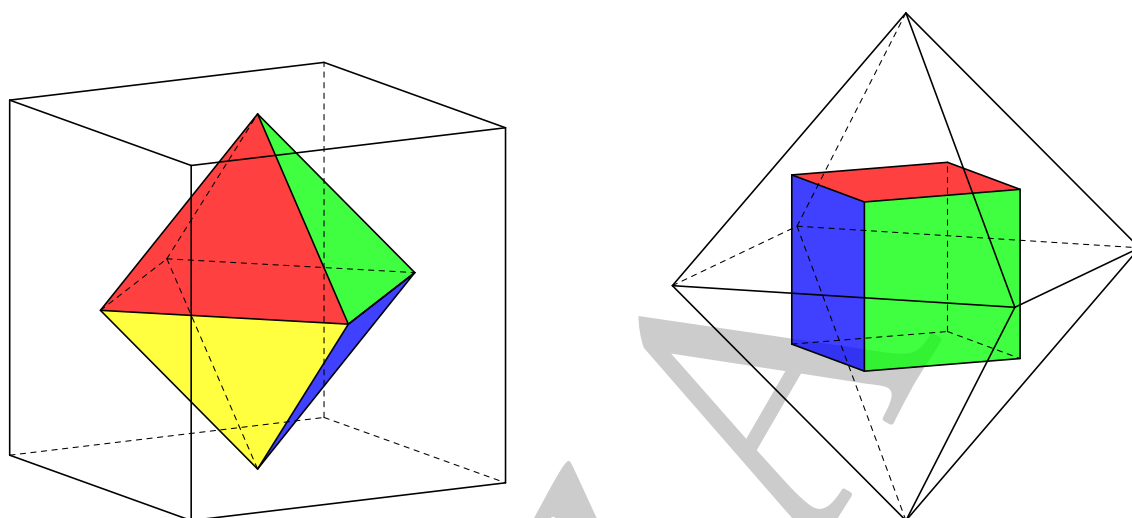
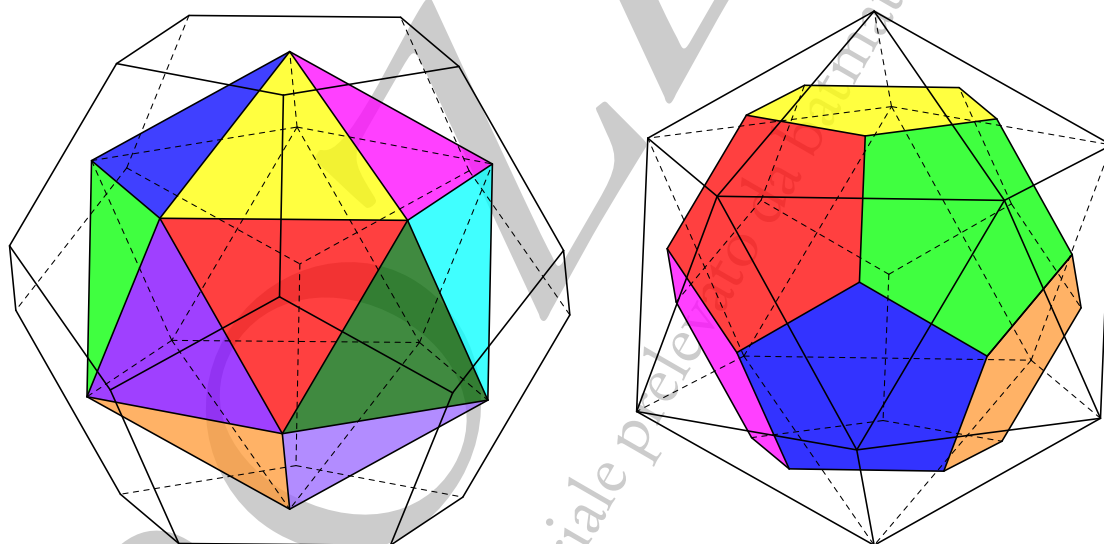


Figura 6.1.: Autodualità del tetraedro

Figura 6.2.: *Dualità fra cubo e ottaedro*Figura 6.3.: *Dualità fra dodecaedro e icosaedro*

6.2. Poliedri inscritti in altri poliedri

Una seconda relazione interessante tra i cinque poliedri regolari è il fatto che scegliendo opportunamente alcuni dei vertici di un dato poliedro si può ottenere un altro poliedro. Ne vedremo graficamente alcune tra le situazioni più interessanti.

6.2.1. Tetraedri in un cubo

Cominciamo a considerare il cubo. Se si esaminano in dettaglio le figure relative alla stella octangula, in particolare la stella octangula vacua, vedi la figura 5.9, ci si rende immediatamente conto che essa può essere inscritta in un cubo: dunque in un cubo si possono inscrivere due distinti tetraedri, i cui vertici sono un sottoinsieme dei vertici del cubo, e i cui spigoli sono diagonali delle facce del cubo.

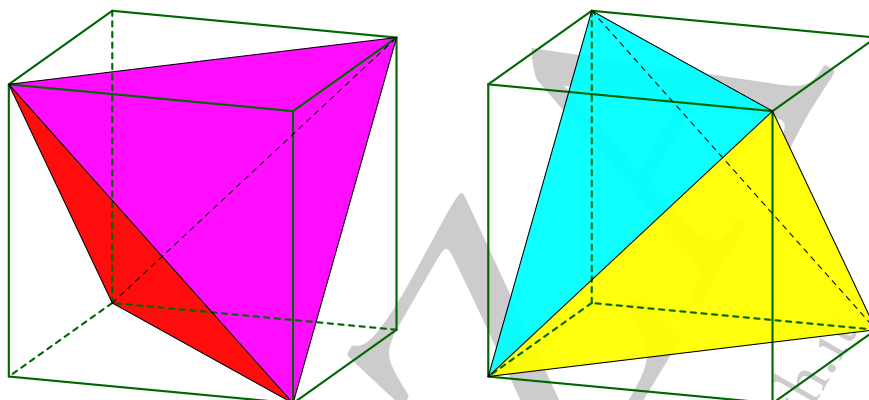


Figura 6.4.: *I due tetraedri inscritti in un cubo*

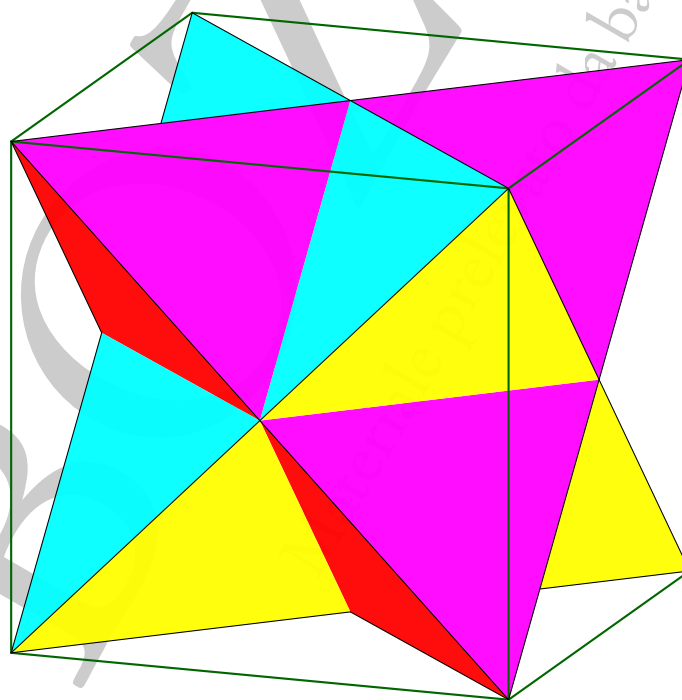


Figura 6.5.: *I due tetraedri inscritti in un cubo riuniti a formare la stella octangula*

6.2.2. Cubi in un dodecaedro

Passiamo poi a considerare il dodecaedro: esistono ben cinque cubi diversi i cui otto vertici sono un sottoinsieme dei venti vertici del dodecaedro e i cui spigoli sono diagonali delle facce pentagonali del dodecaedro. In ogni vertice del dodecaedro arrivano due cubi, che hanno tra di loro in comune anche il vertice diametralmente opposto al primo: si tratta dunque di due cubi ruotati uno rispetto all'altro attorno all'asse passante per i due vertici comuni. Su ogni faccia del dodecaedro ci sono cinque spigoli dei cubi inscritti, che formano, sulla faccia stessa, la stella a cinque punte costituita dalle diagonali dei pentagoni, vedi la figura 6.9.

Alcune situazioni relative ai cubi inscritti in un dodecaedro sono rappresentate nelle figure 6.6, 6.7, 6.8 e 6.10. In particolare il poliedro della figura 6.10 è anche detto “Composto di cinque cubi” e ce ne occuperemo ancora nel paragrafo 6.3.

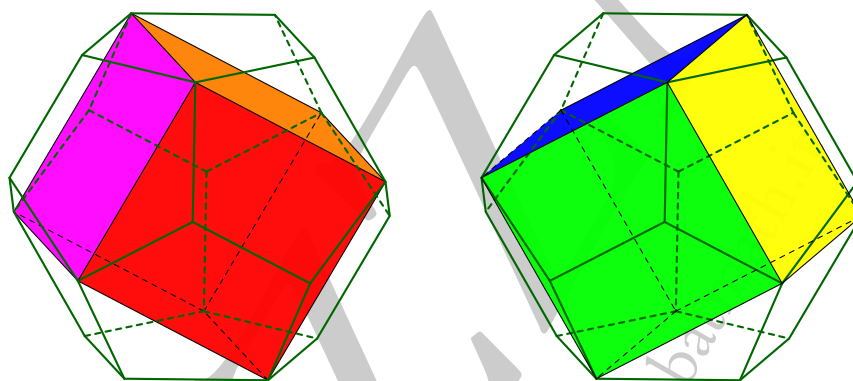


Figura 6.6.: I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro

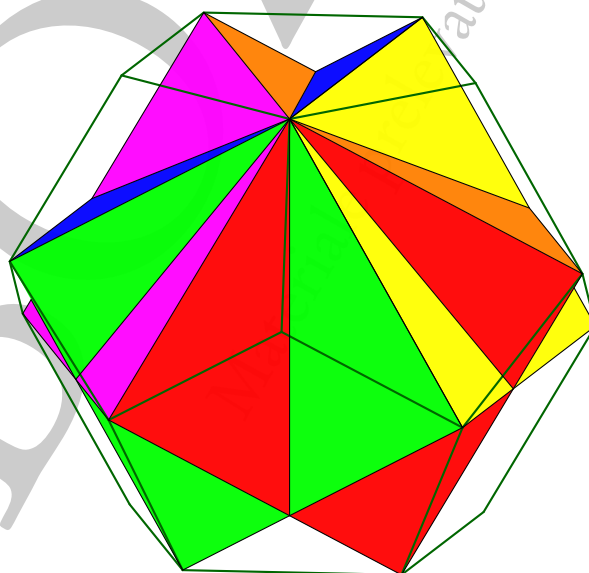


Figura 6.7.: I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro, sovrapposti

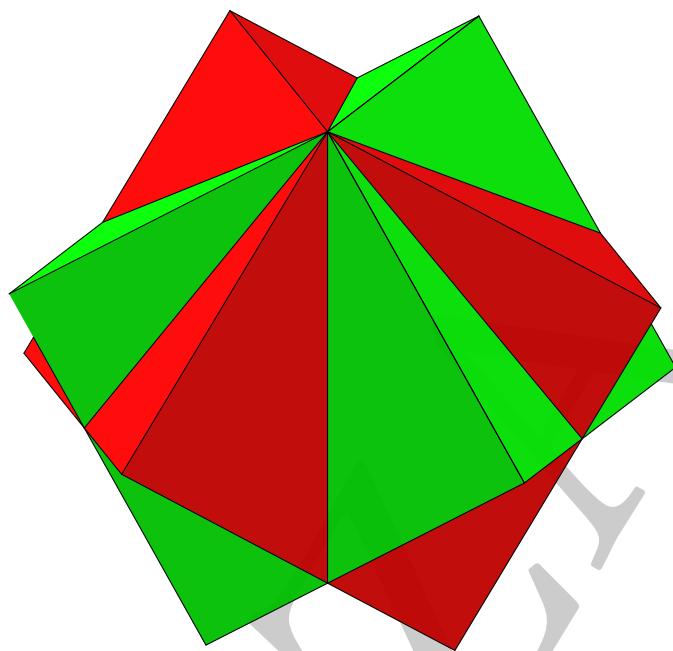


Figura 6.8.: *I due cubi con due vertici in comune inscritti in un dodecaedro, sovrapposti, con una diversa colorazione per evidenziare al meglio i componenti*

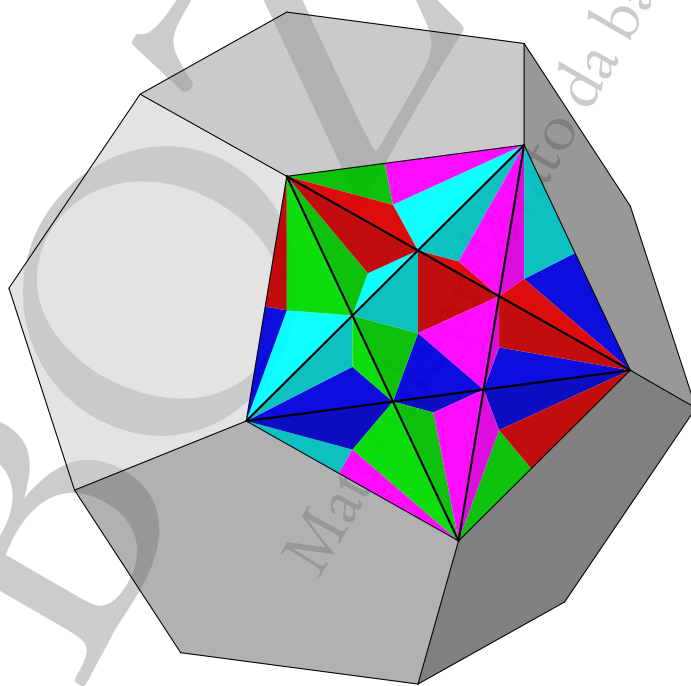


Figura 6.9.: *I cinque cubi inscritti in un dodecaedro: particolare delle porzioni di cubi visibili da una faccia*

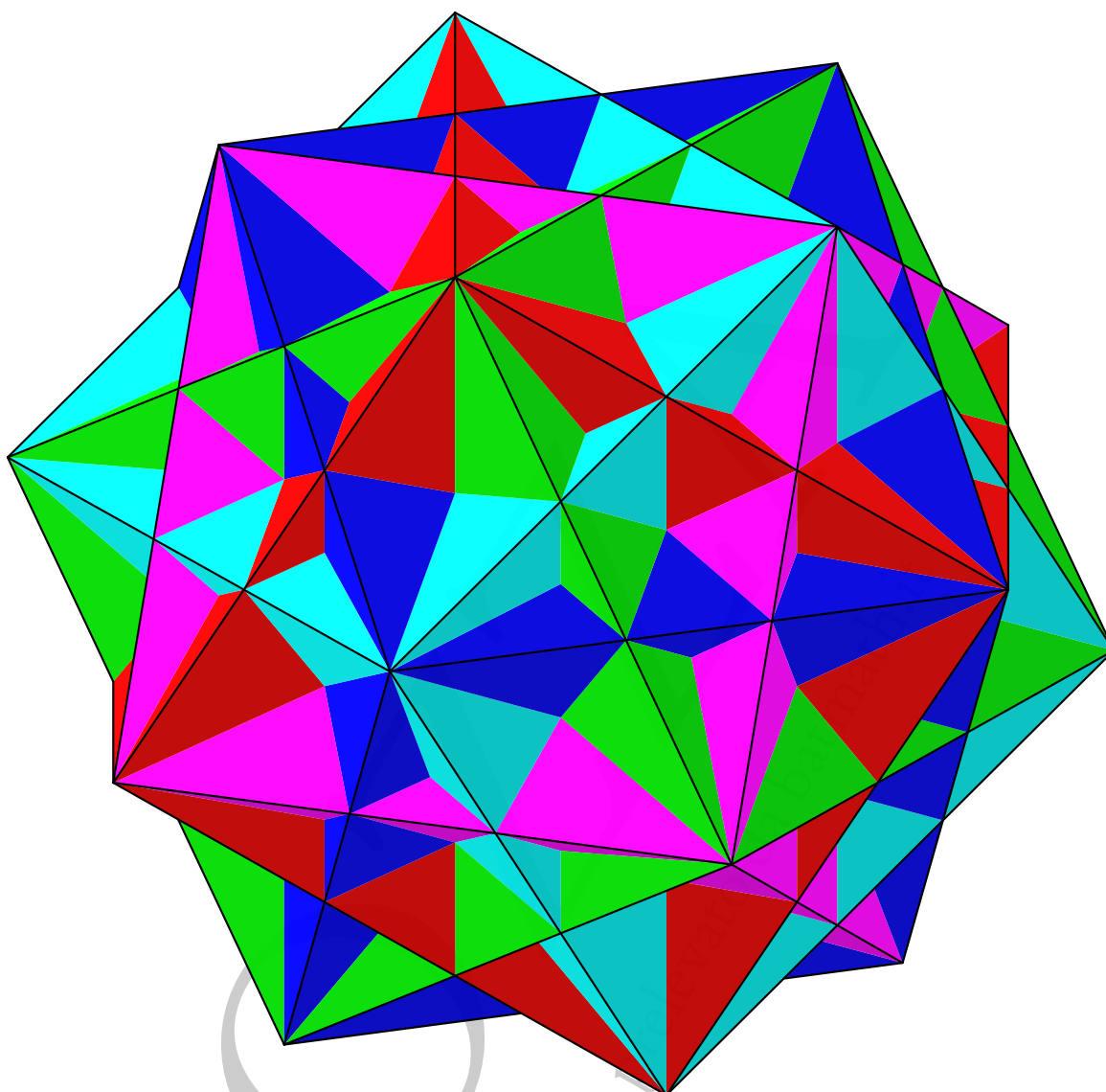


Figura 6.10.: *I cinque cubi inscritti in un dodecaedro a formare il poliedro detto “Composto di cinque cubi”*

6.2.3. Tetraedri in un dodecaedro

Come abbiamo visto, in ogni cubo sono inscritti due tetraedri, e quindi in ogni dodecaedro sono inscritti dieci tetraedri diversi.

È particolarmente interessante la situazione in cui si considerano tetraedri inscritti in cubi diversi e senza vertici in comune: si tratta al massimo di cinque tetraedri: le figure 6.11 e 6.12 illustrano questa situazione, limitatamente a due tetraedri la prima, a tutti cinque la seconda. La figura che si ottiene con i cinque tetraedri si chiama “Composto di cinque tetraedri” e ce ne occuperemo ancora nel paragrafo 6.3.

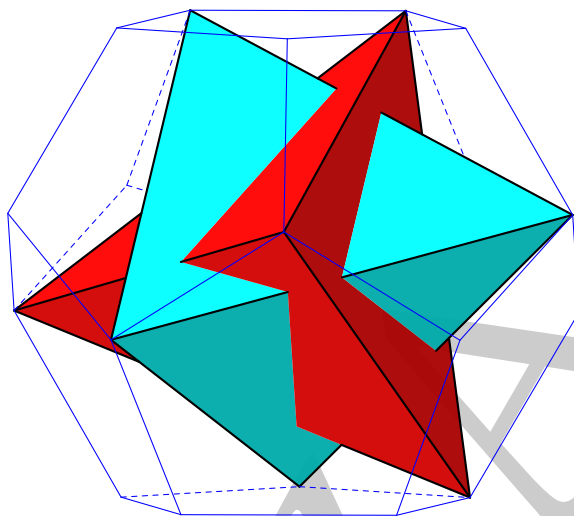


Figura 6.11.: *Due tetraedri sovrapposti inscritti in un dodecaedro, in due cubi diversi e senza alcun vertice comune*

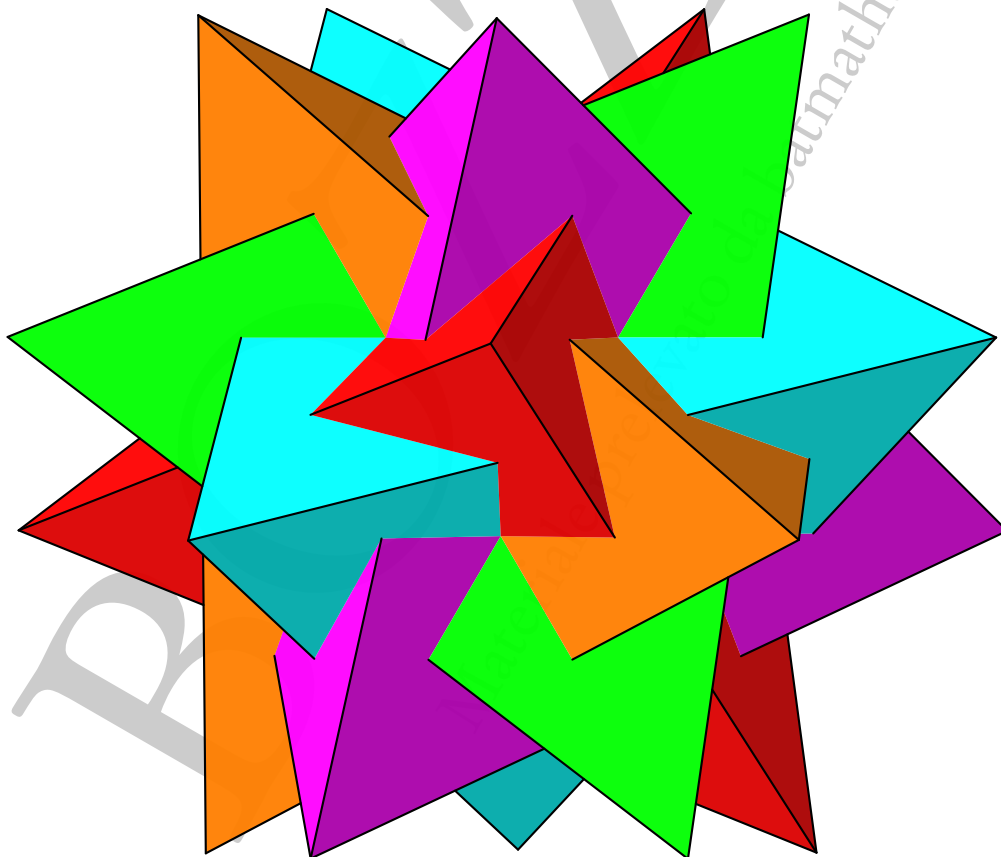


Figura 6.12.: *Cinque tetraedri sovrapposti inscritti in un dodecaedro, in cinque cubi diversi e senza alcun vertice comune*

Per quanto riguarda il poliedro ottenuto sovrapponendo tutti i dieci tetraedri inscritti in un dodecaedro, la figura che si ottiene, chiamata “Composto di dieci tetraedri”, è decisamente complessa: la proponiamo nella figura 6.13. Si notino le differenze tra il poliedro composto di cinque tetraedri e quello composto di dieci tetraedri, in particolare per quanto riguarda le intersezioni tra le varie facce e spigoli dei singoli componenti: nel caso di cinque tetraedri si hanno intersezioni tra spigoli e facce, ma non intersezioni tra gli spigoli; nel caso di dieci tetraedri si hanno intersezioni tra i vari spigoli e anche sovrapposizioni parziali delle facce.

Per maggiore chiarezza, comunque, tenendo conto che in un dodecaedro i cinque cubi inscritti hanno a due a due due vertici in comune, osserviamo che in ogni vertice concorreranno due dei dieci tetraedri inscritti, appartenenti a due cubi diversi. La figura 6.14 illustra questa situazione, particolarmente significativa, in quanto mostra la differenza con quella illustrata nella figura 6.11 relativa a tetraedri con vertici non in comune.

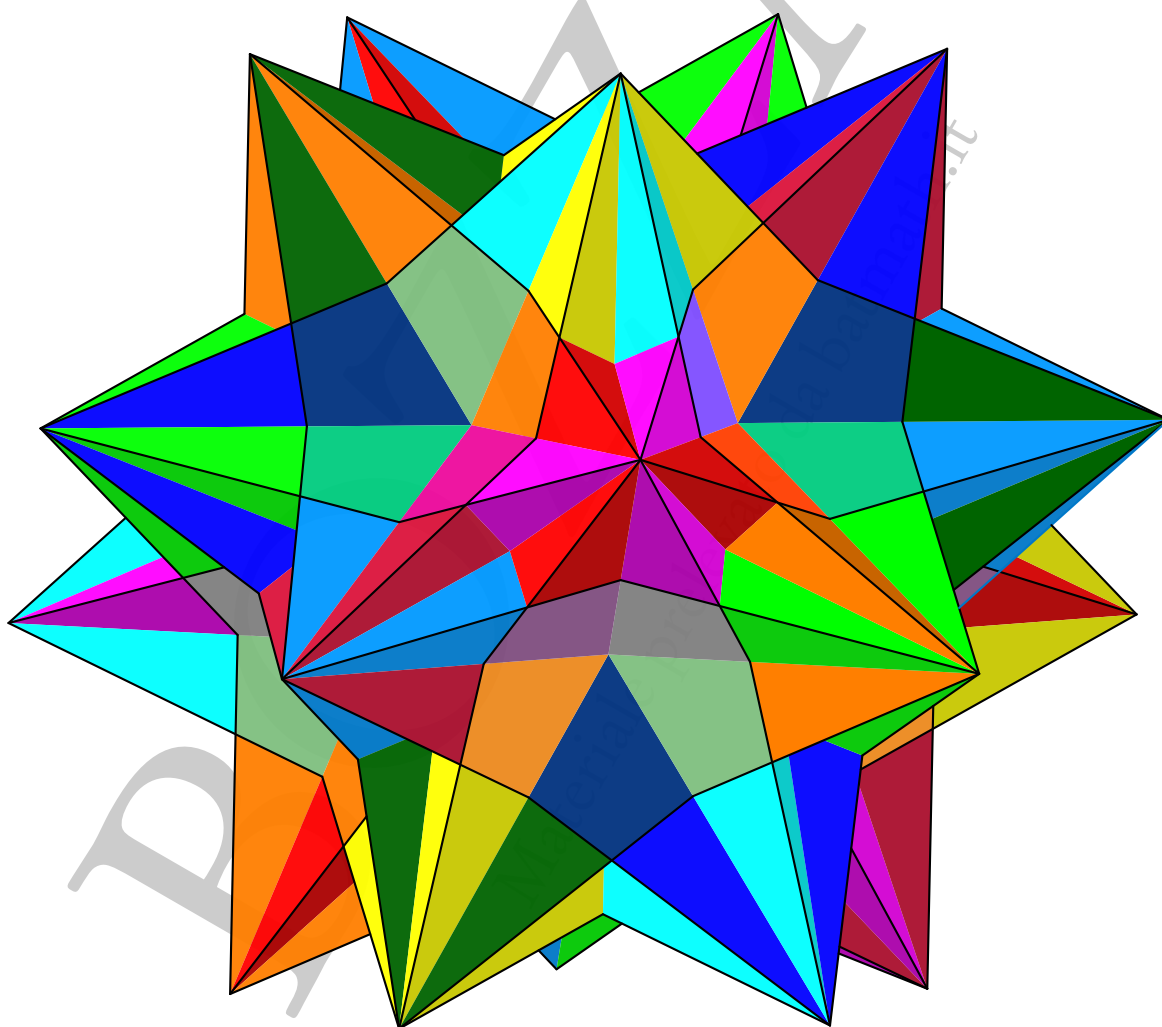


Figura 6.13.: Dieci tetraedri inscritti in un dodecaedro a formare il poliedro “Composto di dieci tetraedri”

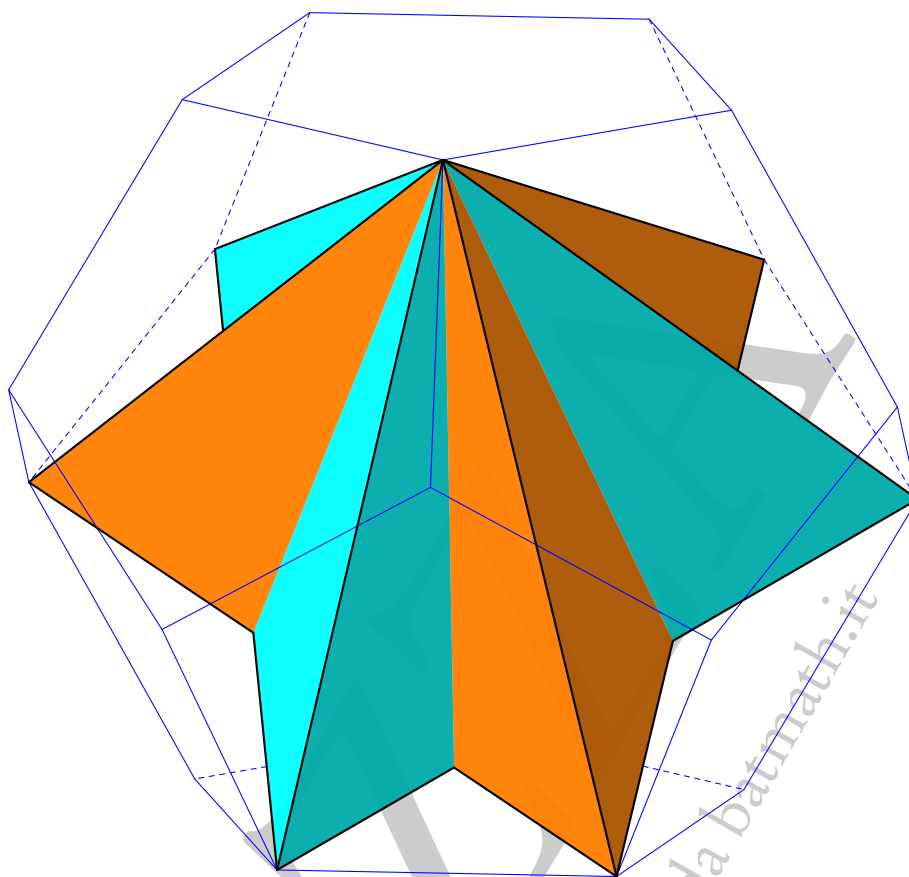


Figura 6.14.: Due tetraedri inscritti in un dodecaedro, con un vertice in comune

6.2.4. Ottaedri intorno a un icosaedro

Consideriamo un ottaedro regolare e scegliamo un punto su ciascuno dei suoi dodici spigoli, in modo da dividere ogni spigolo in rapporto aureo⁽¹⁾, cioè in modo tale che il rapporto tra la parte maggiore e la parte minore sia

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ci sono due punti su ogni spigolo che soddisfano questa condizione: scegliamo indifferentemente uno dei due e procediamo poi coerentemente su tutti gli spigoli in modo tale che, su ogni faccia dell'ottaedro, i tre punti scelti siano vertici di un triangolo equilatero, come mostrato nella figura 6.15 dove sono evidenziati in rosso i quattro triangoli così ottenuti nelle quattro facce visibili dell'ottaedro. Otterremo in totale dodici punti che sono i vertici di un icosaedro che si può dire “inscritto” nell'ottaedro, nel senso che otto delle sue venti facce triangolari sono parti delle facce triangolari dell'ottaedro. Come

⁽¹⁾Il rapporto aureo interviene pesantemente in tutte le questioni che riguardano il dodecaedro e l'icosaedro: ne ripareremo trattando le costruzioni e le proprietà metriche di questi solidi, vedi il paragrafo 7.1.4 di questo capitolo.

mostra chiaramente la figura 6.15, in ogni vertice dell'ottaedro concorrono due parti maggiori e due parti minori di spigoli.

È opportuno osservare che questo sistema costituisce un efficiente metodo di costruzione di un icosaedro.

Detto in altri termini: se si considerano otto facce opportunamente scelte tra le venti facce di un icosaedro, le intersezioni dei piani che le contengono individuano le otto facce di un ottaedro, che si può dire “costruito intorno all'icosaedro”. Esistono cinque ottaedri diversi costruibili in questo modo attorno ad un icosaedro: la loro sovrapposizione produce quello che viene chiamato “Composto di cinque ottaedri”, ed è rappresentato nella figura 6.16.

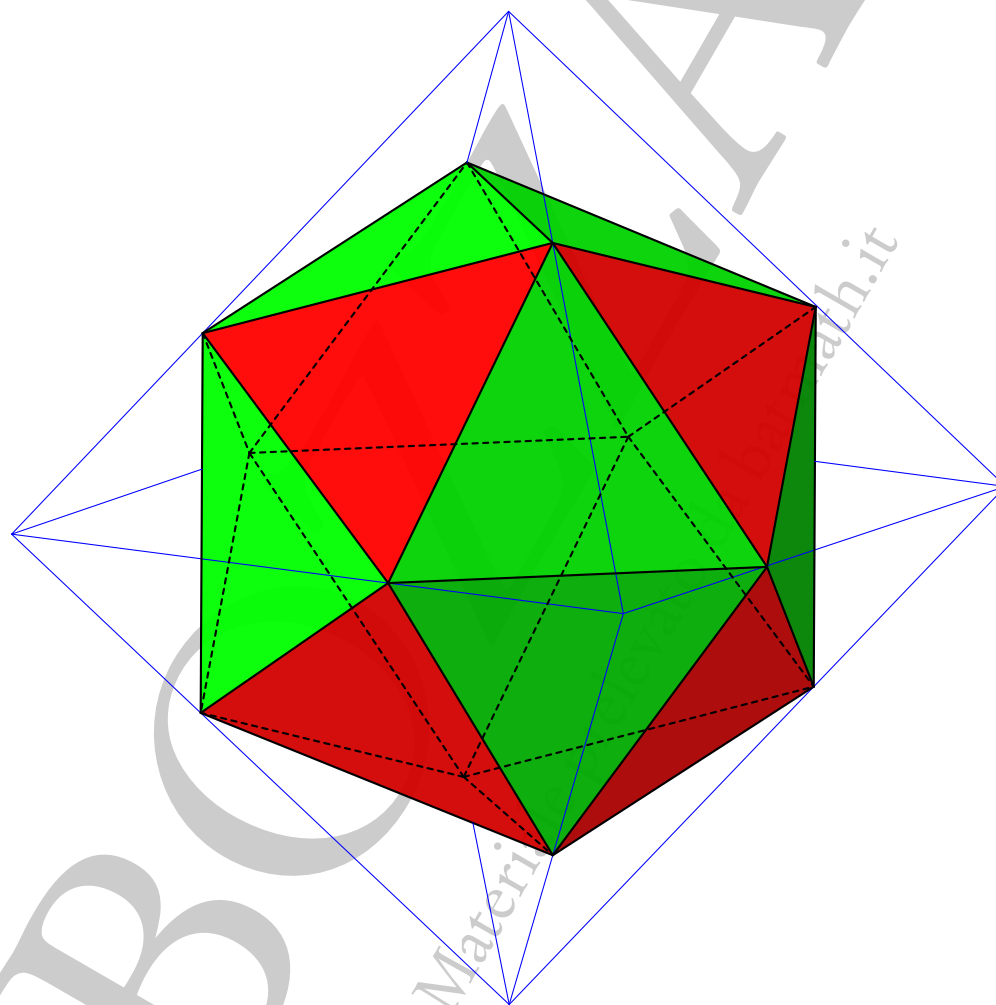


Figura 6.15.: Un ottaedro “intorno” a un icosaedro

Notiamo anche, per concludere, che, poiché esistono due distinti tetraedri intorno ad un ottaedro come mostra la stella octangula, ci saranno anche dieci tetraedri intorno a un icosaedro: la figura completa risulta particolarmente complessa e una sua rappresentazione grafica è poco significativa, in quanto di difficile comprensione.

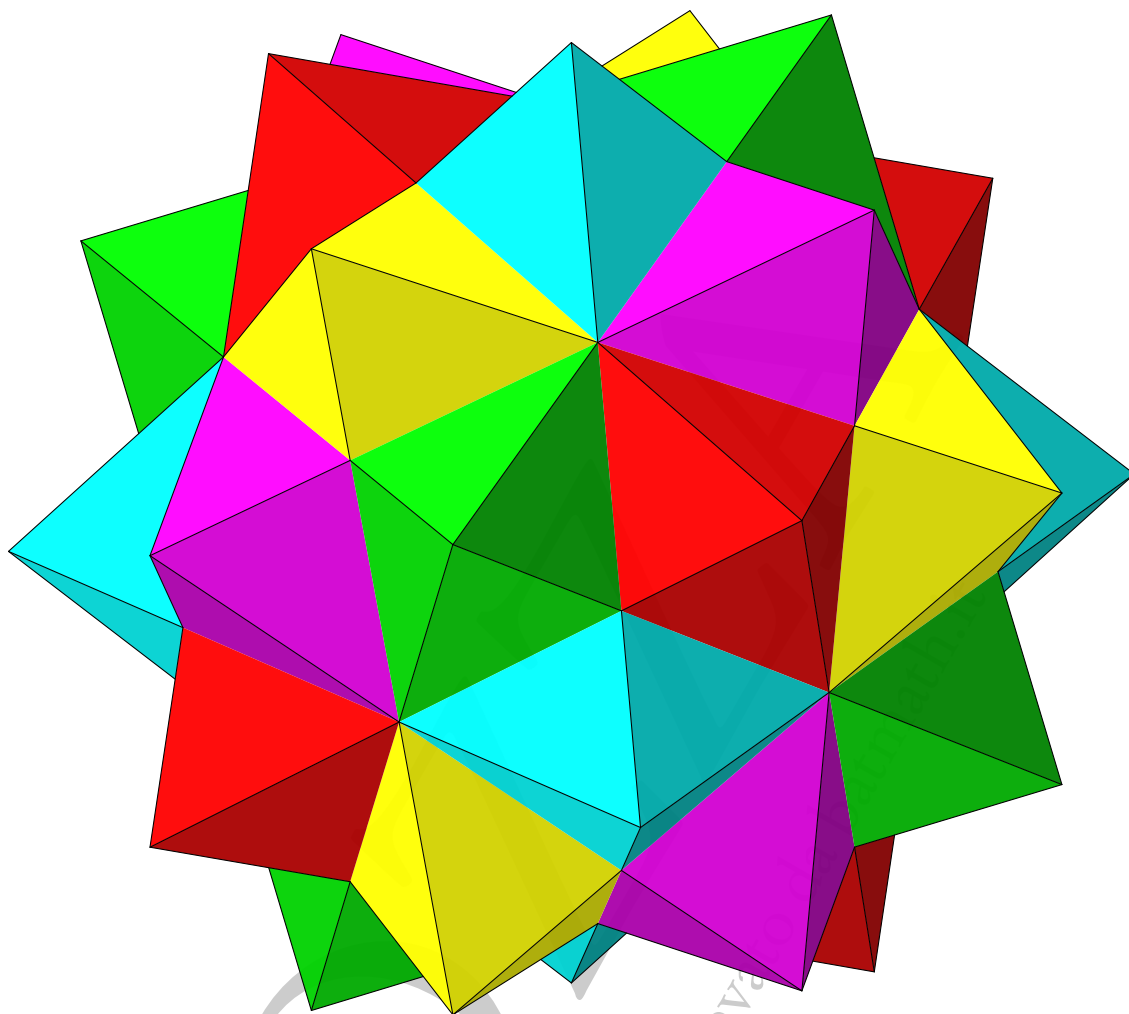


Figura 6.16.: Cinque ottaedri intorno a un icosaedro: il “Composto di cinque ottaedri”

6.3. Poliedri composti

Un poliedro composto è una disposizione di un certo numero di poliedri interpenetrantisi. Esistono naturalmente infinite possibilità, e non è possibile farne un elenco o uno studio dettagliato. Non esiste a questo proposito una nomenclatura standard. Le situazioni più interessanti che coinvolgono i solidi platonici sono i cosiddetti *composti regolari*, tutti basati sulle relazioni tra i solidi platonici che abbiamo considerato nel paragrafo 6.2 e i composti di un poliedro con il suo duale, naturalmente in posizioni opportune.

Il primo gruppo è costituito dai cinque casi seguenti, già trattati:

1. Due tetraedri in un cubo, ovvero la stella octangula. Vedi, per esempio, la figura 6.5.
2. Cinque cubi in un dodecaedro, ovvero il “composto di cinque cubi”. Vedi la figura 6.10.
3. Cinque tetraedri in un dodecaedro, ovvero il “composto di cinque tetraedri”. Vedi la figura 6.12.

4. Dieci tetraedri in un dodecaedro, ovvero il “composto di dieci tetraedri”. Vedi la figura 6.13.
5. Cinque ottaedri intorno a un icosaedro, ovvero il “composto di cinque ottaedri”. Vedi la figura 6.16.

Questi cinque poliedri godono di notevoli proprietà di simmetria, simili a quelle dei solidi platonici. In particolare sono omogenei su vertici, spigoli e facce: per ogni coppia vertici, spigoli o facce esiste una simmetria del poliedro che sposta il primo elemento nel secondo.

Il secondo gruppo comprende tre poliedri:

1. Il composto di due tetraedri, ovvero la stella octangula. Poiché il tetraedro è duale di se stesso, questo solido fa parte sia del primo gruppo che del secondo e ne abbiamo già ampiamente discusso.
2. Il composto di un cubo e di un ottaedro, illustrato nella figura 6.17.
3. Il composto di un dodecaedro e di un icosaedro, illustrato nella figura 6.18.

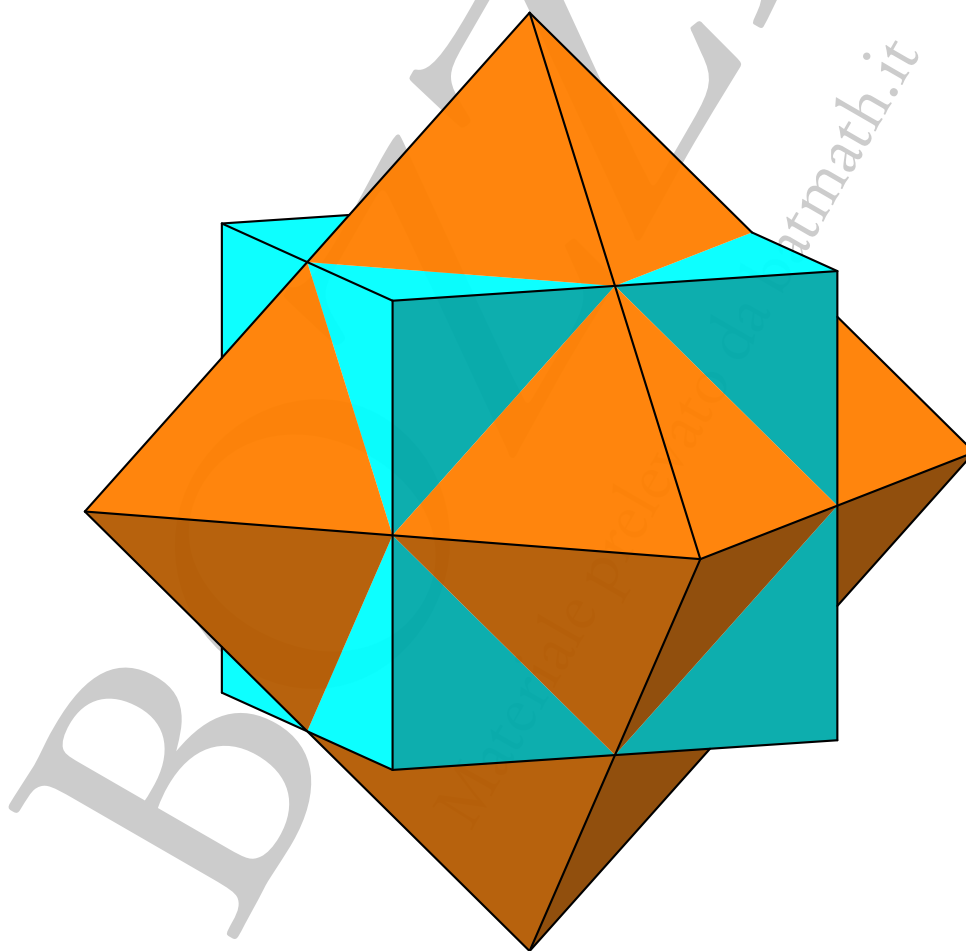


Figura 6.17.: Poliedro composto di un cubo e un ottaedro

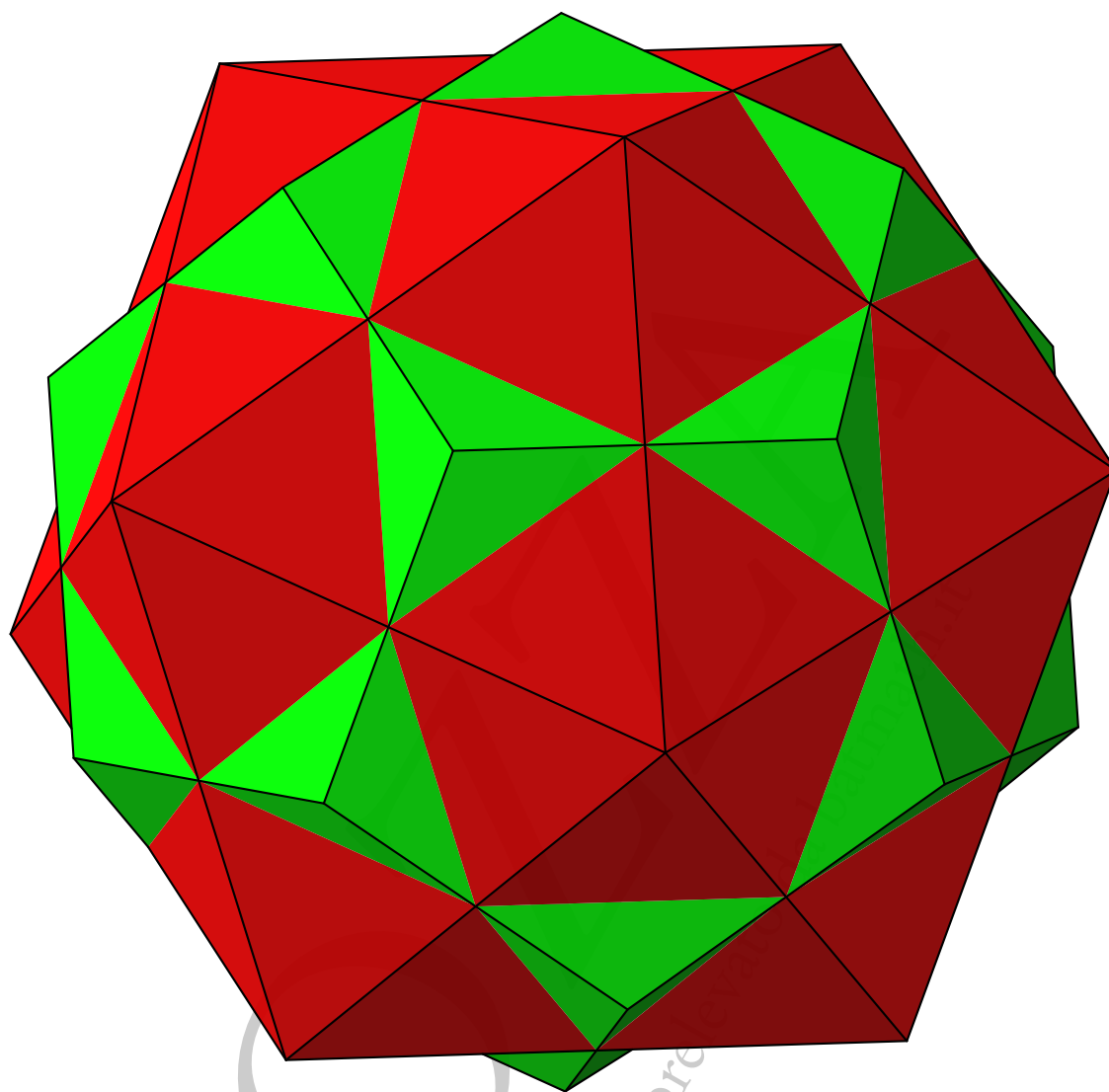


Figura 6.18.: *Poliedro composto da un dodecaedro e un icosaedro*

I poliedri proposti nelle figure 6.17 e 6.18, come pure la stella octangula si riferiscono alla composizione dei poliedri in posizione tale da rispettare le simmetrie presenti nelle dualità, come si può constatare esaminando le figure proposte nel paragrafo 6.1 di questo capitolo: si tratta delle situazioni comunemente considerate in letteratura.

Come già accennato, esistono naturalmente infinite possibilità, anche graficamente interessanti, per costruire nuovi poliedri componendo in maniera opportuna i poliedri regolari e non è possibile una trattazione esaustiva.

Nelle figure 6.19 e 6.20 proponiamo, a titolo d'esempio, solamente due situazioni, entrambe costruite con quattro cubi identici: risulta evidente come si possano ottenere poliedri radicalmente diversi variando la relative posizioni dei poliedri componenti.

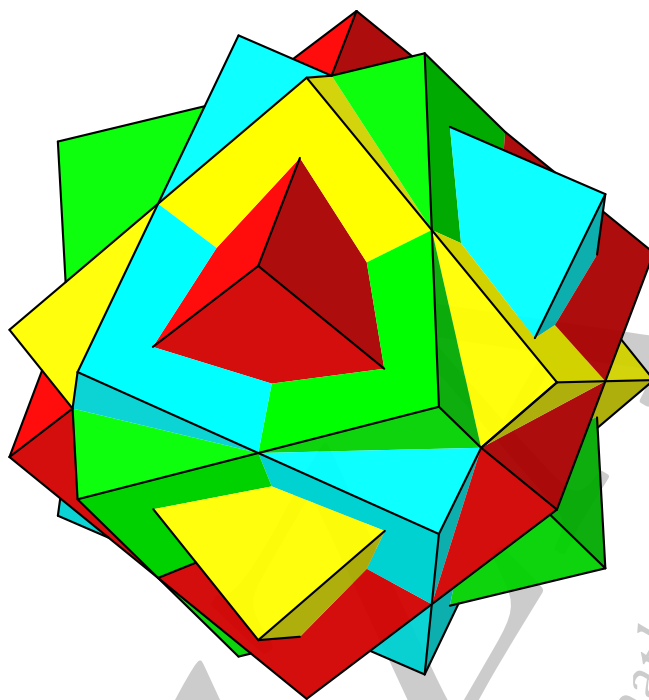


Figura 6.19.: *Poliedro composto da quattro cubi, prima versione*

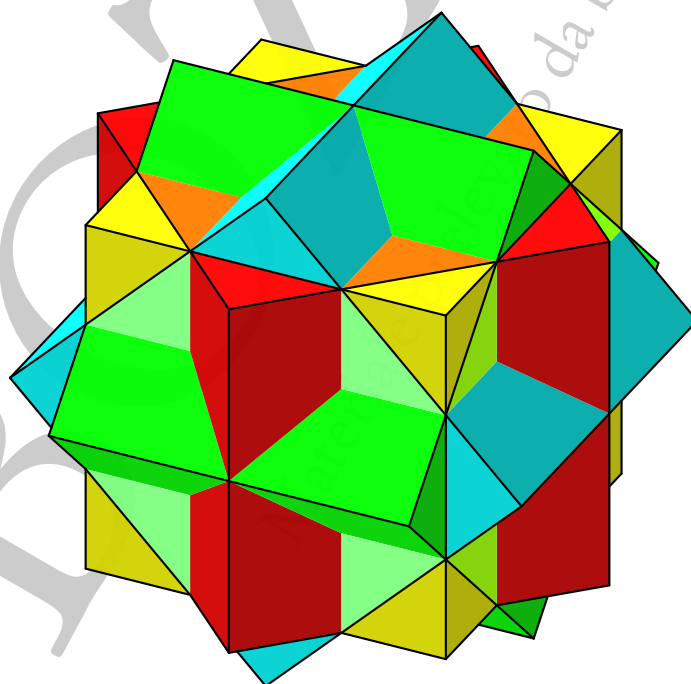


Figura 6.20.: *Poliedro composto da quattro cubi, seconda versione*

7. Costruzione dei poliedri regolari

Ci occupiamo in questo capitolo della costruzione dei poliedri regolari, proponendo alcune delle tecniche possibili, a cominciare da quelle discusse da Euclide nei suoi *Elementi*. Come al solito tratteremo quasi esclusivamente dell'aspetto grafico rimandando ai testi specializzati per la dimostrazione della coerenza delle costruzioni presentate.

7.1. Le costruzioni di Euclide

Come già menzionato, vedi il capitolo 1, la prima costruzione almeno di alcuni dei poliedri regolari è dovuta quasi sicuramente alla scuola Pitagorica. Proclo (410-485 d.C.) a proposito di Pitagora afferma: “Egli scoprì il fatto degli irrazionali e la costruzione delle figure cosmiche”. Tuttavia è a Teeteto (415-369 a.C.) che viene attribuita con certezza la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro e la costruzione effettiva dei cinque solidi. Euclide, sicuramente utilizzando tutti i lavori dei suoi predecessori, nel XIII libro dei suoi *Elementi* presenta una dettagliata costruzione di questi cinque solidi, proponendosi sempre di inscrivere in una sfera di dato diametro e determinando anche il rapporto tra lo spigolo del poliedro inscritto e il diametro della sfera circoscritta.

Proponiamo di seguito lo schema delle costruzioni euclidee, semplificate al massimo e opportunamente adattate in termini moderni: per le relative dimostrazioni rimandiamo alle numerose versioni anche on-line degli *Elementi* o di loro parti, oppure allo splendido testo di Acerbi [1].

Le costruzioni di Euclide sono contenute nelle Proposizioni 13, 14, 15, 16 e 17 del Libro XIII e ognuna ha la seguente forma:

“Costruire un ... e inscrivere in una data sfera e provare che ...”

dove al posto dei primi puntini c'è uno dei poliedri e al posto dei secondi puntini una opportuna relazione tra il diametro della sfera data e lo spigolo di ciascun poliedro.

Segue, nella proposizione 18, una specie di riassunto dei risultati ottenuti con la costruzione dello spigolo dei vari poliedri e il confronto tra i diversi valori.

7.1.1. Il tetraedro regolare

Consideriamo, vedi la figura 7.1, una sfera di diametro $\overline{AB}$. Si divida $\overline{AB}$ in due parti $\overline{AC}$ e $\overline{CB}$, in modo che $\overline{AC}$ sia il doppio di $\overline{CB}$. Sul diametro $\overline{AB}$ si costruisca una semicirconferenza γ e da C si innalzi, nel piano della semicirconferenza γ , la perpendicolare ad $\overline{AB}$ fino ad incontrare in D la semicirconferenza. Considerato il piano π per D e perpendicolare ad $\overline{AB}$, sia δ la circonferenza intersezione tra la sfera data e π . Si inscriba in δ il triangolo equilatero DEF: i punti A, DB, E ed F sono i vertici del tetraedro cercato.

Da questa costruzione, come lo stesso Euclide prova, segue subito che il quadrato del diametro della sfera circoscritta è una volta e mezzo il quadrato dello spigolo del tetraedro.

Euclide chiama questo solido semplicemente una *piramide*; nell'antica Grecia tuttavia si usa regolarmente il termine *piramide* anche per tetraedro. In modo simile si usa spesso il termine *tetragono* sia per indicare un generico quadrilatero che il quadrato, a seconda del contesto.

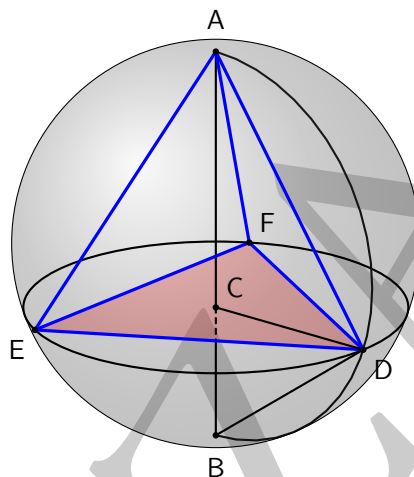


Figura 7.1.: La costruzione del tetraedro regolare inscritto in una sfera secondo Euclide

7.1.2. Il cubo o esaedro regolare

Riprendendo in esame la costruzione del tetraedro regolare, vedi la figura 7.1, consideriamo il segmento $\overline{BD}$: esso è il lato del cubo inscritto nella sfera data. Per costruire il cubo basta allora costruire un quadrato $EFGH$, con lato pari a $\overline{BD}$ e da esso innalzare perpendicolarmente al suo piano quattro segmenti $\overline{EK}$, $\overline{FL}$, $\overline{GM}$ e $\overline{HN}$, tutti uguali a $\overline{BD}$. Si otterranno così gli altri quattro vertici del cubo.

Se si desidera realizzare la costruzione direttamente nella sfera data, basta inscrivere il quadrato $EFGH$ nella circonferenza ottenuta sezionando la sfera con un piano π a distanza $|\overline{OT}| = |\overline{BD}|/2$ dal suo centro. Si veda la figura 7.2.

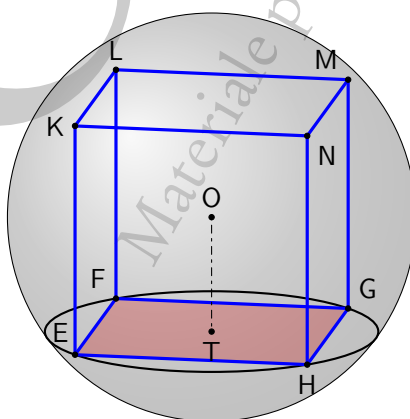


Figura 7.2.: La costruzione del cubo inscritto in una sfera secondo Euclide

Dalla costruzione segue facilmente che il quadrato del diametro della sfera circoscritta è il triplo del quadrato dello spigolo del cubo.

7.1.3. L'ottaedro regolare

Considerata di nuovo una sfera di diametro $\overline{AB}$, sia C il centro della sfera e si consideri una semicirconferenza costruita su $\overline{AB}$. Se D è la proiezione ortogonale di C sulla semicirconferenza, $\overline{AD}$, oppure $\overline{BD}$ è il lato dell'ottaedro cercato. Per la costruzione effettiva basta costruire il quadrato $DEFG$ inscritto nell'arco di cerchio massimo passante per D e ortogonale ad $\overline{AB}$. I punti A, B, D, E, F e G sono i vertici del poliedro.

Dalla costruzione fatta segue poi che il quadrato del diametro della sfera circoscritta è doppio del quadrato dello spigolo dell'ottaedro.

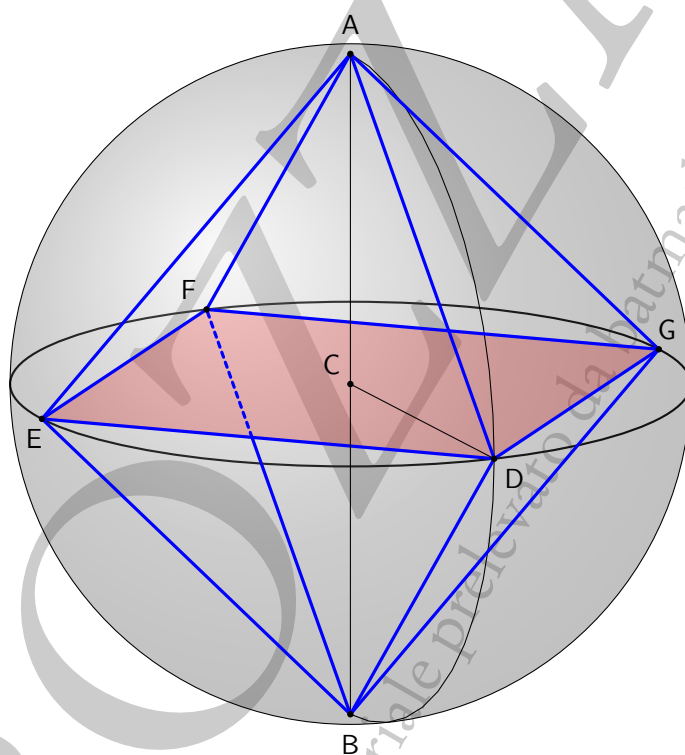


Figura 7.3.: La costruzione dell'ottaedro regolare inscritto in una sfera secondo Euclide

7.1.4. Il dodecaedro regolare

Mentre la costruzione del tetraedro, del cubo, dell'ottaedro e dell'icosaedro inizia partendo da una sfera e dal suo diametro, quella del dodecaedro inizia partendo da un cubo. Inoltre è indispensabile per questa costruzione la costruzione della *sezione aurea* di un segmento: per questo motivo ne premettiamo la definizione e la costruzione con riga e compasso.

Definizione 7.1. Dato un segmento $\overline{AB}$, si chiama sua *sezione aurea* il segmento $\overline{AS}$ che è medio proporzionale fra l'intero segmento e la parte rimanente $\overline{SB}$.

La terminologia utilizzata da Euclide, anche nella costruzione del dodecaedro, è: *divisione del segmento $\overline{AB}$ in rapporto estremo e medio*.

Se il segmento $\overline{AB}$ ha lunghezza l , per la lunghezza x di $\overline{AS}$ si trova

$$l : x = x : (l - x).$$

Da qui si deduce subito che

$$x = |\overline{AS}| = l \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Il rapporto φ tra $|\overline{AS}|$ e $|\overline{SB}|$ si chiama *rapporto aureo* e gioca un ruolo molto importante nei problemi relativi al dodecaedro e all'icosaedro, oltre ad avere applicazioni in numerosi altri campi; il suo valore è

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \simeq 1.618.$$

La costruzione con riga e compasso della sezione aurea di un segmento si può fare con una idea sostanzialmente presa dagli Elementi di Euclide, ed è illustrata (senza commenti) nella figura 7.4, dove $\overline{AB}$ è il segmento dato, e $\overline{BC}$, perpendicolare ad $\overline{AB}$ è uguale a $\overline{AB}/2$.

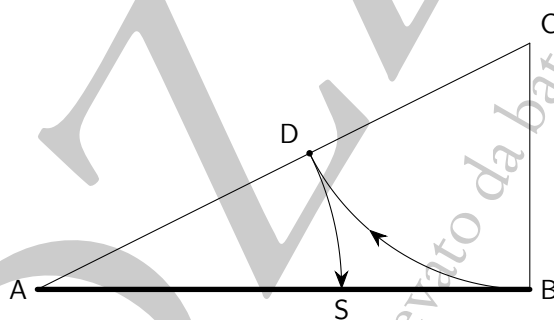


Figura 7.4.: Costruzione della sezione aurea

E veniamo alla costruzione del dodecaedro.

Data la sfera di centro O , se ne costruisca il cubo inscritto secondo la procedura descritta nel paragrafo 7.1.2. Si considerino due facce del cubo adiacenti e quindi tra di loro perpendicolari, come le facce $ABCD$ e $BCFE$ della figura 7.5. Si dividano le due facce mediante i segmenti mediani $\overline{GK}$, $\overline{LH}$, $\overline{NP}$ e $\overline{HM}$ e siano Q ed I i centri delle due facce. Siano poi $\overline{IR}$, $\overline{IS}$ e $\overline{TQ}$ rispettivamente le sezioni auree di $\overline{IN}$, $\overline{IP}$ e $\overline{HQ}$. Si innalzino i punti R , S e T in U , V e W rispettivamente in modo che $\overline{RU} = \overline{RI}$, $\overline{SV} = \overline{SI}$ e $\overline{TW} = \overline{TQ}$. I punti U , V , C , W e B sono, nell'ordine, i cinque vertici di una delle facce poligonali del dodecaedro. Ripetendo la costruzione con le altre coppie di facce adiacenti del cubo si ottengono tutti i vertici del dodecaedro.

Il dodecaedro così costruito è inscritto nella stessa sfera in cui era inscritto il cubo iniziale.

In questo caso il rapporto tra il quadrato del diametro della sfera circoscritta e il quadrato dello spigolo è espresso da un numero irrazionale e non è più razionale come nei casi di tetraedro, cubo e ottaedro.

La figura 7.5 riporta lo schema della costruzione relativamente a una coppia di facce adiacenti, mentre la figura 7.6 riporta la costruzione completa, con evidenziazione anche della sfera circoscritta.

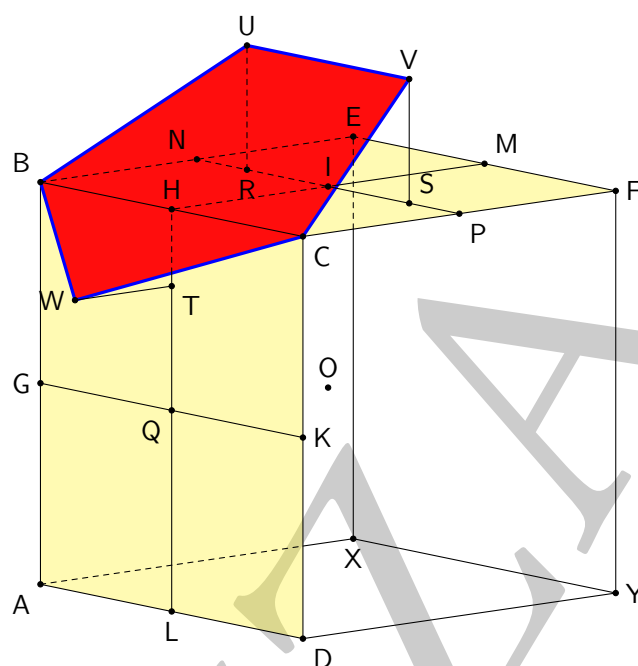


Figura 7.5.: La costruzione del dodecaedro regolare secondo Euclide

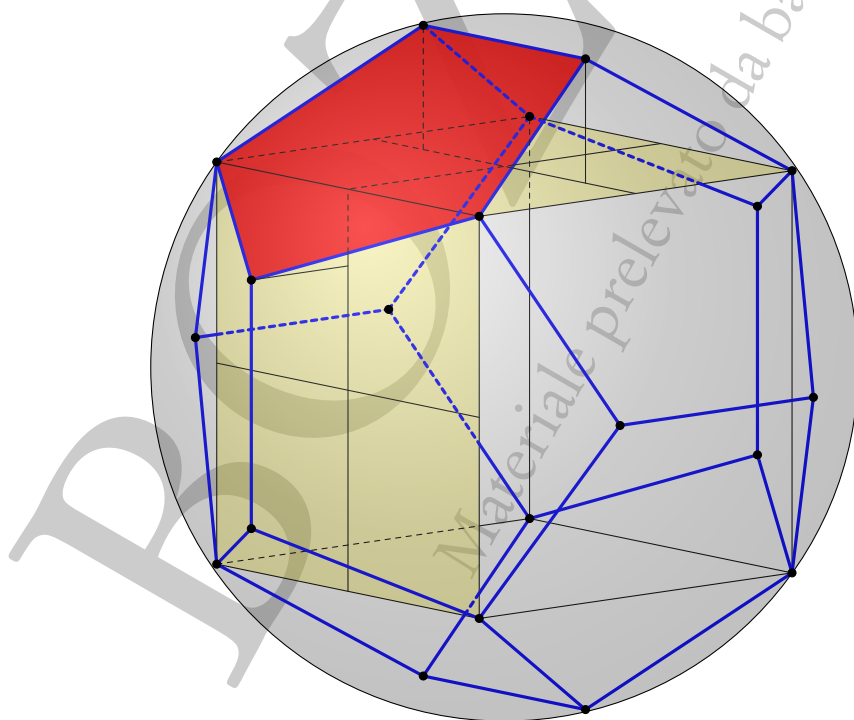


Figura 7.6.: La costruzione del dodecaedro regolare secondo Euclide: la figura completa

Si noti come questa costruzione possa essere considerata come la costruzione di un dodecaedro circoscritto a un cubo, o anche come l'applicazione di dodici pentagoni ai dodici spigoli del cubo. Dalla costruzione effettuata segue immediatamente che se si invertono i ruoli delle due facce adiacenti del cubo si ottiene un secondo dodecaedro circoscritto al cubo: esistono due dodecaedri circoscritti a un dato cubo.

7.1.5. L'icosaedro regolare

Sia $\overline{AB}$ un diametro della sfera data, vedi la figura 7.7, e lo si divida con il punto C in modo che $\overline{AC}$ sia quattro volte $\overline{CB}$. Considerata una circonferenza γ di diametro $\overline{AB}$, si proietti ortogonalmente su di essa C nel punto D . Tirata, nel piano di γ , la perpendicolare per B ad $\overline{AB}$, si riporti su di essa il punto D in E , in modo che $\overline{BD} = \overline{BE}$. Tirata da E la parallela ad $\overline{AB}$, sia M la sua prima intersezione con la circonferenza γ e quindi con la sfera data. Ebbene, $\overline{BM}$ è lo spigolo dell'icosaedro cercato. Individuato il punto R diametralmente opposto ad M , siano F e G le proiezioni di M ed R sul diametro $\overline{AB}$. Si costruiscano le circonferenze di raggio $\overline{MF}$ ed $\overline{RG}$ perpendicolarmente al diametro $\overline{AB}$ e si inscrivano in esse due pentagoni regolari aventi un vertice in M ed R rispettivamente. I dieci vertici dei pentagoni, unitamente ai due punti A e B sono i dodici vertici dell'icosaedro, come mostrato nella figura 7.8.

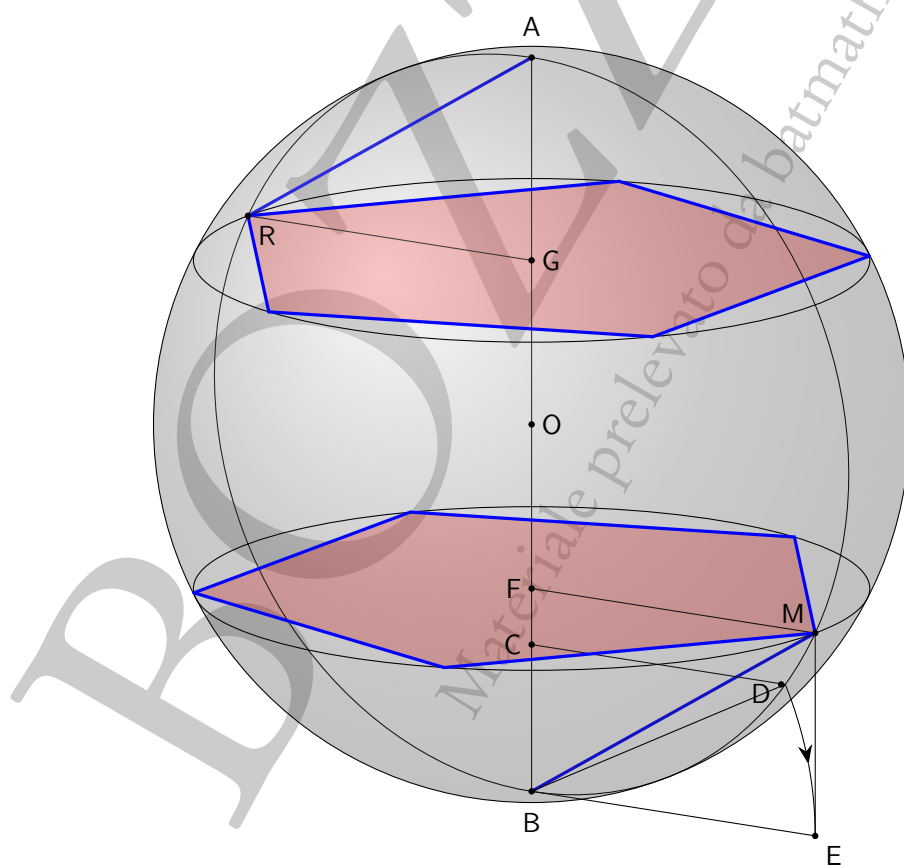


Figura 7.7.: Schema della costruzione dell'icosaedro regolare secondo Euclide

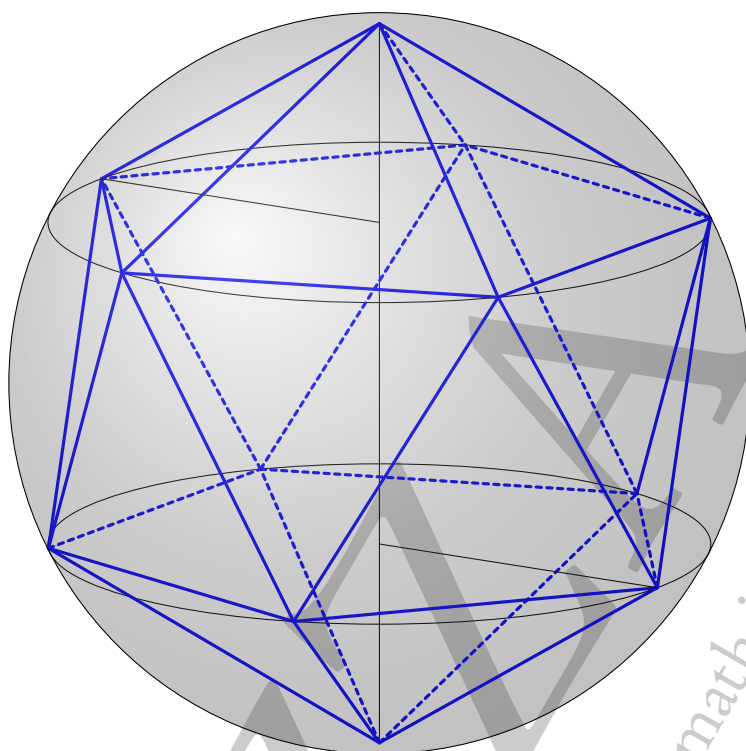


Figura 7.8.: *L'icosaedro costruito secondo Euclide*

Anche in questo caso il rapporto tra il quadrato del diametro della sfera circoscritta e il quadrato dello spigolo dell'icosaedro è un numero irrazionale.

7.2. Altre costruzioni

Oltre alle costruzioni proposte da Euclide, sono innumerevoli le tecniche possibili per costruire i poliedri regolari. Ne proporremo di seguito alcune, in particolare per il dodecaedro e l'icosaedro. Segnaliamo che già la dualità può essere considerata una tecnica per costruire uno dei poliedri a partire dal suo duale.

7.2.1. Il dodecaedro regolare

La tecnica elaborata da Euclide per costruire il dodecaedro regolare può essere presentata in una forma molto più intuitiva, almeno nella successione dei passi, come segue.

Si considerino due pentagoni regolari aventi il lato $\overline{AB}$ in comune, come nella figura 7.9. Si ritaglino i due triangoli CDE ed FGH e si pieghino, attorno ad $\overline{AB}$, i due trapezi residui come indicato nella terza immagine della figura 7.9, fin quando i triangoli ritagliati si inseriscono a formare una “tenda”. Incollando opportunamente sei di queste tende sulle sei facce di un cubo avente per lato $\overline{FH}$, oppure $\overline{EC}$, cioè una diagonale dei pentagoni iniziali, come mostrato nella figura 7.10. Il poliedro ottenuto è un dodecaedro regolare, e la prova di questo fatto è esattamente la costruzione di Euclide più sopra descritta.

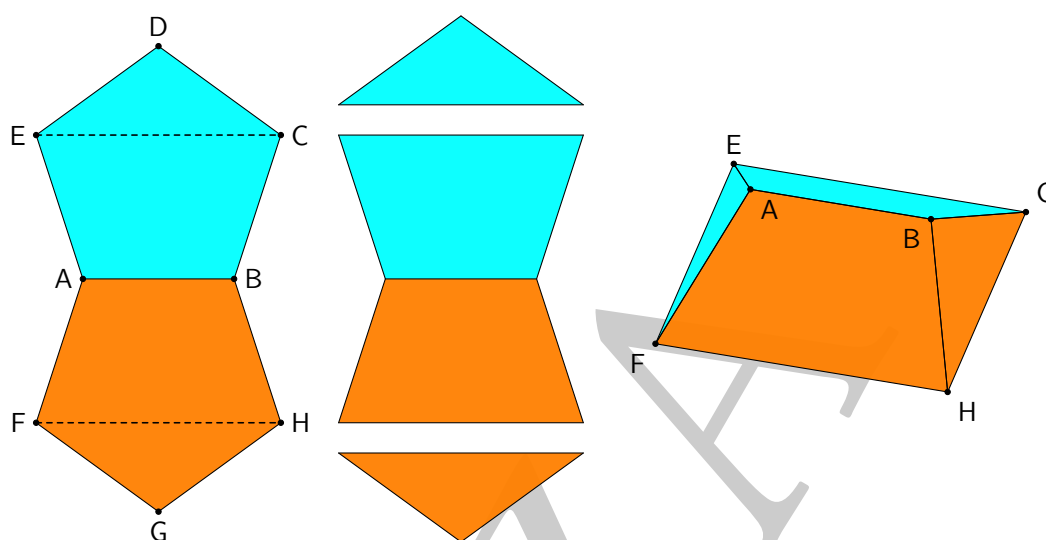


Figura 7.9.: Interpretazione alternativa della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: primi passi

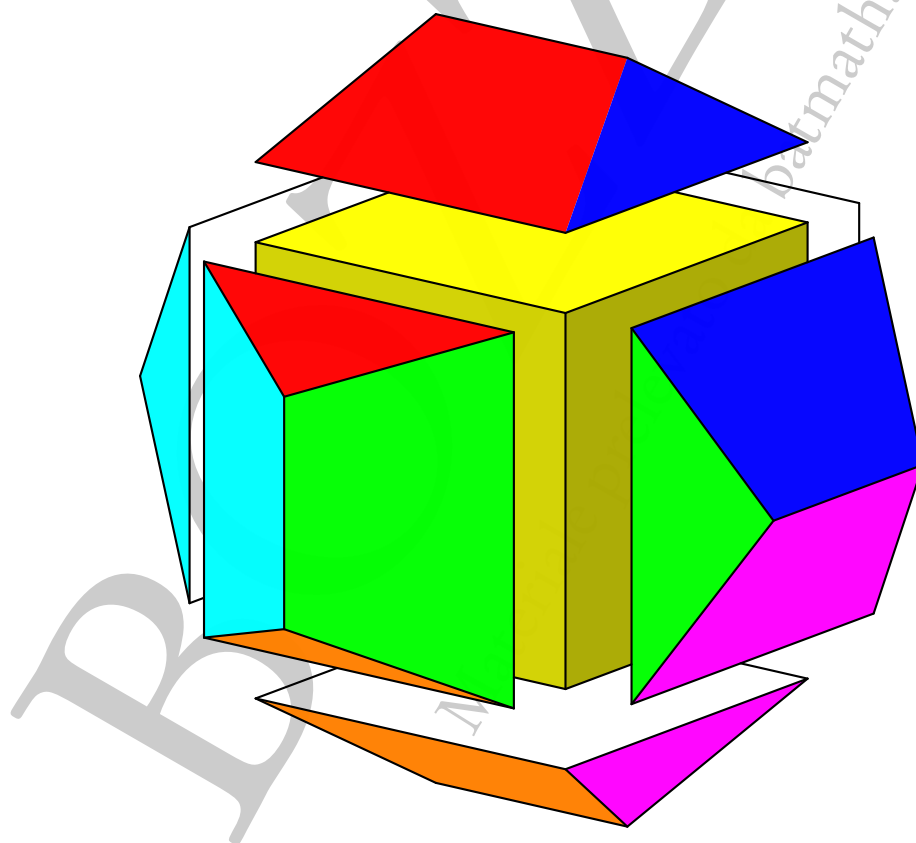


Figura 7.10.: Interpretazione alternativa della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: lo schema

Una seconda interpretazione alternativa della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare è illustrata nelle figure 7.13 e 7.14.

Prima di descriverla in dettaglio introduciamo il concetto di rettangolo aureo e di una sua variante che interessa proprio la costruzione del dodecaedro.

Definizione 7.2. *Un rettangolo si dice aureo se il rapporto tra il suo lato maggiore e il suo lato minore è uguale a φ .*

Il rettangolo aureo ha grande importanza in molte applicazioni, in particolare nell'arte e nell'architettura. Una sua particolarità esclusiva è data dal fatto che se da esso si sottrae un quadrato, come indicato nella figura 7.11, il rettangolo residuo è ancora aureo, cioè il rapporto delle sue dimensioni è ancora φ .

Il rettangolo aureo interviene direttamente nella costruzione dell'icosaedro. Per il dodecaedro ha interesse invece una sua variante, ovvero un rettangolo in cui il rapporto tra il lato maggiore e quello minore è $\varphi + 1$ anziché φ . In sostanza si tratta dello stesso rettangolo aureo a cui è stato aggiunto un quadrato sull'esterno di uno dei due lati minori, vedi la figura 7.12.

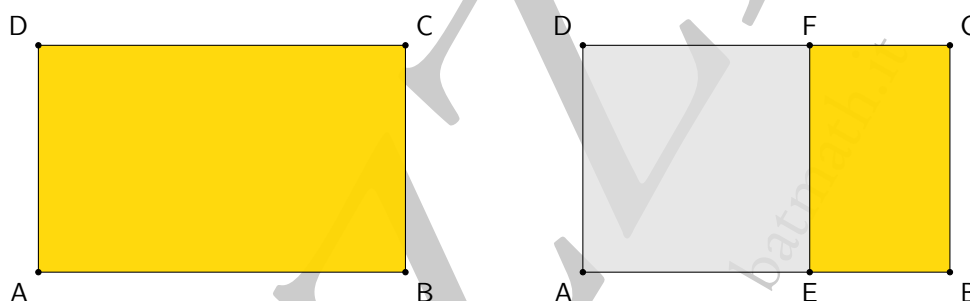


Figura 7.11.: Rettangolo aureo e sua proprietà

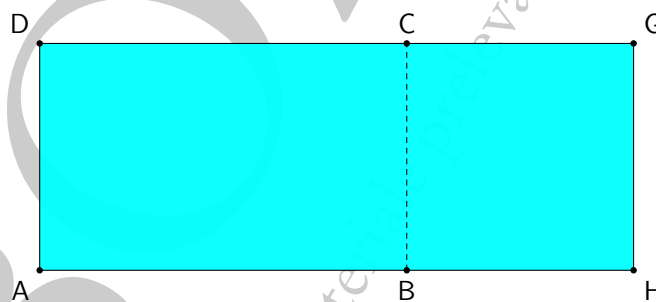


Figura 7.12.: Variante del rettangolo aureo

La costruzione è molto semplice ed è illustrata nelle figure 7.13 e 7.14. Si consideri un cubo di lato l e si costruiscano tre rettangoli con la proprietà della variante del rettangolo aureo, aventi il lato minore uguale alla sezione aurea dello spigolo del cubo e disposti come nella figura 7.13. Gli otto vertici del cubo assieme ai dodici vertici dei tre rettangoli così disposti sono i venti vertici del dodecaedro, come mostrato nella figura 7.14. Risulta evidente che si tratta della stessa costruzione di Euclide, solo presentata in forma diversa.

È interessante il fatto che questi tre rettangoli sono legati tra di loro come gli *Anelli di Borromeo*: se ne veda una rapida trattazione nell'appendice B.

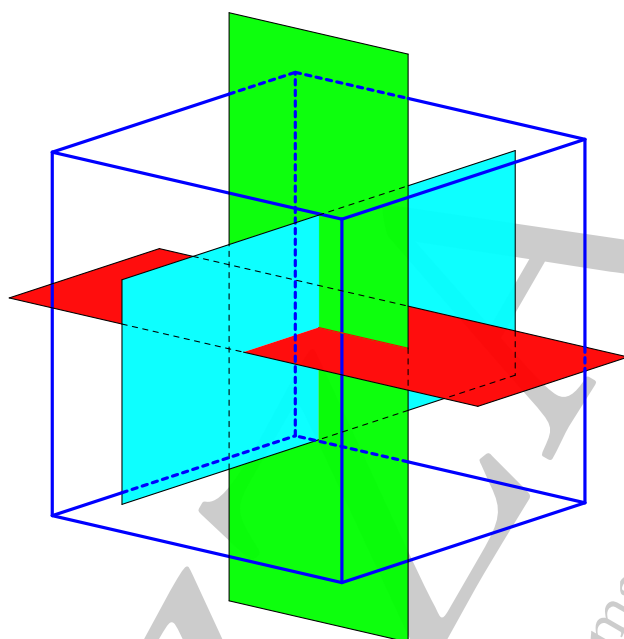


Figura 7.13.: Una seconda implementazione della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: primi passi

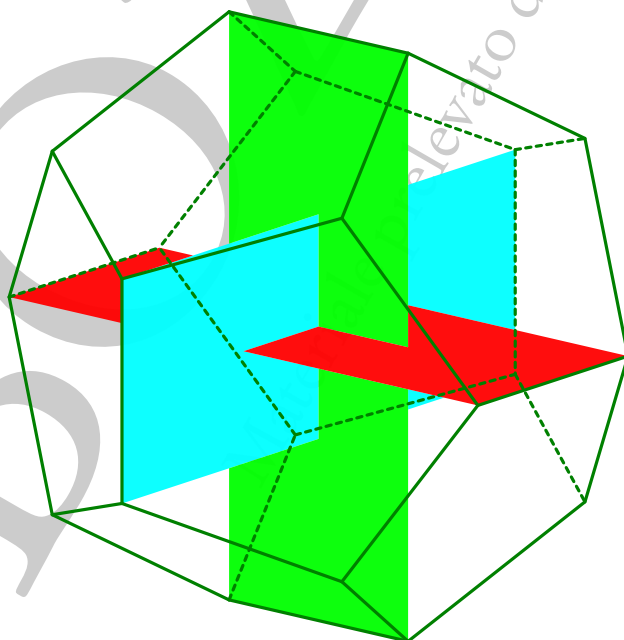


Figura 7.14.: Una seconda implementazione della costruzione di Euclide del dodecaedro regolare: la figura completa

Una diversa costruzione del dodecaedro regolare è illustrata nelle figure 7.15 e 7.16.

Con riferimento alla prima delle due si costruisca, in un piano π , il pentagono regolare PQRST e se ne traccino le diagonali individuando un secondo pentagono ABCDE: questo secondo pentagono sarà una delle dodici facce del dodecaedro da costruire. Se O è il centro comune dei due pentagoni, si innalzi da O, perpendicolarmente al piano π e in uno dei due semispazi individuati da π , la semiretta s perpendicolare a π . Nel piano individuato da s e dal punto Q si tracci un arco di circonferenza di raggio uguale a $|\overline{QT}|$ (o a una qualunque delle diagonali del pentagono iniziale) che tagli la semiretta s in V. Si costruisca poi, sul lato $\overline{QR}$, il triangolo isoscele QRV che risulta essere un triangolo aureo⁽¹⁾ e la mediana $\overline{VM}$ relativa alla base $\overline{QR}$. Nel piano di questo triangolo si tracci una circonferenza con centro in Q e raggio $\overline{QR}$ che incontri in F e G rispettivamente i lati $\overline{QV}$ e $\overline{RV}$ del triangolo QRV. Sempre nel piano di questo triangolo si tracci una circonferenza di centro R e raggio $\overline{RG}$ che intersechi la mediana $\overline{VM}$ in H.

I punti F, G e H sono altri tre vertici del dodecaedro. I rimanenti vertici si ottengono ripetendo la costruzione a partire dagli altri lati del pentagono iniziale. La figura 7.16 illustra questa costruzione, mostrando tutti i cinque triangoli aurei utilizzati.

Questa costruzione è particolarmente interessante perché evidenzia in dettaglio il profondo legame che esiste tra il dodecaedro e il rapporto aureo.

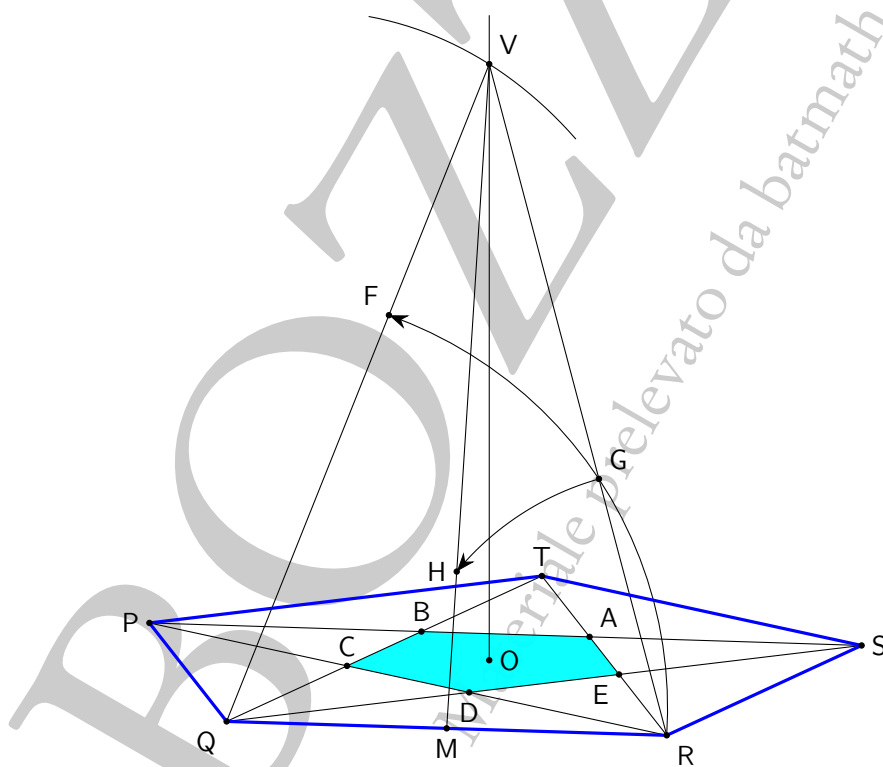


Figura 7.15.: Costruzione del dodecaedro regolare a partire da un pentagono: lo schema

¹Si dice *aureo* un triangolo isoscele tale che il rapporto tra uno dei due lati e la base sia uguale al rapporto aureo, φ . Questo triangolo ha due angoli di 72° e un angolo di 36° .

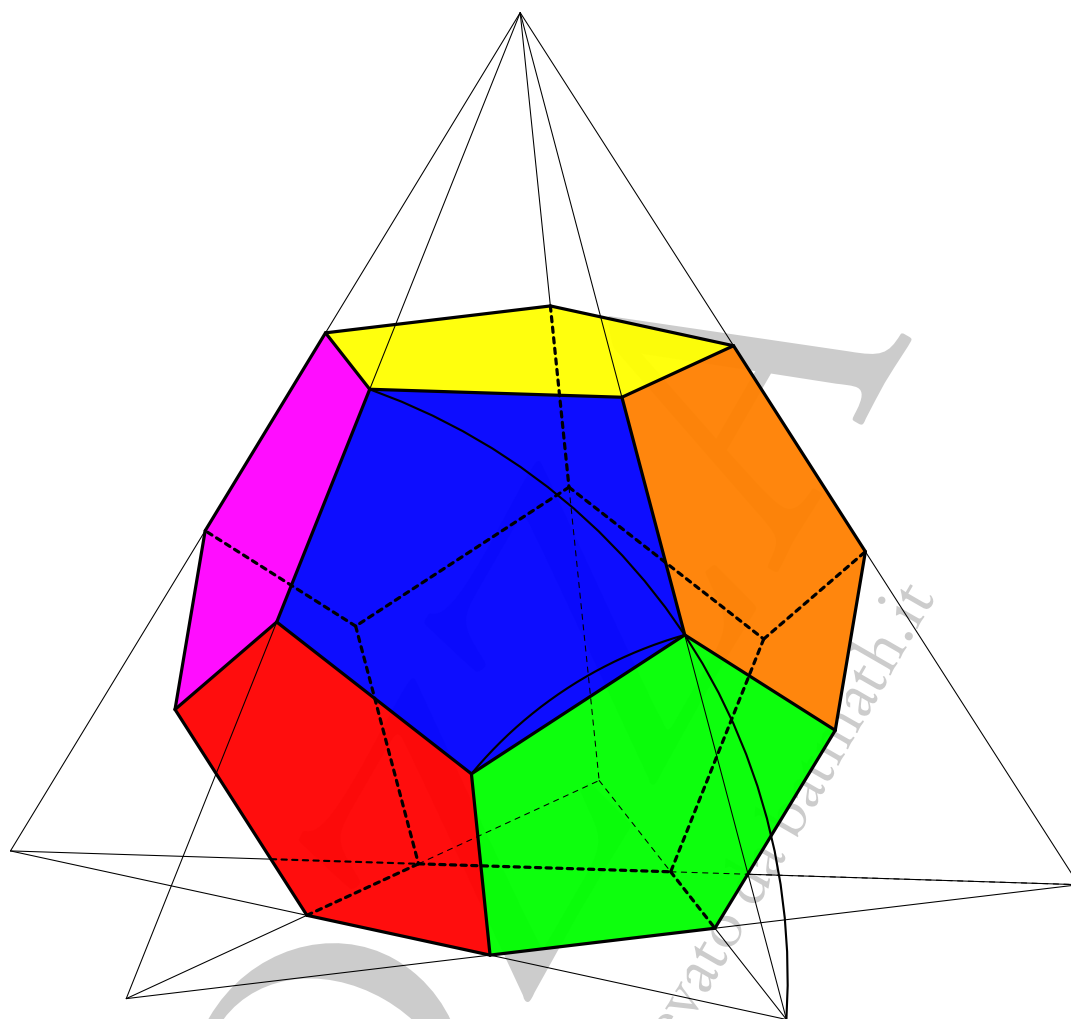


Figura 7.16.: Costruzione del dodecaedro regolare a partire da un pentagono: la figura completa

7.2.2. L'icosaedro regolare

Si consideri un cubo di lato l e si traccino sei segmenti uguali alla sezione aurea di l , ovvero di lunghezza

$$l \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

disposti al centro della sei facce del cubo, come indicato nella figura 7.17. I dodici vertici di questi sei segmenti sono i dodici vertici di un icosaedro regolare, come è mostrato nella figura 7.18.

Una diversa implementazione della stessa costruzione è illustrata nella figura 7.19: invece di partire dal cubo si possono costruire tre rettangoli aurei con la stessa disposizione già vista per il dodecaedro nella figura 7.13. I dodici vertici di questi tre rettangoli aurei sono i dodici vertici dell'icosaedro.

Anche se nella sostanza la costruzione è la stessa di quella mostrata nella figura 7.17, l'osservazione che nell'icosaedro si possono inscrivere tre rettangoli aurei è particolarmente significativa.

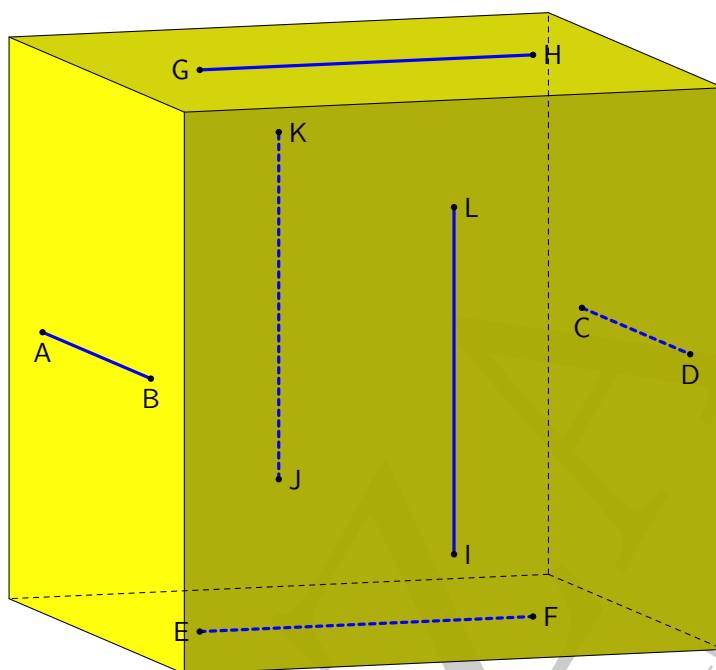


Figura 7.17.: Costruzione dell'icosaedro regolare a partire dal cubo: primi passi

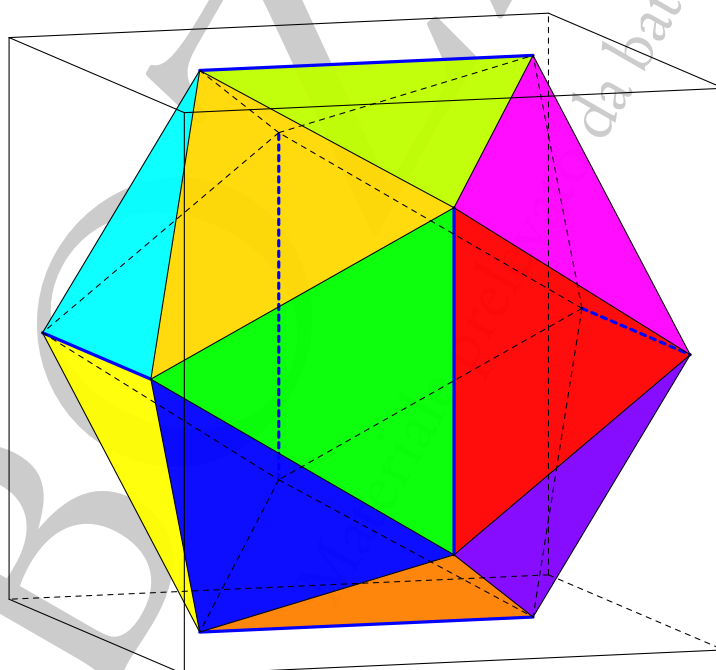


Figura 7.18.: Costruzione dell'icosaedro regolare a partire dal cubo: la costruzione completa

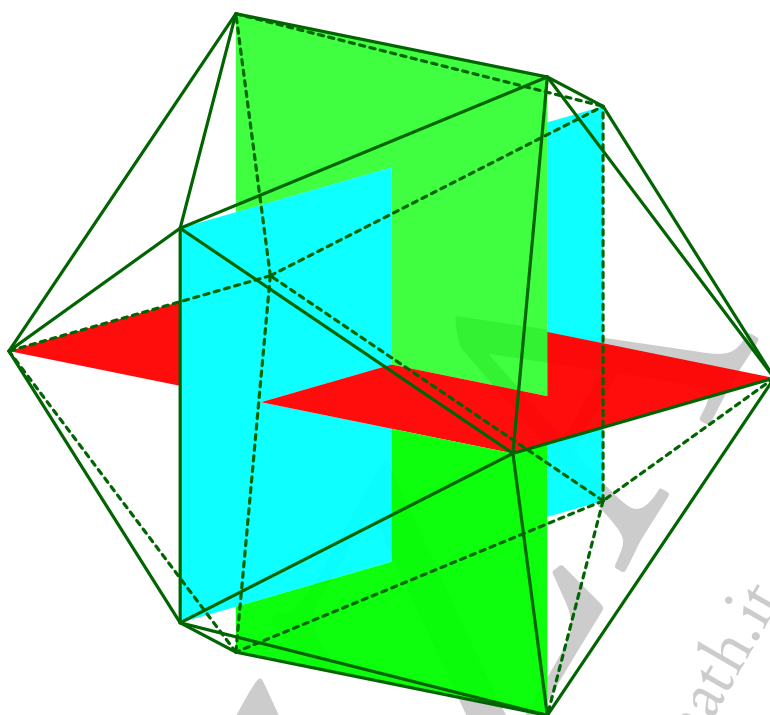


Figura 7.19.: Costruzione dell'icosaedro a partire da tre rettangoli aurei

Una diversa costruzione dell'icosaedro si può ottenere come composizione di altri poliedri, precisamente di due piramidi a base pentagonale e di un antiprisma a base pentagonale, come mostrato nella figura 7.20.

Le piramidi che qui interessano fanno parte della classe dei solidi di Johnson, che tratteremo in un apposito fascicolo di questa raccolta. Si tratta di piramidi rette aventi per base un poligono regolare e tali che gli spigoli laterali abbiano la stessa lunghezza dei lati del poligono di base, in modo da ottenere poliedri aventi spigoli tutti uguali e facce costituite da poligoni regolari. In particolare la piramide a base pentagonale è il cosiddetto solido di Johnson numero 2, ovvero il solido J_2 . Con queste restrizioni le uniche piramidi possibili sono a base triangolare (e si ottiene il tetraedro regolare), a base quadrata (solido di Johnson J_1) e a base pentagonale.

I *prismi*, in particolare quelli retti, sono solidi ben noti: si tratta di solidi compresi tra due facce parallele identicamente disposte e connessi da un ciclo di parallelogrammi (le *facce laterali*). Hanno particolare interesse i prismi le cui basi sono poligoni regolari e le cui facce laterali sono quadrati: in questo caso tutti gli spigoli sono uguali e tutte le facce sono poligoni regolari.

Si chiamano invece *antiprismi* i solidi costituiti ancora da due basi poligonali identiche, ma opportunamente ruotate una rispetto all'altra e connessi da un ciclo di triangoli (le facce laterali) che connettono un vertice di una base con un lato dell'altra. Hanno particolare interesse gli antiprismi retti, detti regolari, in cui le basi sono poligoni regolari e le facce laterali sono triangoli equilateri: anche in questo caso tutti gli spigoli sono uguali e tutte le facce sono poligoni regolari.

Nel caso dell'icosaedro intervengono, come già detto, due piramidi J_2 e un antiprisma regolare a base pentagonale.

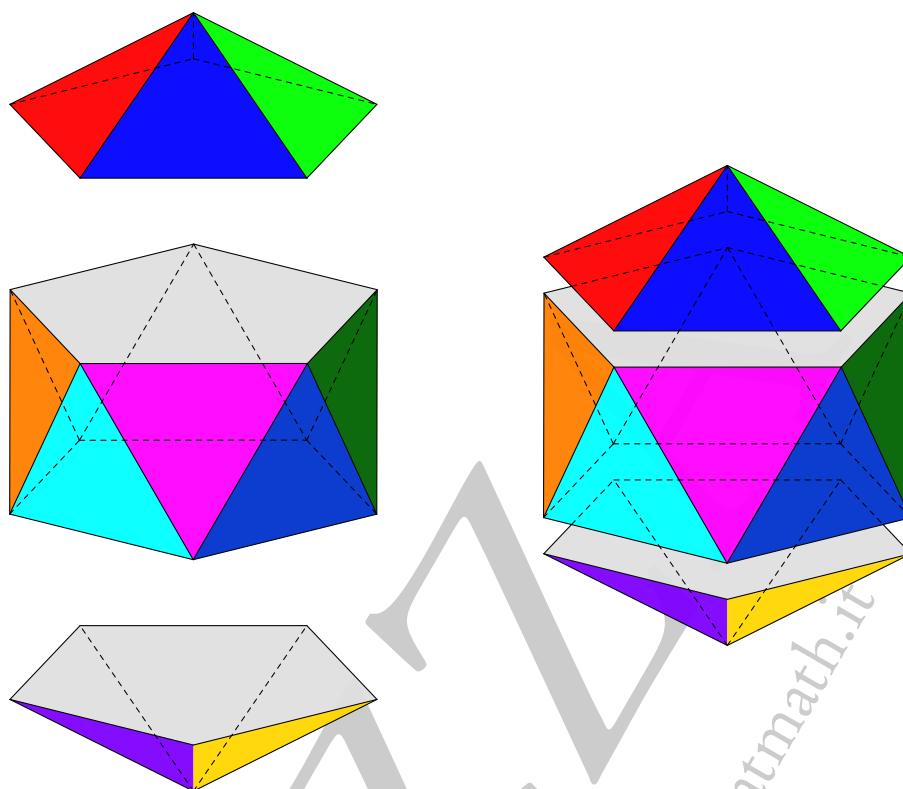


Figura 7.20.: Costruzione dell'icosaedro mediante composizione di due piramidi e un antiprisma

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

8. Tassellazioni della sfera e dello spazio

8.1. Linee e poligoni sulla sfera

La retta è, dopo il punto, l'oggetto più importante della geometria euclidea del piano; come il punto è anch'essa annoverata tra i *concetti primitivi*, cioè non formalmente definibili in termini di concetti precedenti. Tuttavia è ovvio che tutti abbiamo in mente una qualche "definizione", seppure informale, di retta: la più significativa è quella che fa riferimento al fatto che il tratta di retta compreso tra due punti è il cammino più breve tra i punti stessi. Si esprime in termini formali questo fatto dicendo che le rette sono le *linee geodetiche*, cioè le linee di minima lunghezza tra due punti, del piano euclideo.

È proprio questa proprietà di minimo che si usa per estendere il concetto di retta dal piano ad altre superfici, in particolare alla sfera, situazione a cui siamo interessati in questo capitolo.

Nel caso della sfera si verifica abbastanza facilmente che le linee geodetiche (potremmo proprio chiamarle le *rette della sfera*) sono archi di cerchio massimo: per esempio nell'usuale sistema di coordinate geografiche che si usa sulla sfera terrestre tutti i meridiani sono cerchi massimi, mentre dei paralleli solo l'equatore è un cerchio massimo.

Come si capisce subito anche dall'esempio dei meridiani terrestri, passando dal piano alla sfera alcune proprietà vanno perse. Per esempio per due punti antipodali (come il polo Nord e il polo Sud) passano infiniti cerchi massimi, cioè infinite rette, cosa impossibile sul piano.

Sul piano la prima figura che si introduce è il triangolo ovvero la parte di piano ottenuta considerando tre punti non allineati e i tre segmenti (parti limitate di retta) che li congiungono a due a due. Sulla sfera si può introdurre l'analogo concetto di triangolo sferico prendendo tre punti (anche qui "non allineati", cioè non appartenenti allo stesso cerchio massimo) e considerando tre archi di cerchio massimo che li congiungono, come mostrato nella figura 8.1.

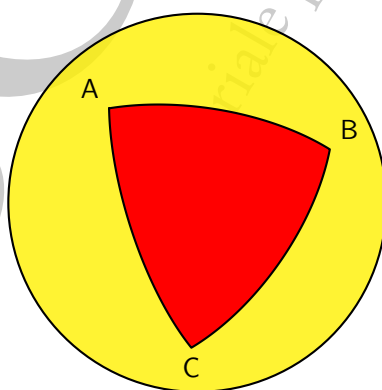


Figura 8.1.: *Un triangolo sferico*

Successivamente si introducono gli altri poligoni e ne vedremo alcuni esempi nelle pagine che seguono. Si usa ancora il termine *poligono regolare* in riferimento a poligoni equilateri e equiangoli.

Una proprietà che differenzia in modo radicale la situazione del piano da quella della sfera è che sulla sfera non esiste il concetto di figure, in particolare triangoli, simili.

Come è ben noto nel piano ci sono tre criteri di congruenza (o uguaglianza, con locuzione meno formale) tra triangoli, e precisamente:

ALA: Due triangoli aventi uguali un lato e i due angoli ad esso adiacenti (e quindi anche il terzo angolo), sono uguali.

LAL: Due triangoli aventi uguali due lati e l'angolo tra essi compreso sono uguali.

LLL: Due triangoli aventi uguali i tre lati sono uguali.

Si noti che l'uguaglianza di due triangoli non significa affatto la loro sovrapponibilità mediante movimento rigido, se si richiede di rimanere nel piano. Per esempio i due triangoli della figura 8.2, che sono simmetrici rispetto alla retta r , sono uguali, ma la sovrapposizione mediante movimento rigido è possibile solo ruotando uno dei due semipiani individuati dalla retta r di 180° attorno alla retta stessa.

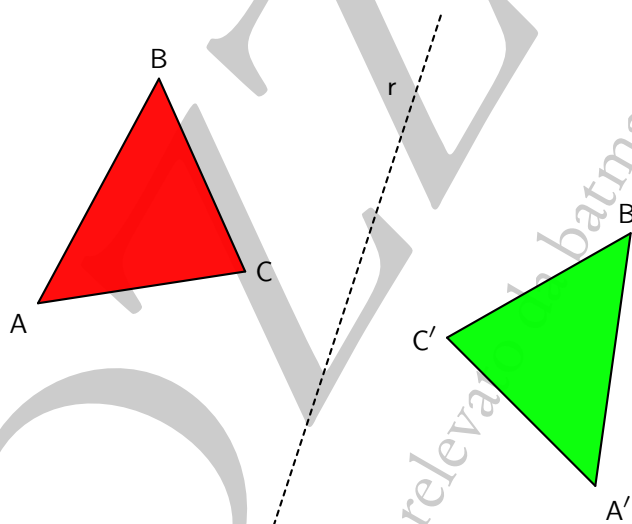


Figura 8.2.: *Triangoli uguali, ma non sovrapponibili rimanendo nel piano*

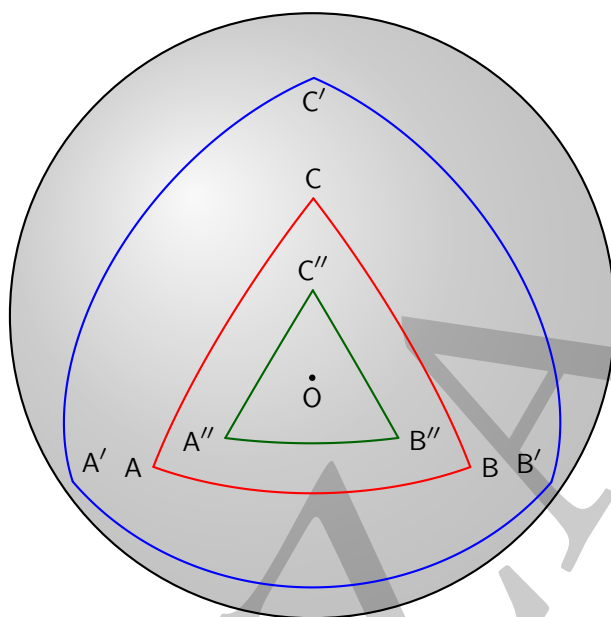
Sulla sfera esiste un quarto criterio di uguaglianza tra triangoli e precisamente:

AAA: Due triangoli aventi i tre angoli uguali sono uguali.

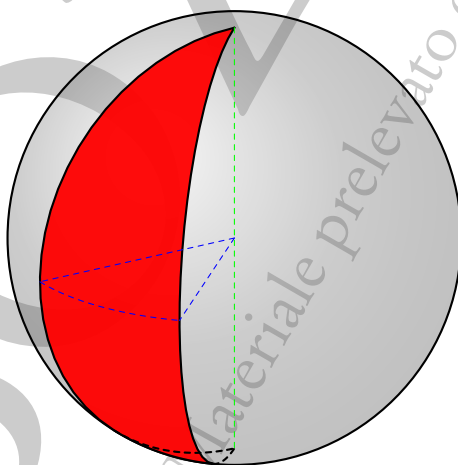
Nel piano questo è semplicemente uno dei criteri di similitudine dei triangoli, mentre sulla sfera diventa un quarto criterio di uguaglianza.

Una conseguenza di questo fatto è che mentre nel piano tutti i triangoli equilateri sono tra di loro simili, in quanto hanno tutti gli stessi angoli, ciò non succede sulla sfera. La figura 8.3 mostra tre triangoli equilateri, ABC , $A'B'C'$ e $A''B''C''$, concentrici e con i lati “paralleli” sulla sfera: anche visivamente si capisce che essi non sono simili.

C'è ancora un'altra specialità della sfera che la distingue dal piano: sul piano il poligono con il minimo numero di lati è il triangolo, cioè con meno di tre lati non si può avere una figura limitata (con due lati si

Figura 8.3.: *Triangoli equilateri non simili sulla sfera*

può avere un angolo, che è una figura illimitata). Sulla sfera invece si può avere una figura “poligonale”, anche con due soli lati: un esempio è il “fuso sferico” mostrato nella figura 8.4, in cui gli unici due lati sono due semicirconferenze massime, passanti per due punti antipodali, come il polo Nord e il polo Sud.

Figura 8.4.: *Un fuso sferico: “poligono” sulla sfera con soli due lati*

Scopo di questa breve e informale introduzione alla geometria della sfera è quello di trattare il problema delle “tassellazioni regolari” sulla sfera: *è possibile ricoprire la sfera usando solo poligoni regolari dello stesso tipo?* I poliedri regolari ci aiutano a fornire una semplice risposta al problema: è sufficiente proiettare i cinque poliedri sulla sfera circoscritta per risolvere il problema. Il prossimo paragrafo mostra le situazioni

possibili.

8.2. Tassellazioni regolari sulla sfera

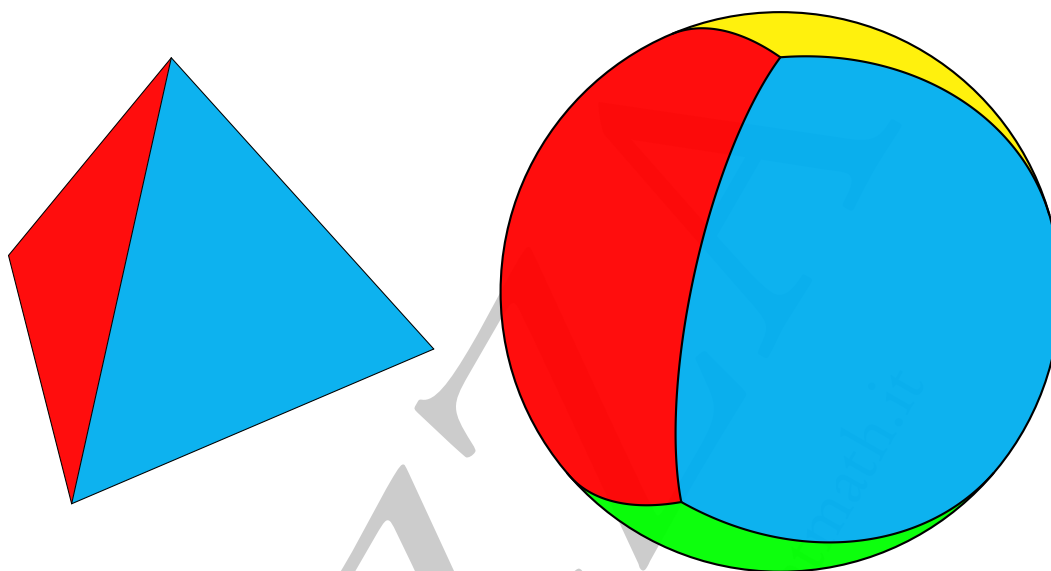


Figura 8.5.: *Il tetraedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta*

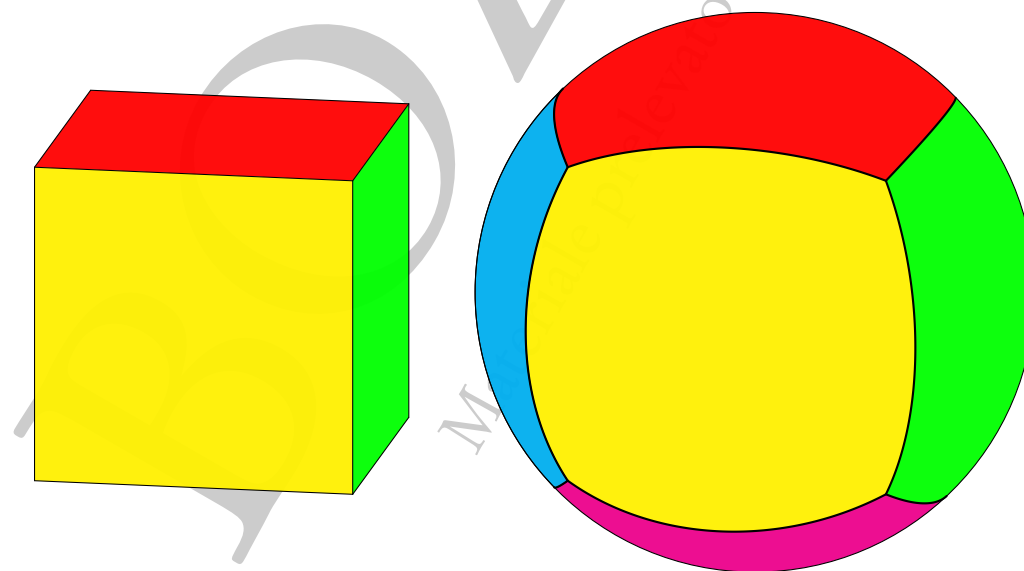


Figura 8.6.: *Il cubo e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta*

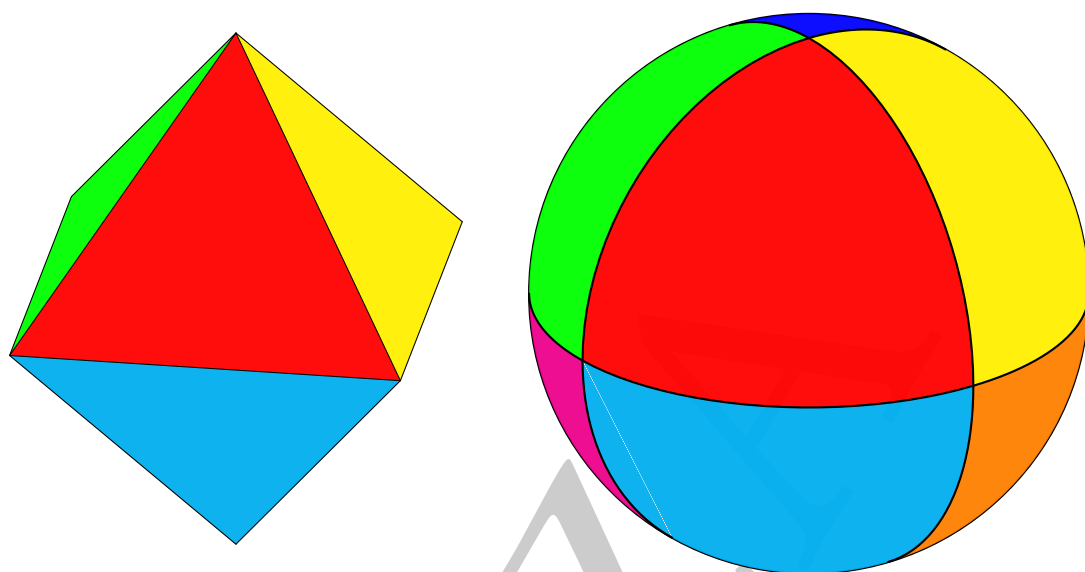


Figura 8.7.: *L'ottaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta*

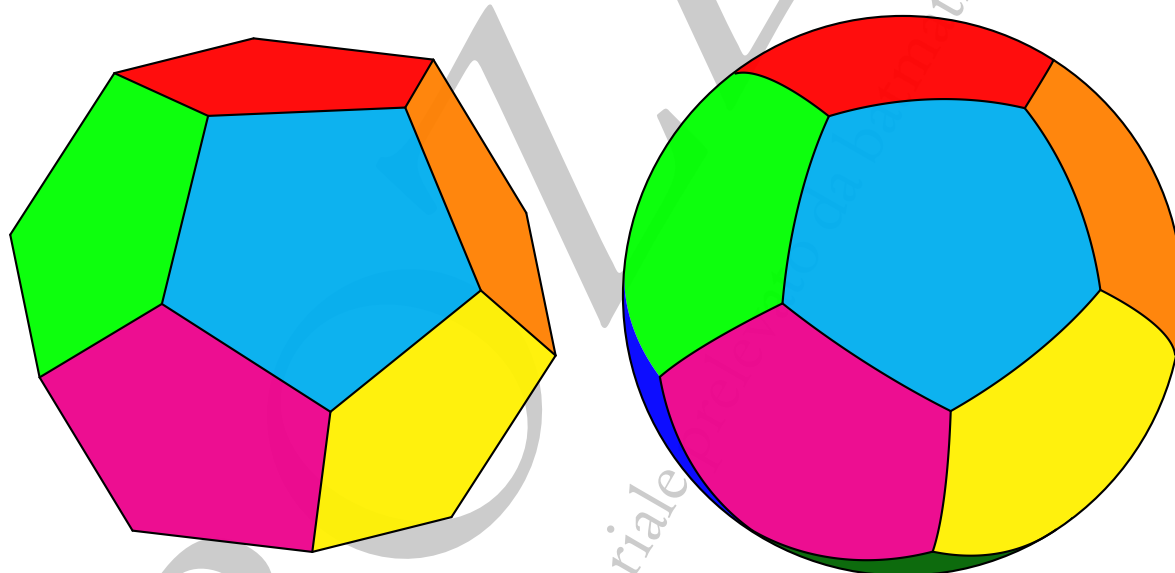


Figura 8.8.: *Il dodecaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta*

È interessante notare che le tassellazioni sulla sfera sono profondamente diverse da quelle del piano: si parla di *tassellazioni non euclidee*.

Per esempio con i triangoli equilateri sulla sfera si hanno tassellazioni con tre, quattro o cinque triangoli convergenti nello stesso vertice, con i quadrati si hanno tassellazioni con tre quadrati convergenti nello stesso vertice, con i pentagoni tassellazioni con tre pentagoni convergenti nello stesso vertice. Tutte queste situazioni sono impossibili nel piano dove i triangoli equilateri devono essere sei e i quadrati

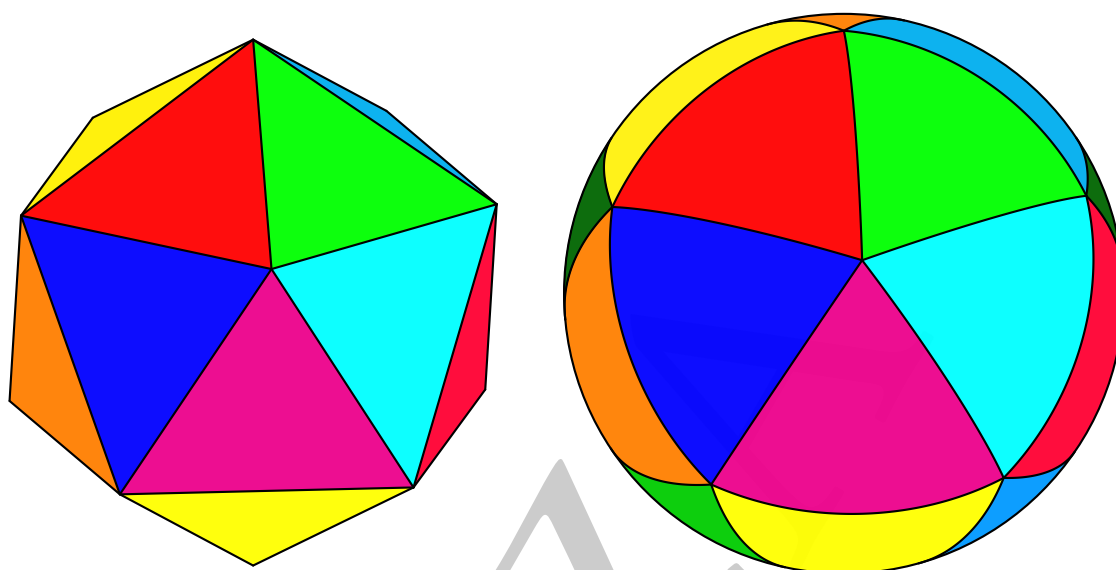


Figura 8.9.: *L'icosaedro regolare e la tassellazione ottenuta proiettandolo sulla sfera circoscritta*

quattro, mentre la tassellazione non è possibile con i pentagoni. Si veda la figura 8.10.

Per contro sul piano è possibile anche una tassellazione con esagoni regolari (pensati composti da triangoli equilateri), come suggerisce sempre la figura 8.10, mentre, come già osservato nella costruzione dei poliedri regolari, una tale tassellazione non è possibile sulla sfera.

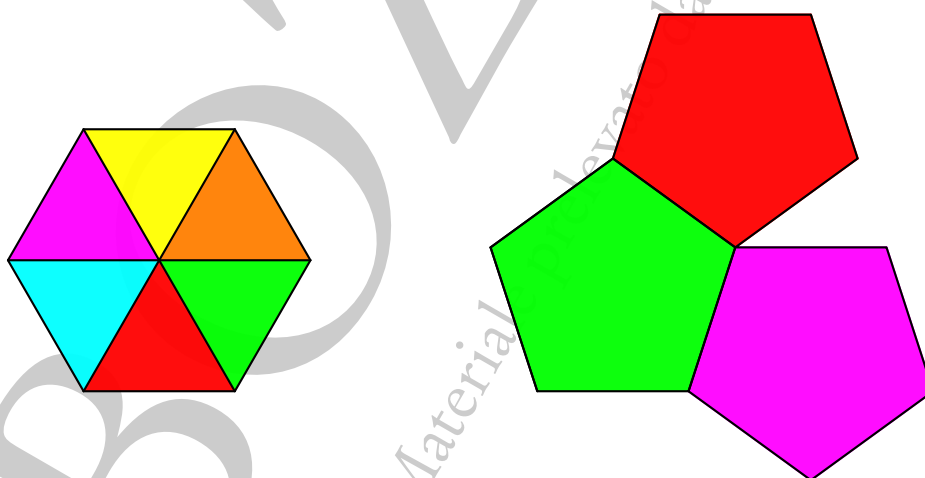


Figura 8.10.: *Triangoli equilateri ed esagoni oppure pentagoni: una tassellazione possibile e una impossibile nel piano*

8.2.1. Fette di mele

Suddividendo una mela in “spicchi sferici”, sul modello della figura 8.4, è possibile ripartirla in un numero qualunque di parti identiche. Normalmente quando si suddivide una mela si procede esattamente

in questo modo.

Tuttavia è possibile operare una suddivisione in quattro, sei, otto, dodici o venti parti in una maniera completamente diversa, utilizzando le tassellazioni regolari sulla sfera che abbiamo descritto: una volta costruita una delle cinque tassellazioni regolari, basterà congiungere i vertici con il centro della sfera per ottenere la suddivisione voluta.

La figura 8.11 illustra la situazione nel caso della suddivisione in quattro fette, ottenuta a partire dalla tassellazione regolare della sfera illustrata nella figura 8.5. Utilizzando le altre quattro tassellazioni regolari si ottiene una suddivisione in sei, otto, dodici e venti parti identiche: di queste solo quella corrispondente all'ottaedro è abbastanza comune.

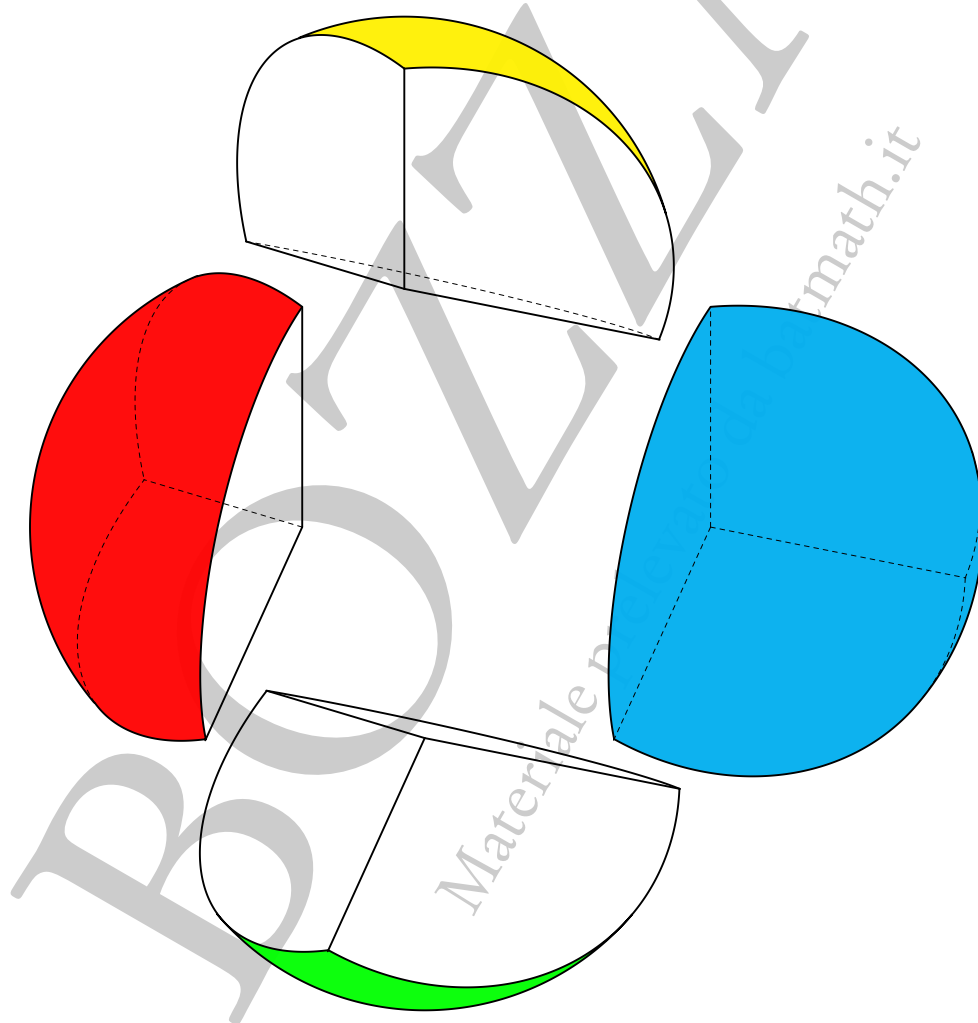


Figura 8.11.: Suddivisione di una sfera in quattro parti identiche

8.3. Dualità e tassellazioni sulla sfera

Come già osservato nel paragrafo 6.1 del capitolo 6, il poliedro duale di un poliedro regolare può essere semplicemente costruito prendendo come vertici i centri delle facce del poliedro originale.

In questo paragrafo vogliamo mostrare, privilegiando al solito l'aspetto grafico, una interessante conseguenza di questa costruzione dei poliedri duali e legata alle tassellazioni sulla sfera.

Inscriviamo ciascun poliedro e il suo duale nella stessa sfera, mantenendo le “posizioni duali”, cioè scegliendo i vertici del duale nella proiezione sulla sfera dei centri delle facce del poliedro originale. Naturalmente per il tetraedro otterremo come duale un altro tetraedro, solo opportunamente ruotato rispetto al primo.

Decomponiamo poi le facce triangolari, quadrate o pentagonali dei cinque poliedri regolari in triangoli rettangoli con un vertice nel centro dei vari poligoni, come mostrato nelle figure 8.12, 8.13, 8.17, 8.18, 8.22, 8.23.

A questo punto, esattamente come già fatto per le tassellazioni regolari sulla sfera nel precedente paragrafo 8.2, proiettiamo tutti questi triangoli rettangoli sulla sfera circoscritta ai vari poliedri, ottenendo delle tassellazioni (non regolari) sulla sfera. Ebbene, le tassellazioni ottenute da ciascun poliedro e dal suo duale coincidono: in totale avremo solo tre tassellazioni diverse.

Nelle figure seguenti è evidenziato questo fatto: per ciascuna coppia di poliedri duali sono raffigurate le rispettive tassellazioni con gli stessi colori dei triangoli sulle facce dei poliedri e, infine, la tassellazione con unica colorazione e l'evidenziazione dei bordi di una coppia (rispettivamente triangolo-triangolo, quadrato-triangolo, pentagono-triangolo) di poligoni dei poliedri originali proiettati sulla sfera: si può controllare come uno dei vertici di un poligono sia esattamente al centro del poligono corrispondente del poliedro duale.

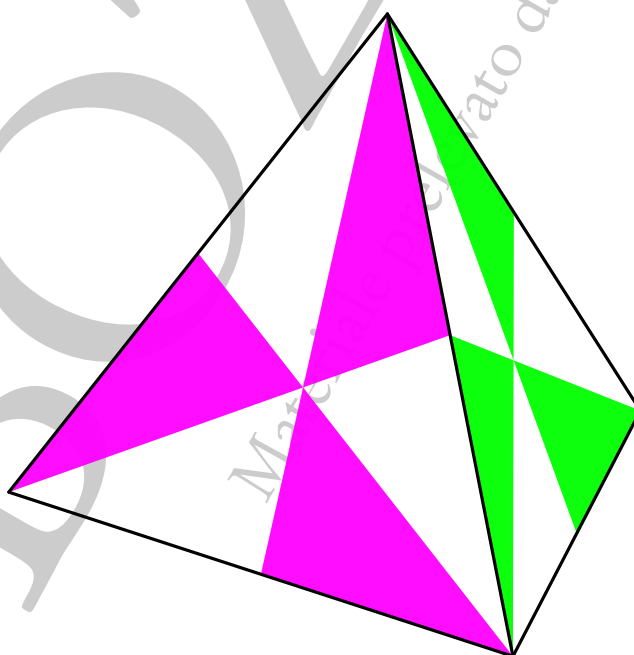


Figura 8.12.: *Il tetraedro regolare con le facce decomposte in triangoli rettangoli*

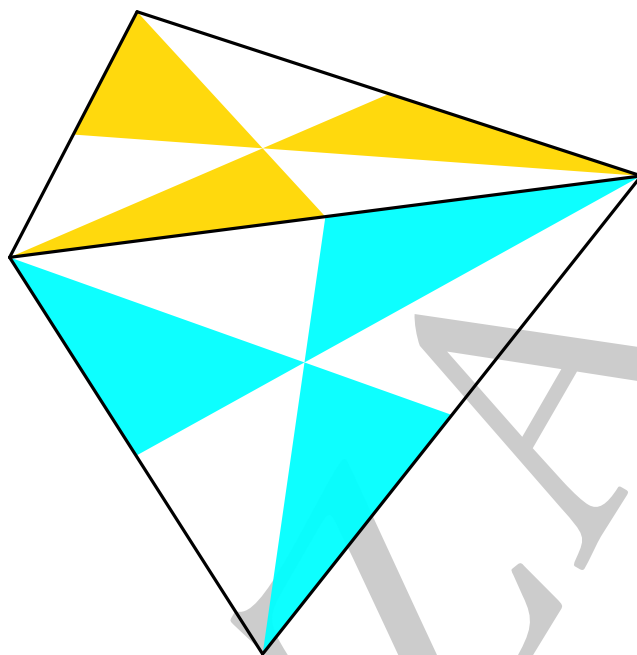


Figura 8.13.: Il duale del tetraedro regolare della figura 8.12, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli

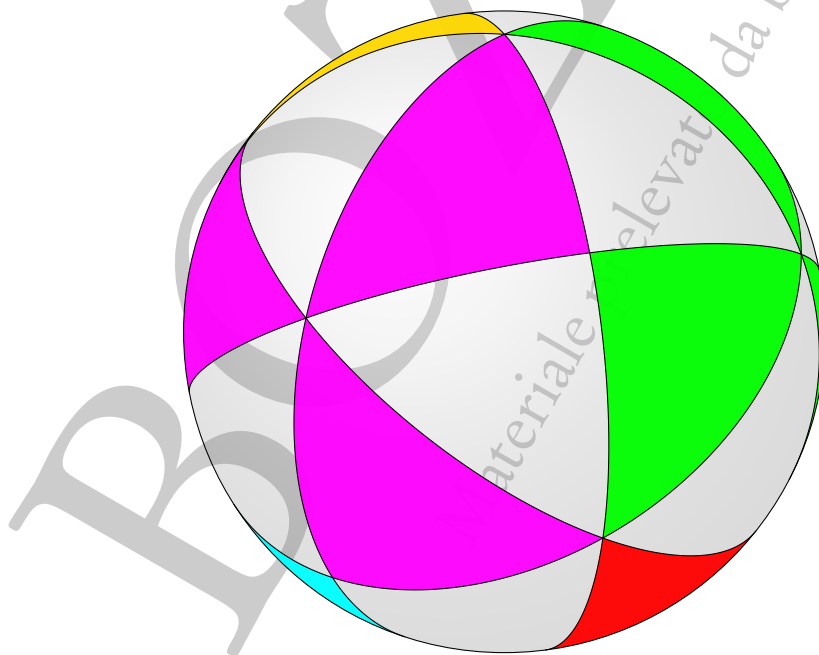


Figura 8.14.: La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il tetraedro regolare della figura 8.12 sulla sfera circoscritta

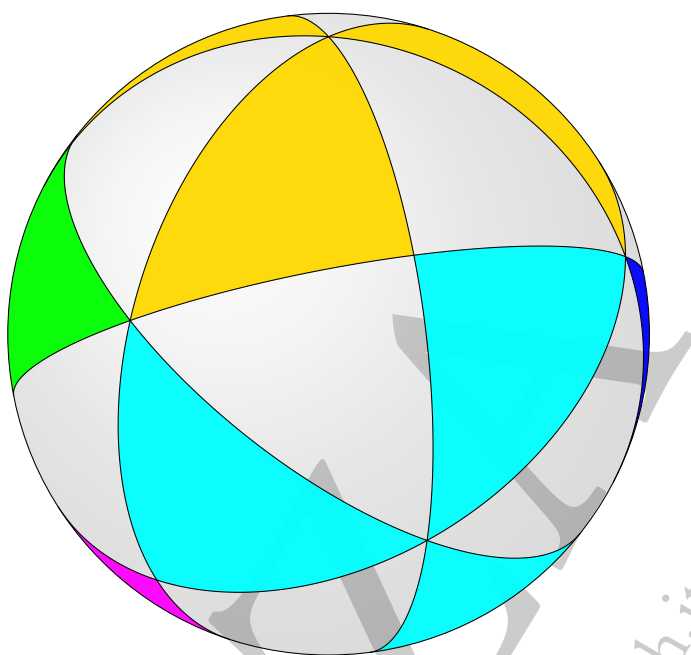


Figura 8.15.: *La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il tetraedro regolare della figura 8.13 sulla sfera circoscritta*

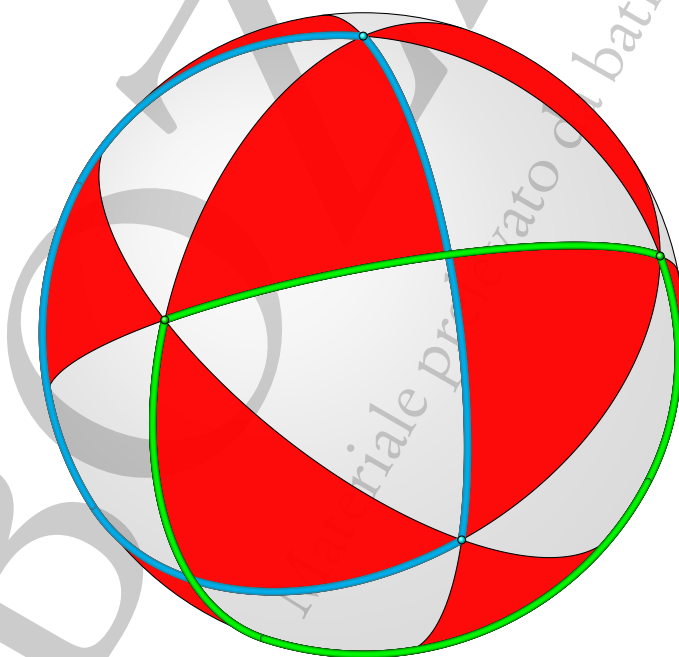


Figura 8.16.: *Le tassellazioni delle figure 8.14 e 8.15 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia dei due tetraedri delle figure 8.12 e 8.13*

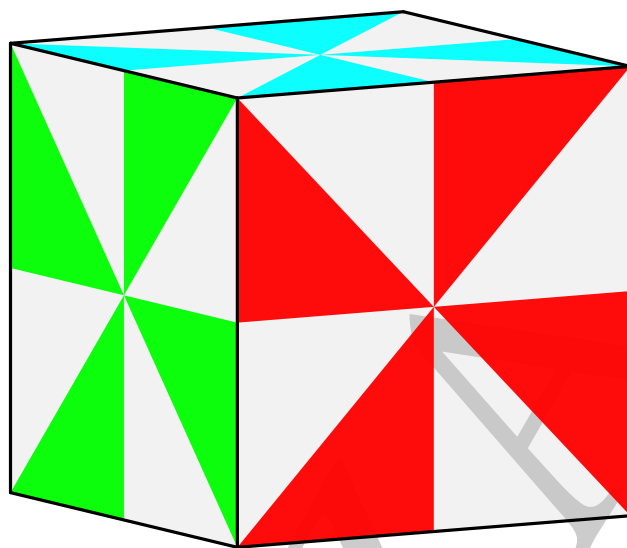


Figura 8.17.: Il cubo con le facce decomposte in triangoli rettangoli

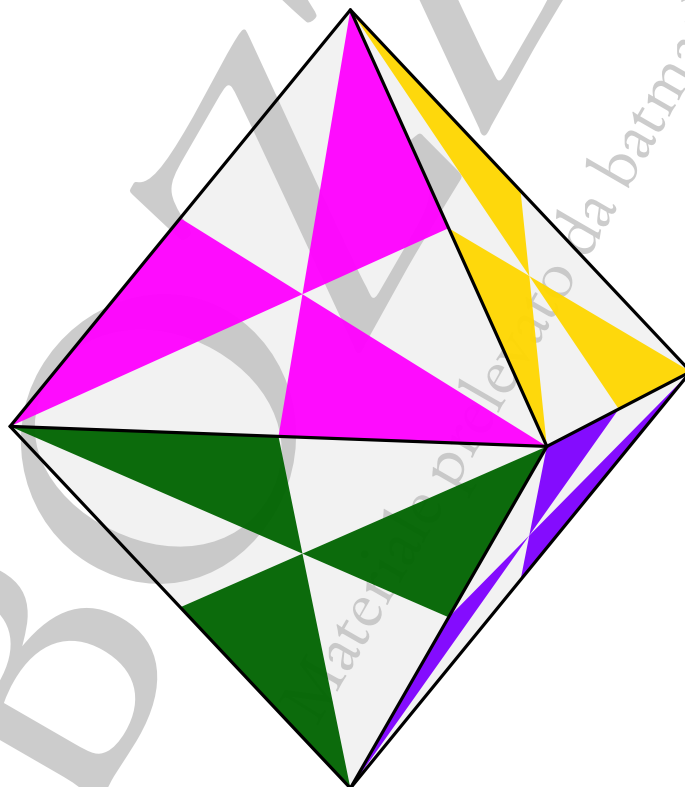


Figura 8.18.: L'ottaedro regolare, duale del cubo della figura 8.17, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli

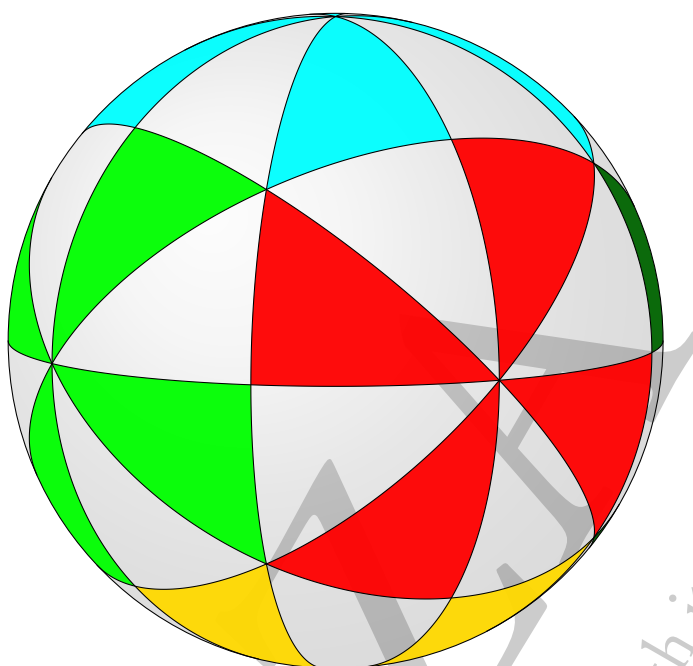


Figura 8.19.: La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il cubo della figura 8.17 sulla sfera circoscritta

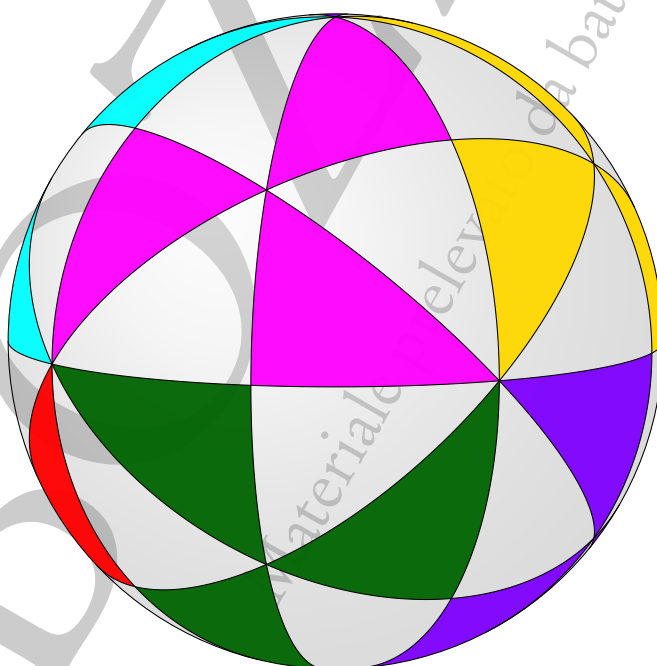


Figura 8.20.: La tassellazione della sfera ottenuta proiettando l'ottaedro regolare della figura 8.18 sulla sfera circoscritta

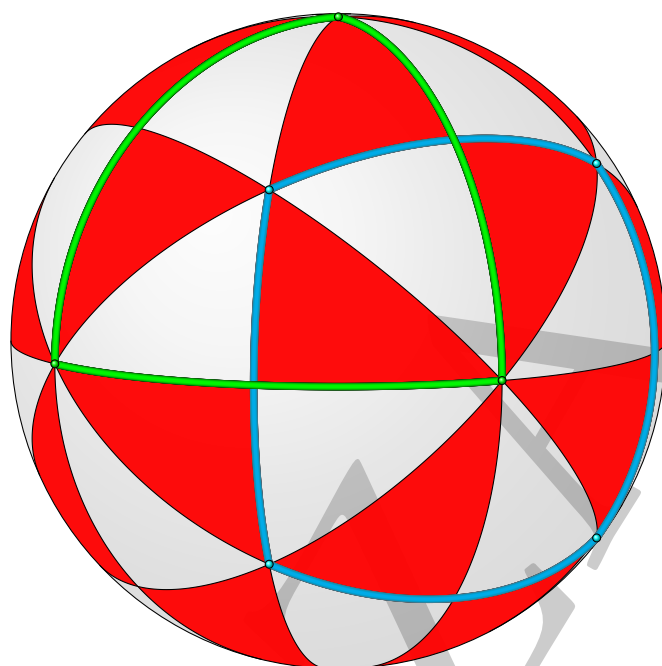


Figura 8.21.: Le tassellazioni delle figure 8.19 e 8.20 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia del cubo della figura 8.17 e dell'ottaedro della figura 8.18

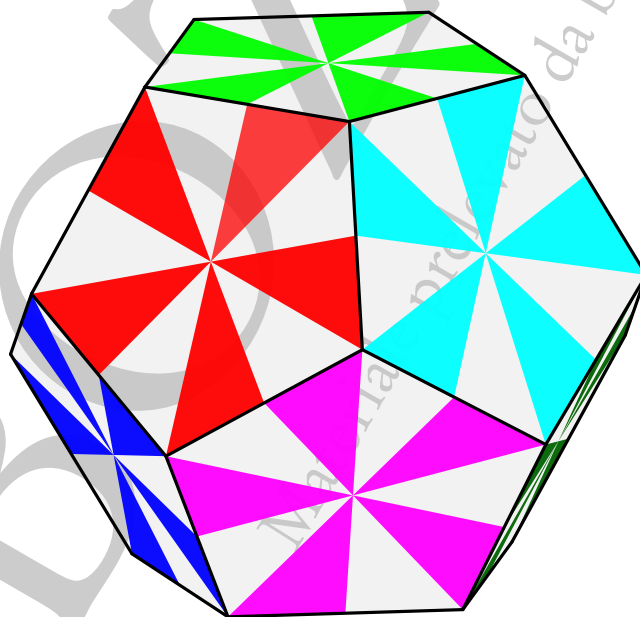


Figura 8.22.: Il dodecaedro regolare con le facce decomposte in triangoli rettangoli

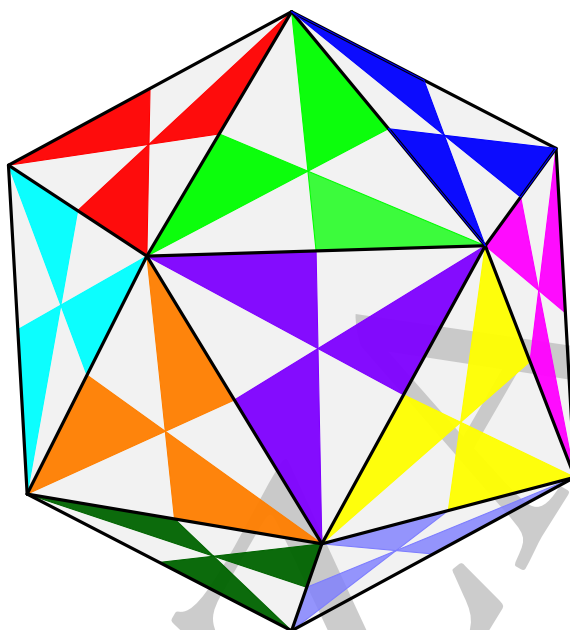


Figura 8.23.: *L'icosaedro regolare, duale del dodecaedro della figura 8.22, sempre con le facce decomposte in triangoli rettangoli*

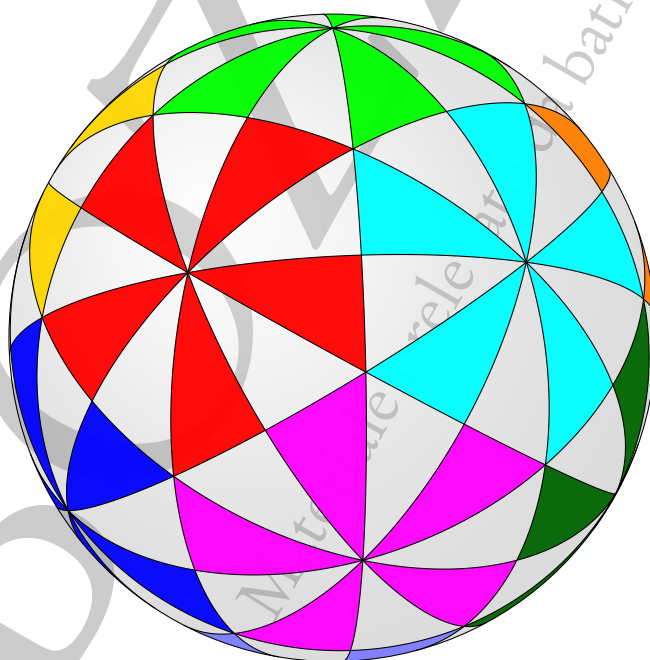


Figura 8.24.: *La tassellazione della sfera ottenuta proiettando il dodecaedro regolare della figura 8.22 sulla sfera circoscritta*

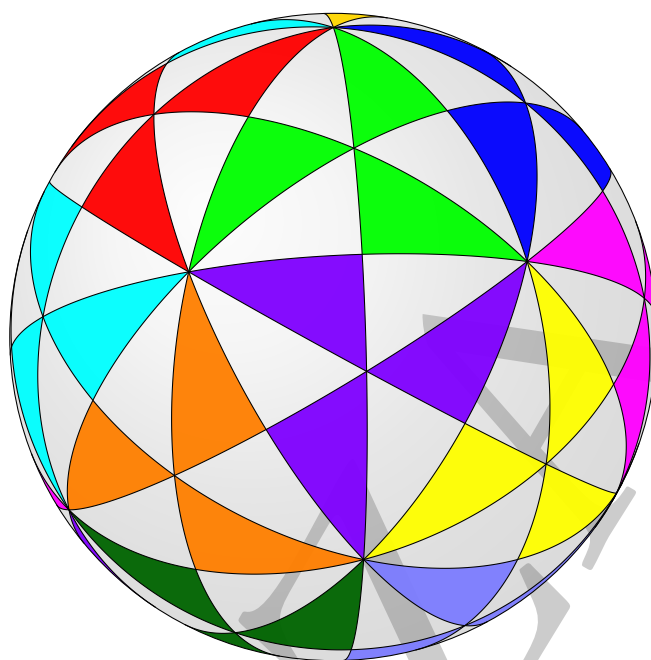


Figura 8.25.: La tassellazione della sfera ottenuta proiettando l'icosaedro regolare della figura 8.23 sulla sfera circoscritta

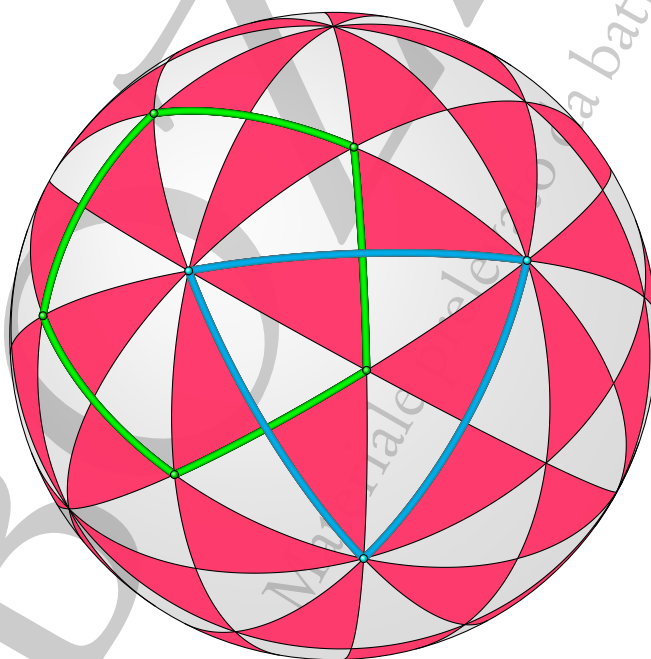


Figura 8.26.: Le tassellazioni delle figure 8.24 e 8.25 con un'unica colorazione e l'evidenziazione della proiezione di una faccia del dodecaedro della figura 8.22 e dell'icosaedro della figura 8.23

8.3.1. Poliedri sferici e simmetrie per riflessione

Le tassellazioni ottenute proiettando i poliedri platonici sulla sfera circoscritta sono note anche come *poliedri sferici regolari*. In generale un poliedro sferico è una tassellazione della sfera in cui la superficie è divisa mediante archi di cerchio massimo in regioni dette *poligoni sferici*.

Le considerazioni fatte a proposito delle relazioni fra tassellazioni sulla sfera e dualità nei poliedri regolari risultano particolarmente significative se considerate nell'ottica dei poliedri sferici. In realtà le triangolazioni che abbiamo introdotto nei poliedri e successivamente proiettato sulla sfera circoscritta per evidenziare il legame tra ogni poliedro e il suo duale si possono ottenere direttamente nei poliedri sferici considerando i diversi piani di simmetria dei poliedri platonici e delle loro proiezioni sferiche. Ogni piano di simmetria, che naturalmente passa per il centro della sfera, individua sulla sfera stessa un cerchio massimo: l'insieme di questi cerchi, assieme a quelli che individuano il poliedro sferico, triangolarizzano la superficie sferica esattamente nel modo che abbiamo evidenziato nelle figure precedenti. Dunque ogni poliedro è collegato al suo duale proprio come conseguenza delle proprietà di simmetria per riflessione che hanno questi poliedri. La figura 8.27 mostra in dettaglio uno dei piani di simmetria, relativamente al caso dell'ottaedro sferico, con il corrispondente cerchio massimo sezione. Sono inoltre mostrati gli altri cerchi massimi ottenuti utilizzando gli altri piani di simmetria: il confronto tra questa figura e la figura 8.21 evidenzia chiaramente la coincidenza delle due costruzioni.

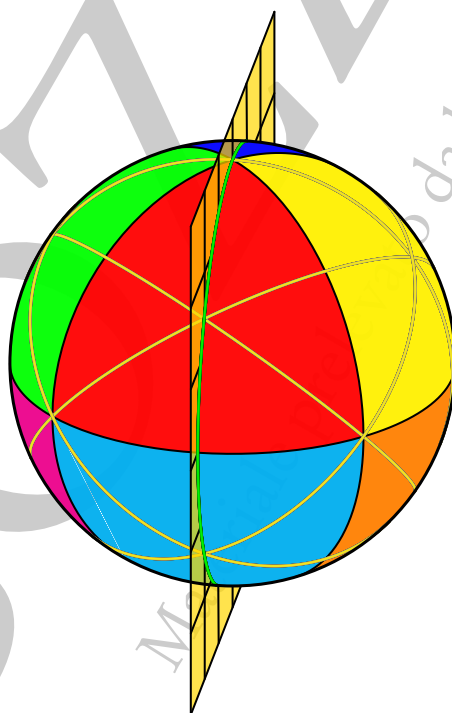


Figura 8.27.: L'ottaedro sferico e i cerchi massimi ottenuti mediante i piani di simmetria per riflessione

L'osservazione contenuta in questo paragrafo è di carattere generale e lo stesso tipo di relazione si ritrova considerando i poliedri sferici di Archimede e i loro duali di Catalan.

8.4. Tassellazioni dello spazio

Un altro problema di estremo interesse nelle applicazioni, e molto suggestivo dal punto di vista grafico, è quello della tassellazione dello spazio, ovvero della possibilità di riempire tutto lo spazio, senza lasciare alcuno spazio vuoto, utilizzando volumi dati. Siamo qui interessati al caso in cui i volumi siano poliedri regolari. Ebbene, l'unico poliedro regolare in grado di tassellare, da solo, lo spazio è il cubo: che il cubo risolva il problema è abbastanza evidente, meno evidente il fatto che non ci siano altre possibilità, tanto che lo stesso Aristotele incorse in errore quando affermò, nel suo *De caelo*⁽¹⁾, che la cosa era possibile con il tetraedro.

La figura 8.28 illustra una tassellazione con cubi: ce ne possono anche essere di meno regolari, traslando i cubi, ma qui ci vogliamo occupare solo delle situazioni in cui i poliedri si congiungono “faccia a faccia”, che è la situazione più interessante e che è detta *tassellazione regolare*.

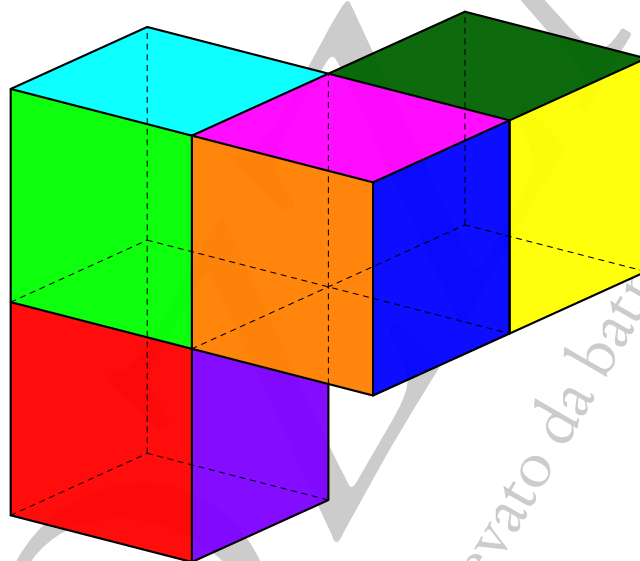


Figura 8.28.: Tassellazione dello spazio mediante cubi

Non è facile provare che la tassellazione è impossibile con i tetraedri (altrimenti Aristotele non si sarebbe sbagliato!). Il motivo si può sostanzialmente dedurre dalla figura 8.29, dove abbiamo accostato cinque tetraedri, in modo che si colleghino faccia a faccia: il “buco che rimane” tra il primo e l'ultimo tetraedro è di appena 7.36° , piccolo, ma sufficiente a giustificare l'impossibilità della tassellazione. Problemi di questo tipo sono importanti nello studio delle strutture cristalline di molti materiali.

L'unica altra tassellazione possibile che utilizza solo poliedri regolari è ottenuta utilizzando tetraedri e ottaedri (con facce uguali naturalmente). Vediamo di capire, sempre a livello grafico, come la cosa si possa realizzare.

Poiché, come già visto, il cubo tassella lo spazio, costruiremo la tassellazione con tetraedri e ottaedri proprio a partire dal cubo. Cominciamo a considerare, all'interno di un cubo, una piramide come quella della figura 8.30, ovvero avente come base metà della faccia del cubo e l'altezza coincidente con uno

⁽¹⁾*De caelo*, in quattro libri è il principale trattato cosmologico di Aristotele, scritto nel 350 a.C. ed è il pilastro su cui si è fondata la visione cosmologica che ha dominato tutta la cultura antica e medioevale, per almeno duemila anni.

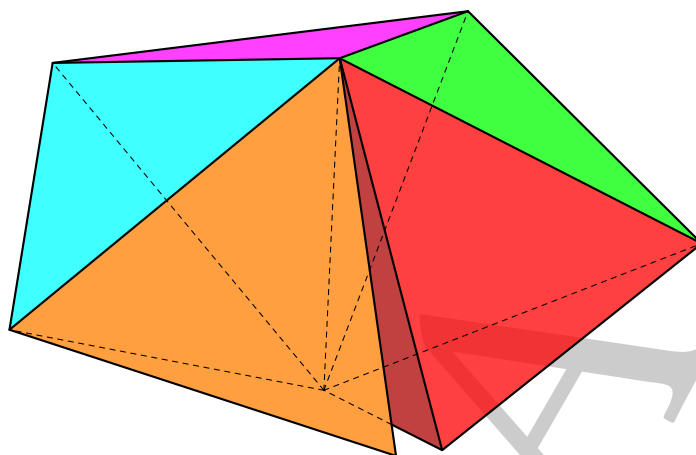


Figura 8.29.: *Impossibilità della tassellazione dello spazio mediante tetraedri*

spigolo del cubo stesso: si tratta di una piramide avente quattro facce triangolari, di cui una costituita da un triangolo equilatero e tre da triangoli rettangoli ed isosceli.

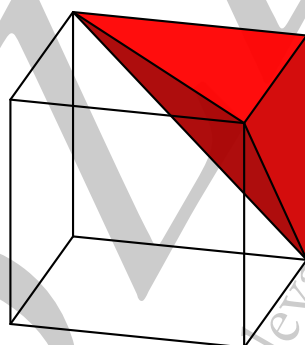


Figura 8.30.: *Piramide costruita a partire da un cubo e che costituisce un ottavo di ottaedro*

Se accostiamo otto cubi a formare un grande cubo e in ciascuno di essi ritagliamo opportunamente una di queste piramidi, accostandole otteniamo un ottaedro, come mostrato nella figura 8.31: in sostanza una piramide costruita come detto all'interno di un cubo costituisce uno degli otto tasselli necessari per formare un ottaedro.

Riprendiamo ora in considerazione la piramide della figura 8.30 e osserviamo che è possibile inscrivere, senza sovrapposizioni, esattamente quattro all'interno del cubo. Le dodici facce costituite da triangoli rettangoli ed isosceli coprono tutte le sei facce del cubo, mentre le quattro facce triangolari equilatero racchiudono, all'interno del cubo, un tetraedro regolare. In sostanza se sopprimiamo queste quattro piramidi otteniamo esattamente un tetraedro regolare inscritto nel cubo, argomento che abbiamo già trattato nel paragrafo 6.2.1 del capitolo 6. La figura 8.32 mostra a sinistra due e a destra tre di queste piramidi. La figura 8.33 mostra invece la situazione con le quattro piramidi e il tetraedro all'interno, tetraedro visibile naturalmente solo in trasparenza.

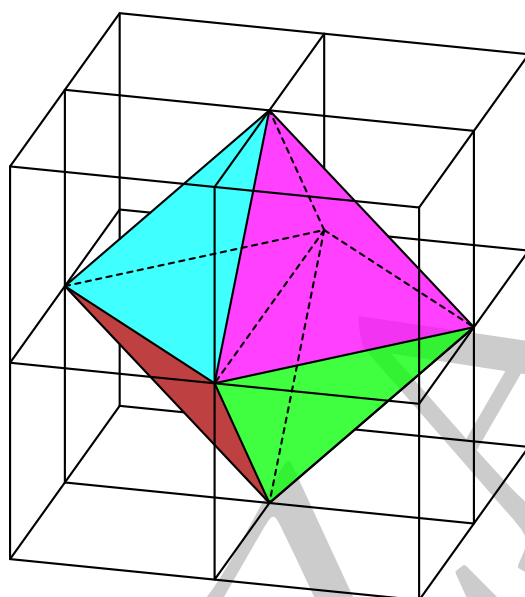


Figura 8.31.: L'ottaedro ottenuto "incollando" opportunamente otto piramidi come quella della figura 8.30

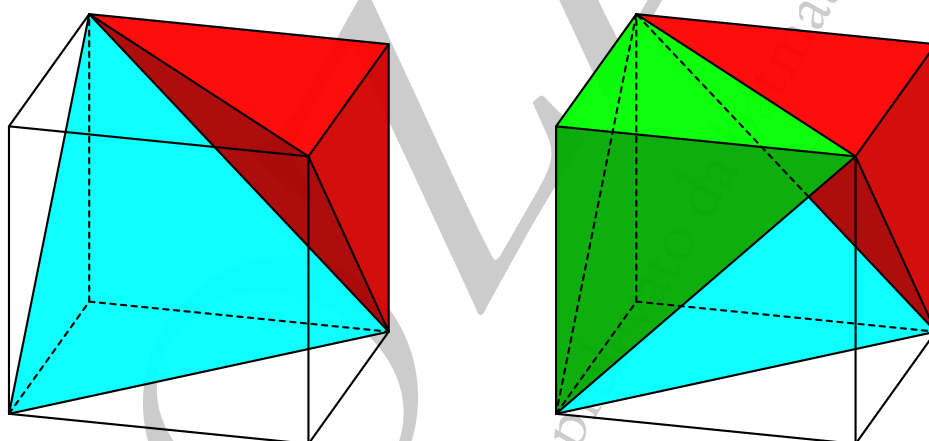


Figura 8.32.: Due piramidi, a sinistra, e tre piramidi, a destra, da sottrarre a un cubo: secondo e terzo passo per la costruzione di un tetraedro inscritto in un cubo

Tenendo conto di queste premesse consideriamo ora quattro cubi affiancati a formare la metà di un grande cubo e inscriviamo in ciascuno di essi un tetraedro come mostrato nella figura 8.34.

Il foro centrale individuato da questi quattro tetraedri è, secondo quanto più sopra osservato, la "metà bassa" di un ottaedro. Possiamo ora ripetere la costruzione con quattro cubi sovrapposti a quelli della figura 8.34, in modo da ottenere al centro un intero ottaedro, come mostrato nella figura 8.31, con otto tetraedri incollati sulle sue otto facce: si tratta in pratica della stella octangula, già considerata tra l'altro nel capitolo 6 (si veda per esempio la figura 6.5). Qui però siamo interessati non tanto alla stella, quanto piuttosto alle sue componenti già citate.

Non resta ora che riempire gli "interstizi" con ottaedri e poi ancora con tetraedri e il gioco è fatto.

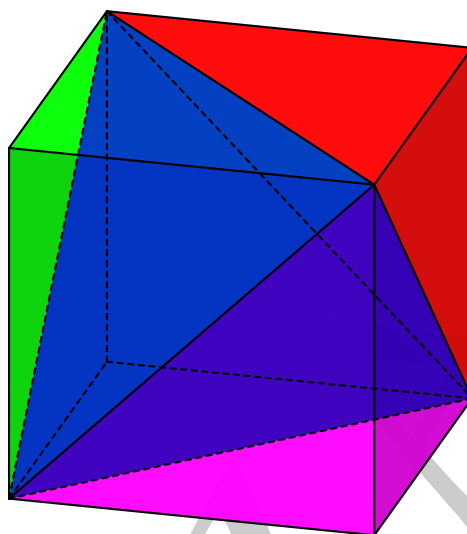


Figura 8.33.: *Il tetraedro inscritto in un cubo, ottenuto sottraendo al cubo quattro piramidi*

Uno schema del risultato finale è proposto nelle figure 8.35 e 8.36, dove abbiamo prima costruito un “alveare” accostando tetraedri, come nella figura 8.34, e successivamente iniziato il riempimento con ottaedri.

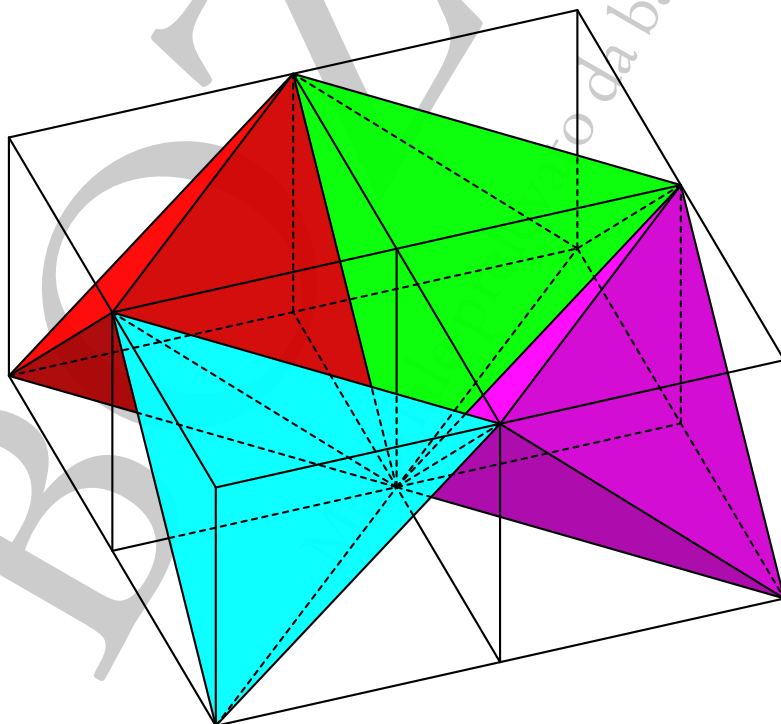


Figura 8.34.: *Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: primo passo*

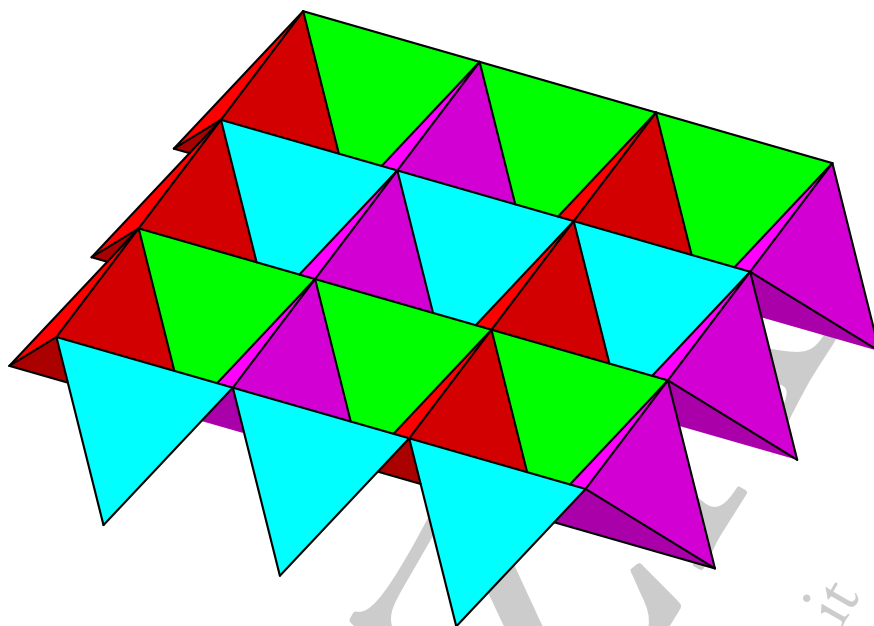


Figura 8.35.: Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: un “alveare” di tetraedri

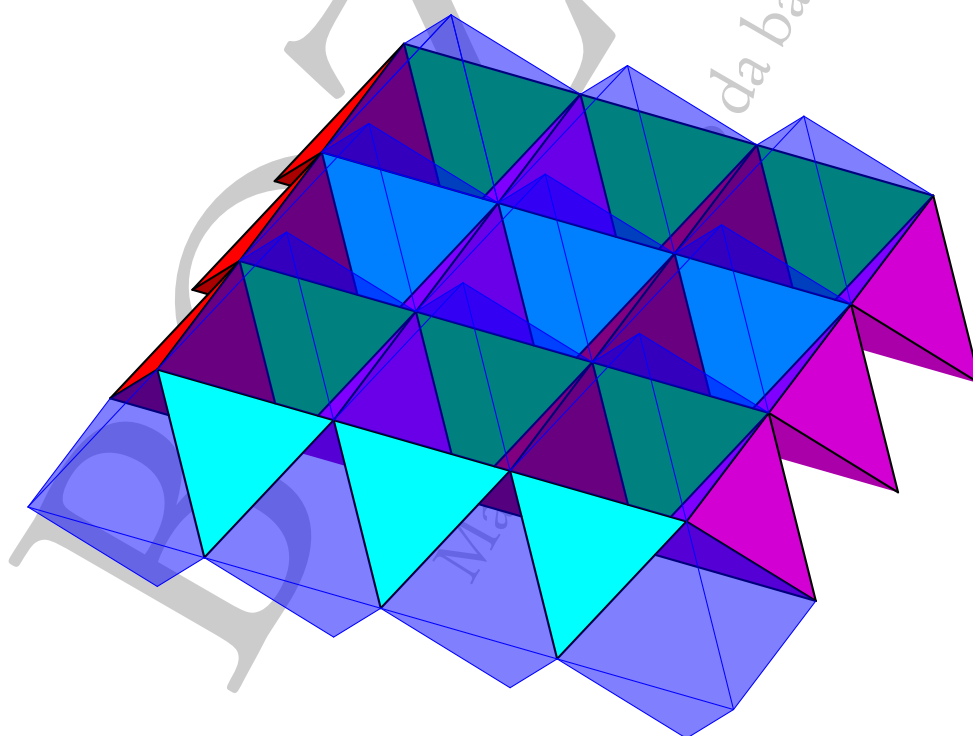


Figura 8.36.: Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: riempimento degli spazi vuoti con ottaedri

La possibilità di tassellare lo spazio con tetraedri e ottaedri può essere ancor meglio visualizzata esaminando la figura 8.37: affiancando opportunamente due tetraedri a un ottaedro si ottiene un parallelepipedo obliquo, con cui si può banalmente tassellare lo spazio.

In questo modello il “nucleo” della costruzione è diverso da quello della costruzione precedente, e la possibilità effettiva della tassellazione risulta oltremodo intuitiva. Tuttavia questa costruzione, pur se intuitivamente evidente, nasconde almeno parzialmente la regolarità della tassellazione.

La parte alta della figura mostra l’ottaedro centrale e i due tetraedri affiancati, la parte bassa della figura mostra invece il parallelogramma che si ottiene “fondendo” questi tre poliedri per ottenere il nucleo della tassellazione.

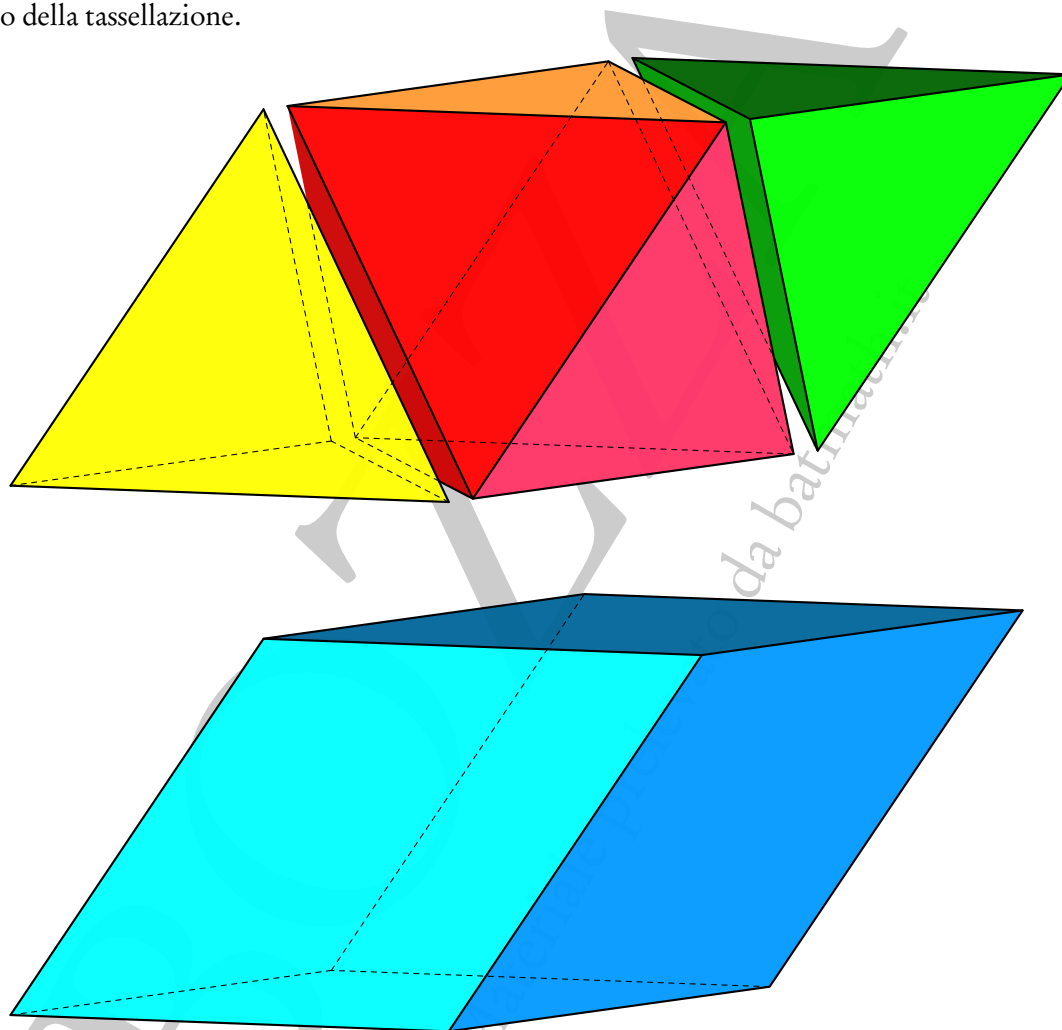


Figura 8.37.: Tassellazione dello spazio mediante ottaedri e tetraedri: tassellazione mediante un diverso nucleo

A. Miscellanea

In questa appendice proponiamo alcuni approfondimenti che non hanno trovato posto nei capitoli precedenti e che ci sono parsi particolarmente significativi.

A.1. Simboli di Schläfli

La notazione di Schläfli⁽¹⁾, o simbolo di Schläfli è una notazione compatta per indicare le proprietà più importanti di un poligono o di un poliedro regolare e, più in generale, di un *politopo* (poliedro in dimensioni maggiori di tre) regolare.

Per un poligono regolare convesso la notazione è del tipo $\{p\}$, dove l'intero p è il numero di lati del poligono: per esempio $\{5\}$ è la notazione di Schläfli per il pentagono.

Più complessa la notazione per i poligoni regolari stellati: per una accurata comprensione premettiamo innanzitutto una definizione di poligono regolare stellato.

Consideriamo un circolo e scegliamo su di esso n punti, $P_1, P_2, \dots, P_n$, ordinati in senso orario o antiorario, in modo tale che gli angoli al centro individuati da due punti consecutivi siano uguali. Il poligono regolare (convesso) di n lati si ottiene semplicemente congiungendo il punto i -esimo con il punto $(i + 1)$ -esimo, secondo lo schema mostrato nella figura A.1.

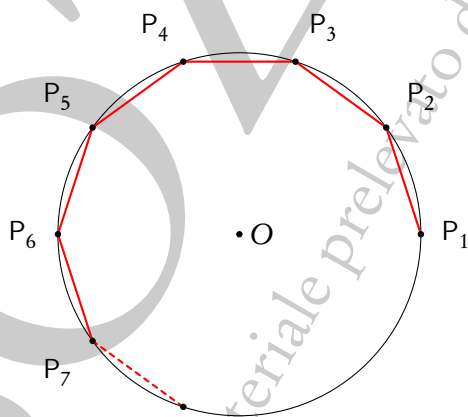


Figura A.1.: Costruzione di un poligono regolare

Congiungiamo ora invece i punti ogni due, oppure ogni tre, ecc., ovvero il punto i -esimo con il punto $(i + 2)$ -esimo, $(i + 3)$ -esimo, $\dots$, $(i + q)$ -esimo, secondo lo schema mostrato nella figura A.2. Possiamo considerare la costruzione degli usuali poligoni regolari schematizzata nella figura A.1 come un caso particolare di questa più generale: basterà far assumere a q il valore 1.

¹Questo nome è attribuito in onore di Ludwig Schläfli, 1814-1895, matematico svizzero cui si devono importanti contributi nei campi della geometria multidimensionale e dell'analisi.

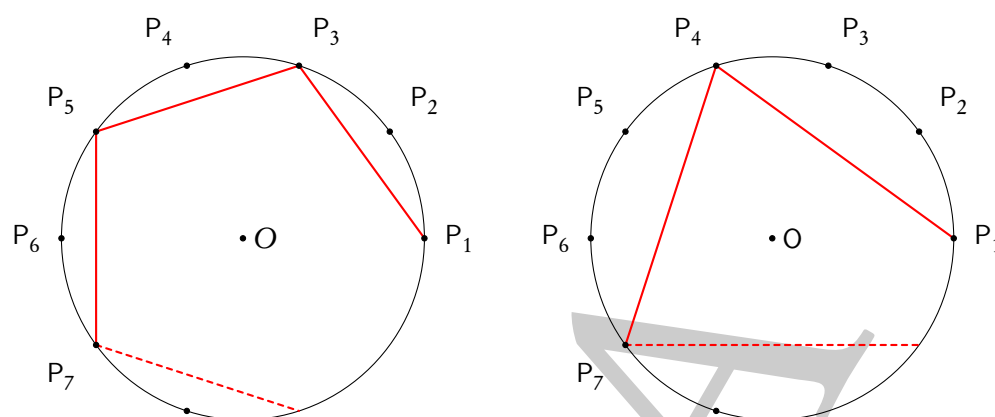


Figura A.2.: Costruzione di un poligono regolare stellato

Può succedere che, ripetendo la procedura di connessione dei punti con segmenti, si ritorni al punto di partenza avendo coperto tutti i punti (e questo succede se n e q sono primi tra di loro, ovvero non hanno divisori comuni), oppure no: nel secondo caso si ripete la procedura ricominciando con il primo punto non connesso e così di seguito. La figura che si ottiene è un *poligono stellato generalizzato*: l'aggettivo generalizzato, che normalmente si omette, è utilizzato perché nella usuale definizione, dovuta a Coxeter, si considera solo il caso in cui n e q non hanno divisori comuni. In ogni caso si può supporre, senza perdita di generalità, che $q < n/2$. Si veda la figura A.3, relativa al caso $n = 9$, dove in a) si ha $q = 2$, in b) $q = 3$, in c) $q = 4$: nella prima e nella terza a partire da un punto si ritorna allo stesso punto dopo aver coperto tutti i punti, nella seconda invece bisogna ricominciare il giro due volte. In sostanza la seconda figura è costituita da tre triangoli (equilateri) ruotati di 40° uno rispetto all'altro, mentre le altre figure sono degli ennagoni in cui il bordo è costituito da un'unica spezzata chiusa, seppure intrecciata.

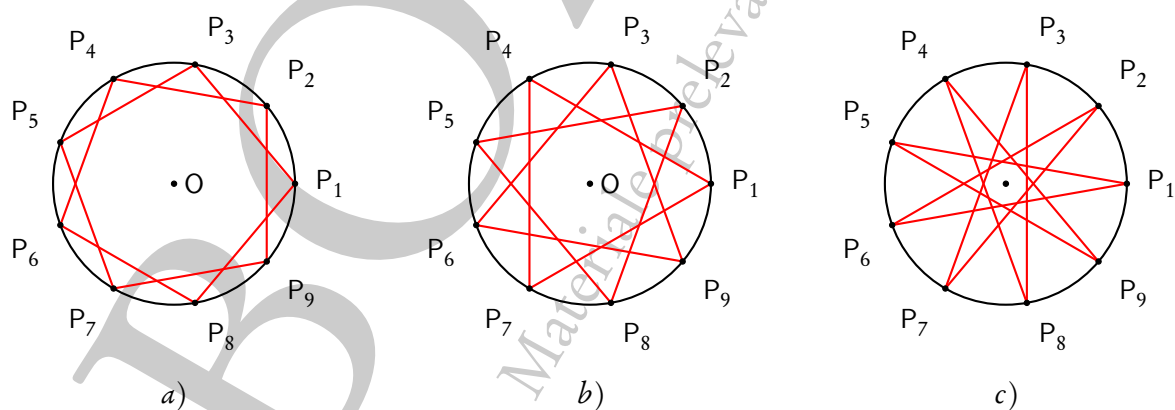


Figura A.3.: Tre diversi ennagoni regolari stellati

Nel caso dei poligoni stellati la notazione di Schläfli è rappresentata da una frazione del tipo n/q . Per esempio i tre ennagoni della figura A.3 si indicano, rispettivamente, con $\{9/2\}$, $\{9/3\}$, $\{9/4\}$, e questi simboli possono essere considerati un'estensione di quelli usati per i poligoni regolari convessi, dove

$q = 1$.

Il caso $\{9/3\}$, in cui la frazione non è “ridotta ai minimi termini”, il simbolo di Schläfli si usa scrivere come

$$3 \left\{ \frac{3}{1} \right\}$$

e la scrittura è particolarmente significativa, in quanto evidenzia il fatto che questo ennagono è costituito da 3 triangoli equilateri (che hanno simbolo $\{3/1\}$), opportunamente ruotati. Analogo discorso si può ripetere tutte le volte che n e q hanno un fattore comune. Si tenga ben presente che, nella scrittura precedente, *non* si deve pensare ad una moltiplicazione del numero 3 per la frazione $3/1$.

I poligoni regolari stellati furono studiati per la prima volta sistematicamente da Thomas Bradwardine (1290-1349), matematico ed ecclesiastico inglese (divenne anche, per un brevissimo periodo, arcivescovo di Canterbury); anche Keplero li trattò nel suo *Harmonices Mundi*. Entrambi introducono questi poligoni mediante il processo di *stellazione* a partire da un poligono regolare convesso. Descriveremo brevemente questo processo, che diventa particolarmente significativo nel caso dei poliedri. Si tratta in sostanza di prolungare i lati di un poligono regolare fin quando questi prolungamenti si incontrano di nuovo. La figura A.4 illustra il caso del pentagono e della sua stellazione, detta anche *pentagramma*. La figura A.5 illustra invece il caso dell'eptagono e delle sue due possibili stellazioni.

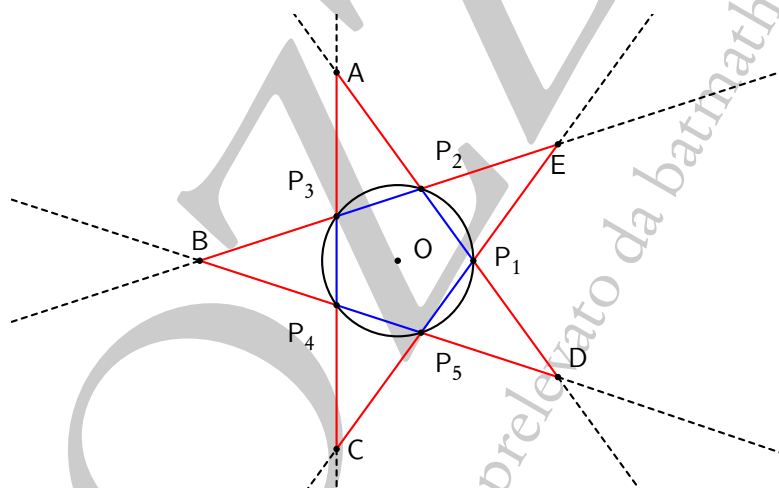


Figura A.4.: *Pentagramma ottenuto per stellazione dal pentagono regolare*

Il denominatore q nella frazione che individua un poligono stellato in notazione di Schläfli si chiama anche *densità* del poligono stesso: esso rappresenta il numero di volte che il perimetro del poligono gira intorno al centro prima di ritornare al punto di partenza o anche il numero di volte che una semiretta condotta dal centro incontra il perimetro del poligono, se si evitano i vertici e i punti dove i lati si incontrano. Si può agevolmente controllare questo fatto sulle figure proposte.

Alcuni dei poligoni stellati sono particolarmente importanti per motivi storici. Ne citiamo alcuni:

- il *pentagramma* ($\{5/2\}$), in uso fin dal 4000 a.C. e particolarmente caro ai Pitagorici;
- l'*esagramma* ($\{6/3\}$), o Stella di David o Salomone;
- la *Stella di Lakshmi* ($\{8/2\}$), in uso nell'induismo per simboleggiare Ashtalakshmi, le otto forme del benessere.

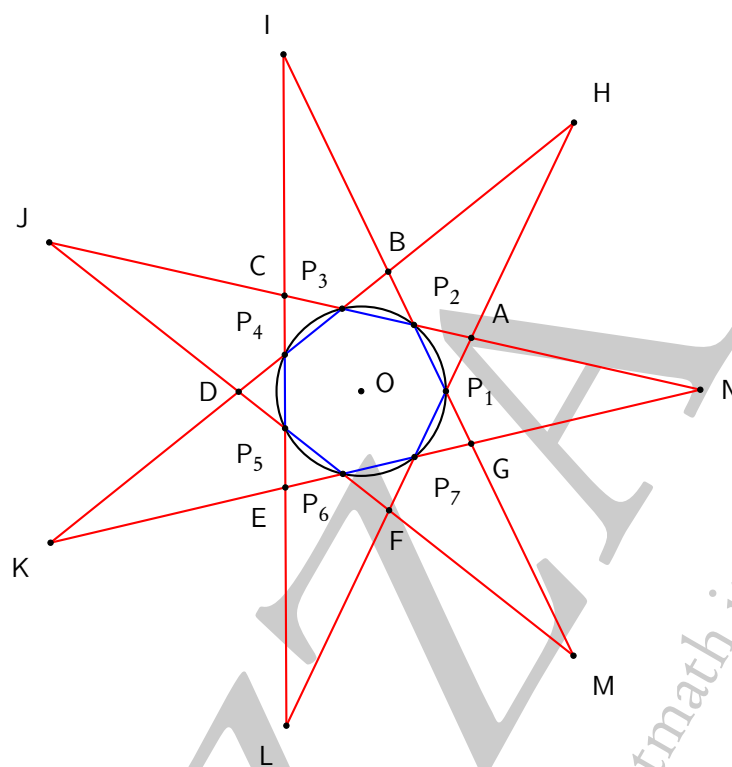


Figura A.5.: *Le due possibili stellazioni dell'eptagono: ABCDEFG e HIJKLMN*

Figure particolarmente interessanti dal punto di vista grafico si ottengono sovrapponendo tutti i poligoni, regolare e stellati, con un dato valore di n . La figura A.6 illustra il caso $n = 9$, in cui sono presenti l'ennagono regolare e i tre ennagoni regolari stellati.

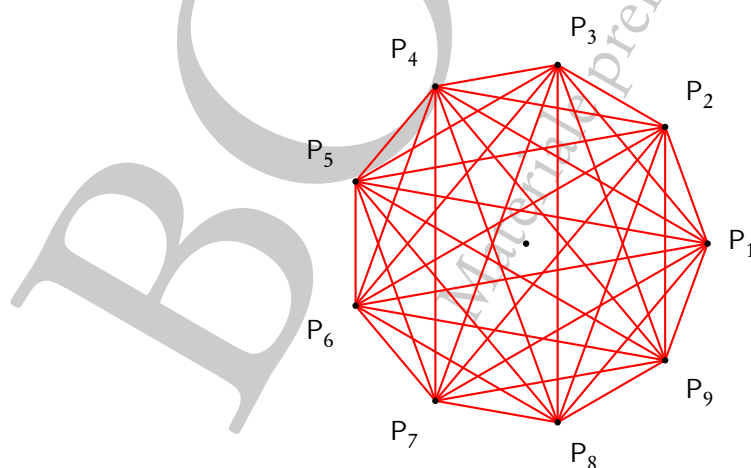


Figura A.6.: *I quattro ennagoni regolari sovrapposti*

E veniamo ora ad esaminare i simboli di Schläfli in uso per individuare i poliedri regolari o solidi platonici. In questo caso la notazione è di nuovo particolarmente semplice ed è del tipo $\{p, q\}$, dove p indica il tipo di poligono regolare comune a tutte le facce, mentre q indica quanti poligoni circondano ciascun vertice. Si ha dunque la seguente situazione:

- $\{3, 3\}$ per il tetraedro regolare;
- $\{4, 3\}$ per il cubo;
- $\{3, 4\}$ per l'ottaedro regolare;
- $\{5, 3\}$ per il dodecaedro regolare;
- $\{3, 5\}$ per l'icosaedro regolare.

Si noti come questi simboli siano adatti ad evidenziare il fatto che il tetraedro è duale di se stesso ($\{3, 3\}$ rimane identico se si inverte l'ordine di $p = 3$ e $q = 3$), che il cubo e l'ottaedro sono uno il duale dell'altro ($\{4, 3\}$ e $\{3, 4\}$) e infine che il dodecaedro e l'icosaedro sono uno il duale dell'altro ($\{5, 3\}$ e $\{3, 5\}$).

A.2. Sulla definizione di poligono e poliedro regolare

La definizione di poligono regolare convesso è sufficientemente semplice: si può procedere come schematicamente illustrato nella figura A.1 oppure definire un poligono regolare convesso come un poligono convesso equilatero ed equiangolo. Come è ben noto nel caso dei triangoli essere equilatero implica essere equiangolo e viceversa, mentre ciò non è vero per poligoni con più di tre lati: un rettangolo è equiangolo, ma generalmente non equilatero (nel qual caso si chiamerebbe un quadrato), un rombo è equilatero, ma generalmente non equiangolo (nel qual caso si chiamerebbe sempre un quadrato).

Tuttavia, come osserva Coxeter in [43], una definizione molto significativa e semplice è la seguente: un poligono convesso è regolare se e solo se ha sia una circonferenza inscritta che una circonferenza circoscritta che siano *concentriche*.

La cosa è evidente per i triangoli, che hanno sempre sia una circonferenza inscritta che una circonferenza circoscritta, ma generalmente con centro diverso, tranne per i triangoli equilateri. Si veda la figura A.7.

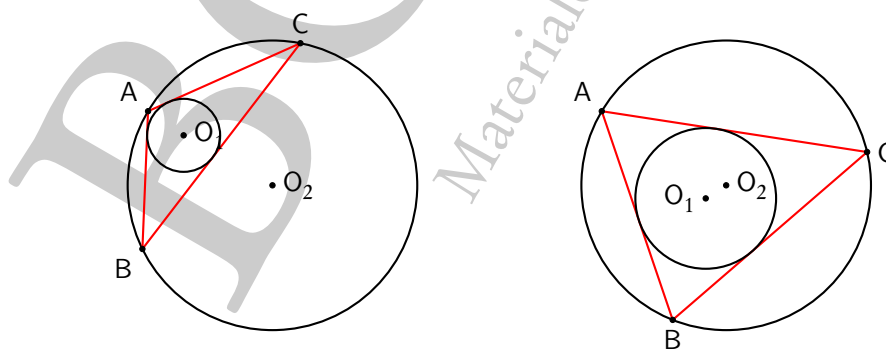


Figura A.7.: *Triangoli con circonferenze inscritta e circoscritta non concentriche*

Per i quadrilateri si può fare riferimento ai rettangoli che hanno una circonferenza circoscritta, ma generalmente non una inscritta, o ai rombi che hanno una circonferenza inscritta, ma generalmente non una circonferenza circoscritta: solo se i rettangoli o i rombi si riducono a quadrati allora ci sono sia la circonferenza inscritta che quella circoscritta ed esse sono concentriche. Tuttavia esistono, anche nei quadrilateri, situazioni più complesse: la figura A.8 mostra un trapezio isoscele e un pentagono con entrambe le circonferenze, ma non concentriche.

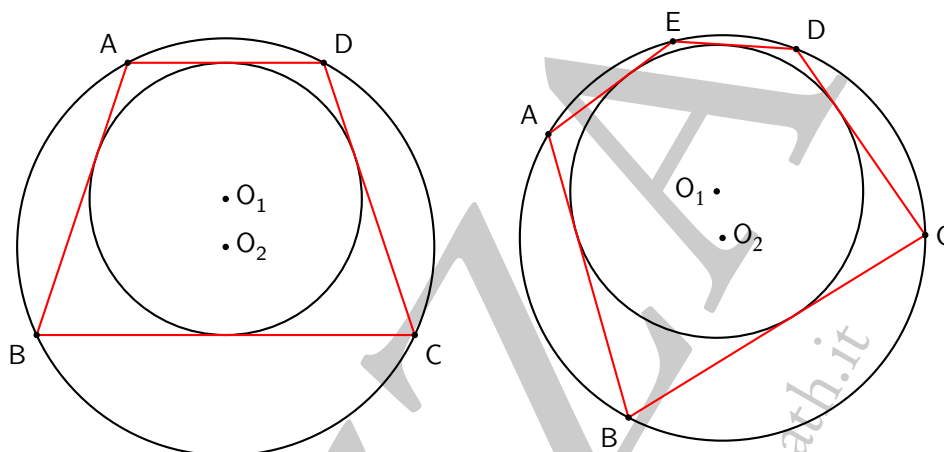


Figura A.8.: Trapezio e pentagono con circonferenze inscritta e circoscritta non concentriche

La cosa particolarmente significativa è che qualcosa di simile succede anche per i poliedri regolari convessi, cioè per i solidi platonici: essi sono gli unici solidi convessi in cui esistono tre sfere, ovvero la sfera circoscritta, quella inscritta e l'intersefera, che sono *concentriche*.

Tutto sommato una definizione di solido regolare basata su questa proprietà sarebbe molto semplice; tuttavia essa rimanderebbe l'analisi delle proprietà essenziali di questi solidi ad appositi teoremi, invece che assumerle fin dall'inizio. In ogni caso, che la si voglia assumere come definizione oppure no, si tratta di una proprietà caratteristica molto interessante.

A.3. Poligoni di Petrie dei poliedri regolari

Dato un poliedro regolare, un suo poligono di Petrie è un poligono (non piano) avente per lati gli spigoli del poliedro e tale che esattamente due suoi lati consecutivi (ma non tre) appartengano ad una stessa faccia. In sostanza una volta scelta una faccia e due suoi lati consecutivi che saranno i primi due lati del costruendo poligono di Petrie, i successivi passi sono obbligati.

La figura A.9 illustra un esempio di un tale poligono tracciato sul tetraedro regolare. Supponiamo di partire dal vertice A e di tracciare il lato $\overline{AB}$. Giunti in B possiamo proseguire o con $\overline{BC}$ o con $\overline{BD}$; se proseguiamo con $\overline{BD}$, arrivati in D dobbiamo procedere con $\overline{DC}$ e non con $\overline{AD}$ altrimenti avremmo tre lati consecutivi del costruendo poligono di Petrie che appartengono alla stessa faccia. Parimenti arrivati in C concludiamo il percorso con $\overline{CA}$ ritornando al punto di partenza. Il poligono (obliquo, ovvero non piano) così costruito ha quattro lati e ogni altro poligono di Petrie sul tetraedro ha sempre quattro lati: il numero di lati si indica con h e si chiama numero di Coxeter del poliedro.

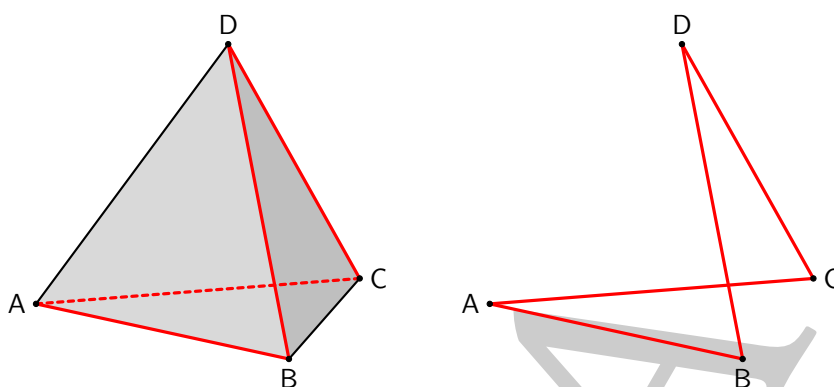


Figura A.9.: Un poligono di Petrie sul tetraedro regolare

I poligoni di Petrie si possono introdurre anche per le tre tassellazioni regolari del piano: quelle con triangoli equilateri, con quadrati e con esagoni regolari, e con la stessa definizione data sopra per i poliedri. In questo caso i poligoni saranno naturalmente piani e non sono poligoni chiusi. La figura A.10 illustra un esempio di tali poligoni per le tre tassellazioni.

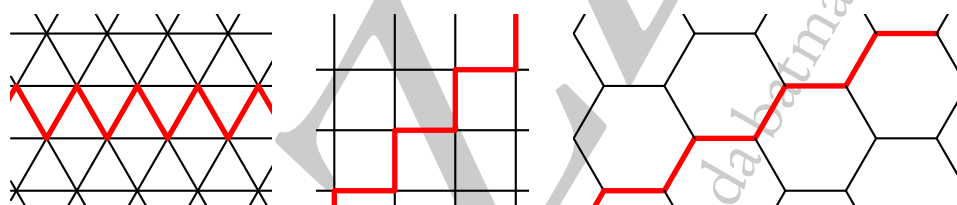


Figura A.10.: Poligoni di Petrie per le tassellazioni regolari del piano

I poligoni di Petrie sui poliedri regolari hanno alcune proprietà interessanti, tra cui le due seguenti:

- un poliedro e il suo duale hanno lo stesso numero di Coxeter, ovvero poligoni di Petrie con lo stesso numero di lati, e precisamente $h = 4$ per il tetraedro (come già visto, ed è anche opportuno ricordare che il tetraedro è il duale di se stesso), $h = 6$ per il cubo e l'ottaedro, $h = 10$ per il dodecaedro e l'icosaedro;
- tracciato un poligono di Petrie su uno dei poliedri regolari è possibile eseguire una proiezione ortogonale del poliedro stesso su un piano in modo che il poligono di Petrie risulti un poligono regolare (un quadrato, un esagono o un decagono a seconda del caso) e con tutto il resto del poliedro proiettato all'interno di questo poligono regolare.

Le figure che seguono illustrano la situazione per i cinque solidi platonici. Cominciamo a considerare il caso del tetraedro, facendo riferimento anche alla figura A.9. La figura A.11 mostra a sinistra lo stesso tetraedro della figura A.9, opportunamente ruotato, mentre a destra ancora lo stesso poliedro ruotato in modo che la proiezione del poligono sghembo ABDC appaia esattamente come un quadrato che contiene al suo interno gli altri due spigoli del tetraedro. Per gli altri quattro solidi proponiamo solo le figure senza commenti: per ognuno illustriamo il poliedro con evidenziato un poligono di Petrie, il solo

poligono, il poliedro parzialmente ruotato e infine il poliedro ruotato in modo che la proiezione del poligono di Petrie appaia un poligono piano regolare.

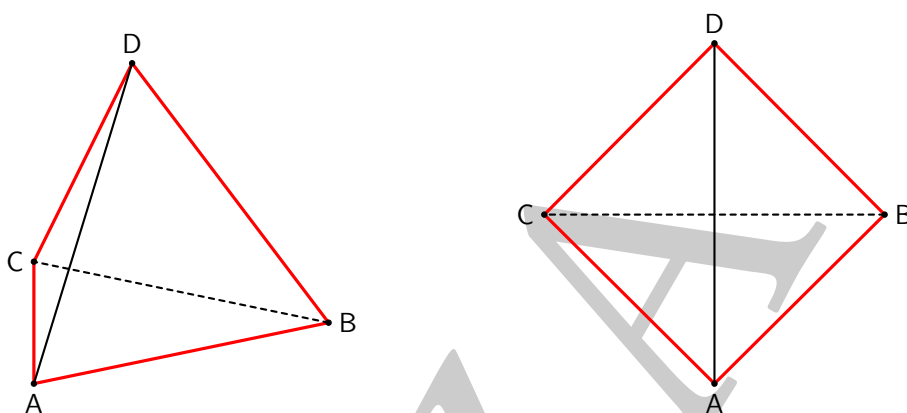


Figura A.11.: *Poligoni di Petrie e tetraedro regolare*

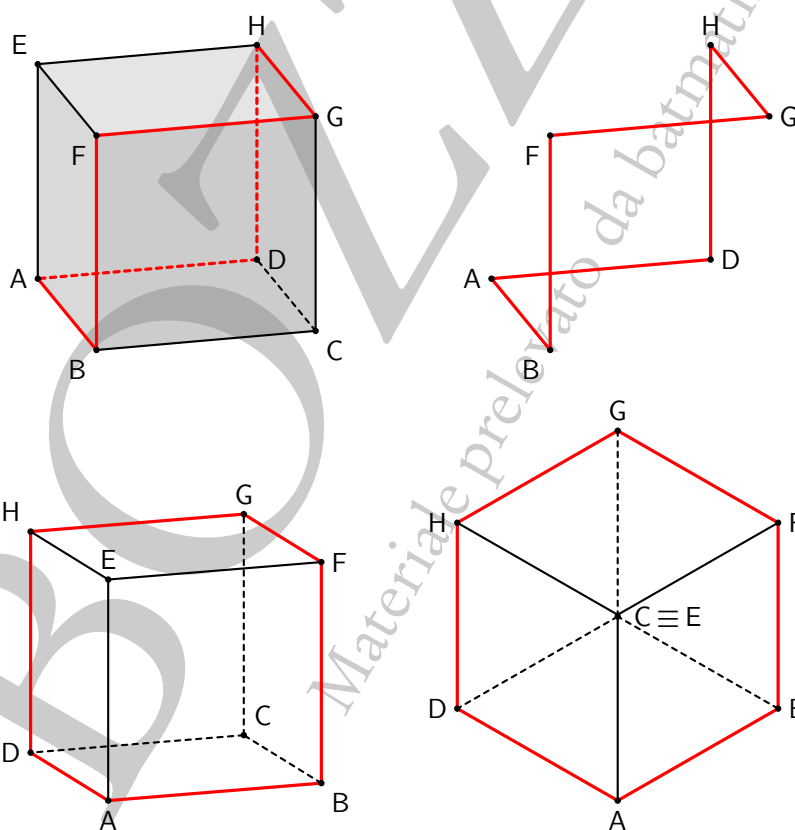


Figura A.12.: *Poligoni di Petrie: il cubo*

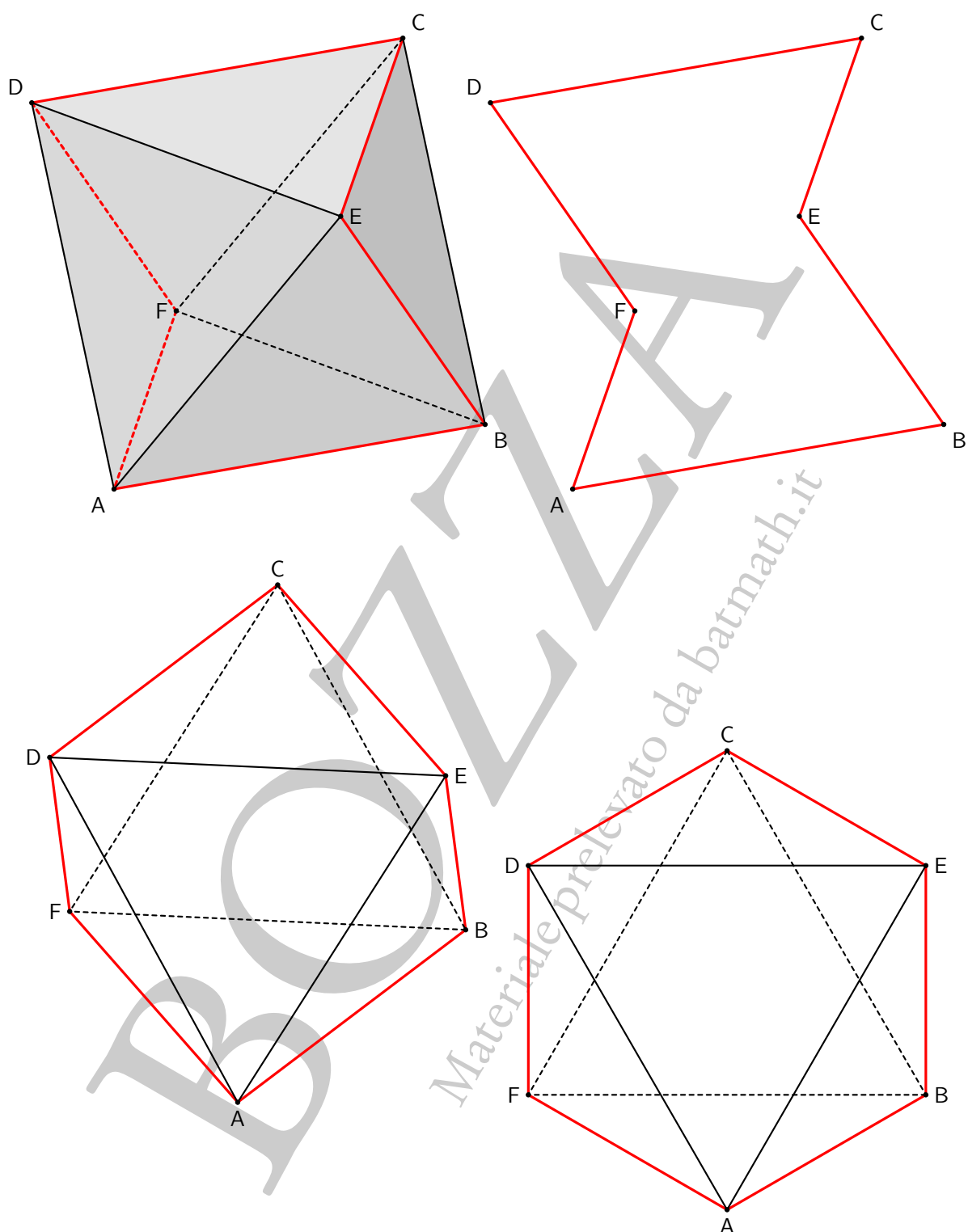


Figura A.13.: Poligoni di Petrie: l'ottaedro regolare

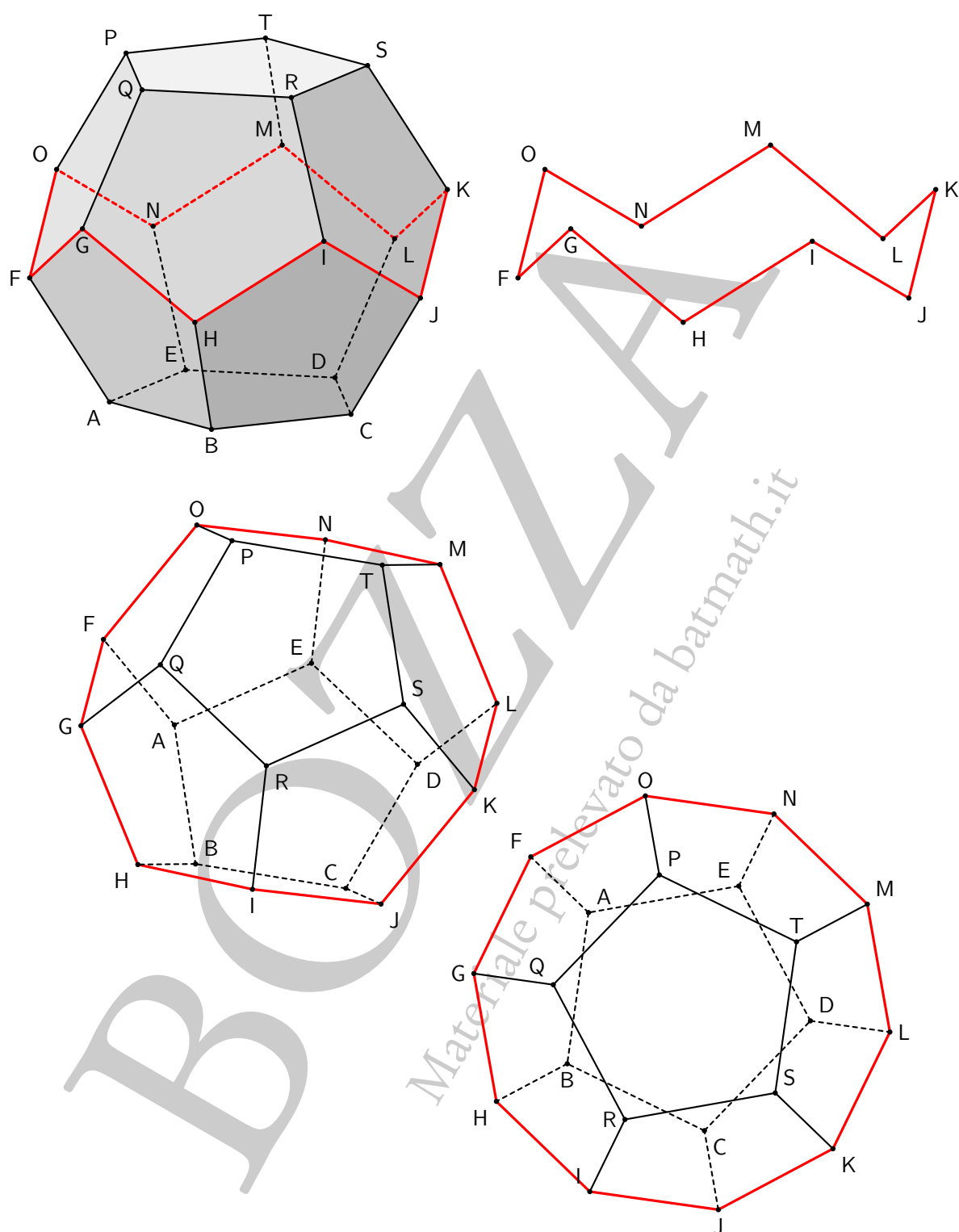


Figura A.14.: *Poligoni di Petrie: il dodecaedro regolare*

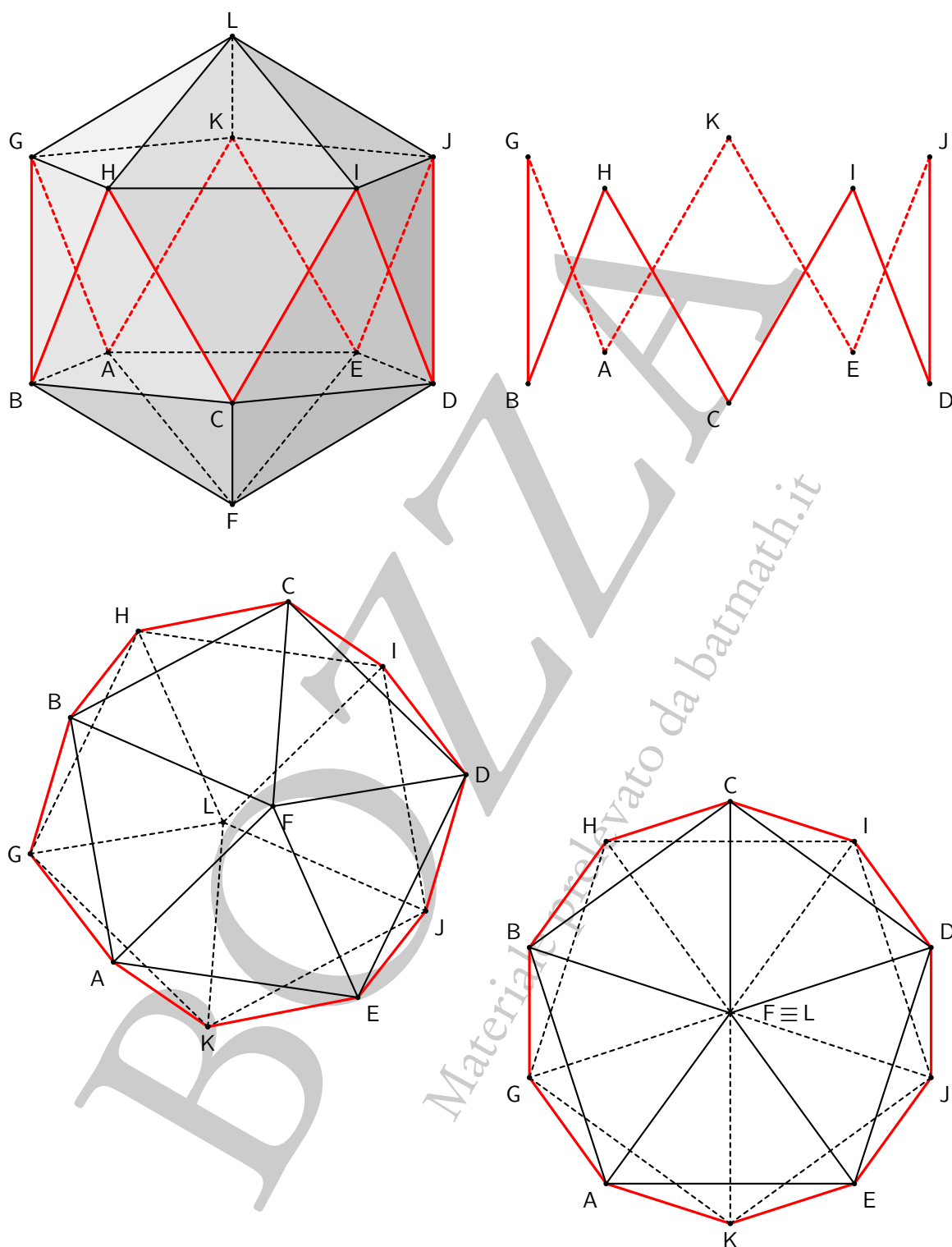


Figura A.15.: Poligoni di Petrie: l'icosaedro regolare

A.4. Diagrammi di Schlegel

Poiché i poliedri sono figure tridimensionali, è necessario individuare una qualche strategia per rappresentarli su un foglio bidimensionale. Le strategie da noi adottate in questi fascicoli sono principalmente una proiezione parallela su un piano opportuno e lo sviluppo piano della superficie. Una diversa rappresentazione è quella basata sui poligoni di Petrie e proposta nel precedente paragrafo A.3: si tratta in questo caso di una proiezione ortogonale su un opportuno piano. Si potrebbero naturalmente usare anche le usuali proiezioni ortogonali su tre piani perpendicolari oppure delle proiezioni prospettiche.

Tra tutte le possibili proiezioni prospettiche è particolarmente significativa quella che dà origine ai cosiddetti *diagrammi di Schlegel*: si tratta di una proiezione da un punto appartenente alla perpendicolare al centro di una faccia, appena all'esterno del poliedro. Si esamini la figura A.16 relativa al cubo, per capire il procedimento.

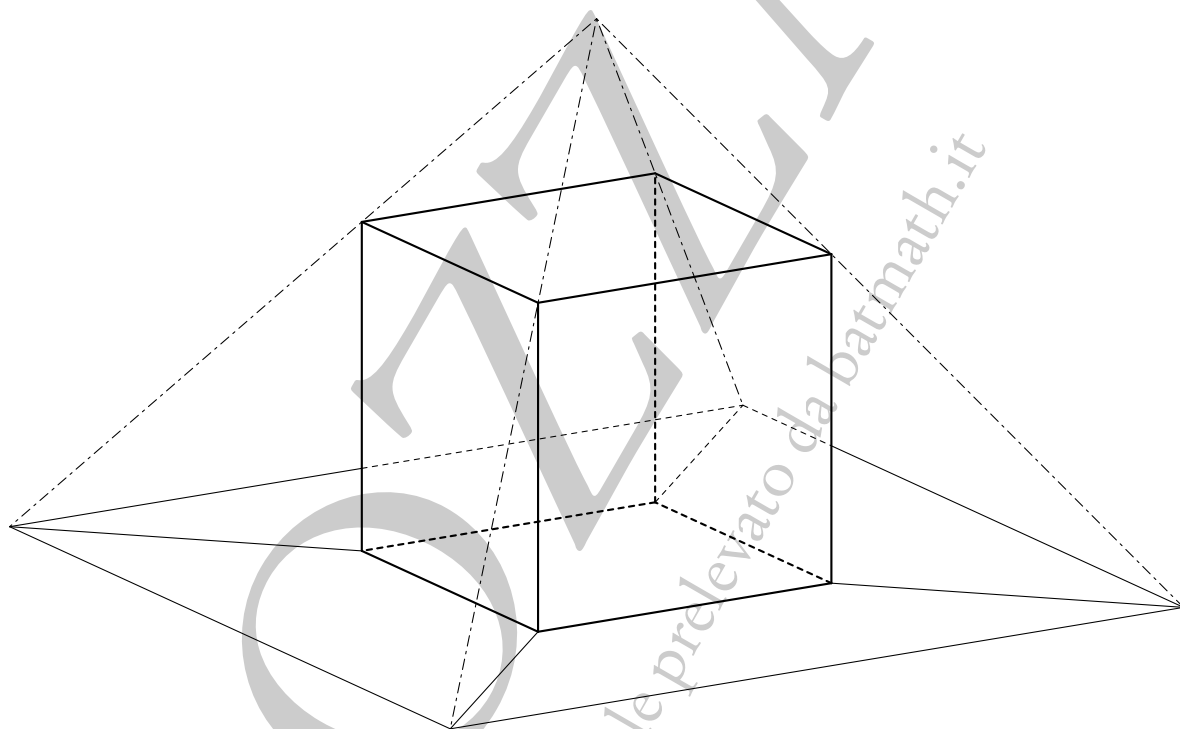


Figura A.16.: Il cubo e una sua proiezione prospettica su un piano

Come si può vedere questa proiezione mantiene la forma quadrata delle due facce superiore e inferiore del cubo, mentre trasforma le altre quattro facce in trapezi isosceli. Inoltre le due facce superiore e inferiore nella proiezione sono una interna all'altra.

Osserviamo che la proiezione mantiene alcune delle caratteristiche essenziali del cubo: il numero delle facce (6), pur di considerare anche il quadrato esterno come indipendente, il numero dei vertici (8), il numero degli spigoli (12), il fatto che in ogni vertice si incontrano 3 spigoli. Non viene invece mantenuto il parallelismo degli spigoli.

Questo tipo di proiezione, o meglio di rappresentazione piana di un poliedro, diventa particolarmente significativa quando si voglia passare a trattare figure in dimensione superiore a tre: in questo caso

ovviamente non se ne può nemmeno costruire un modello reale ed è necessaria comunque una qualche proiezione, inizialmente tridimensionale e poi, con qualche ulteriore tecnica, in due dimensioni. Senza entrare nei dettagli facciamo un breve cenno al caso del cubo in quattro dimensioni, o ipercubo, detto anche *tesseracto*. Osserviamo che il quadrato (cubo in due dimensioni) ha 4 lati uguali e 4 vertici, il cubo tridimensionale usuale ha 6 facce quadrate uguali e 8 vertici: procedendo non è difficile concludere che un ipercubo in quattro dimensioni ha 8 “facce” cubiche e 16 vertici.

La più semplice rappresentazione dell'ipercubo utilizza un diagramma tipo quello usato per il cubo ordinario ed è mostrata nella figura A.17. Naturalmente non è possibile visualizzare lo schema della proiezione dallo spazio quadridimensionale a quello tridimensionale (e successivamente a quello in due dimensioni). Quello che possiamo mostrare è solo il risultato della proiezione stessa, ma è importante sottolineare che vengono mantenute molte delle caratteristiche dell'ipercubo quadridimensionale, eccettuato il parallelismo, come già osservato nel caso della proiezione del cubo che abbiamo sopra considerato.

Si possono riconoscere nel diagramma gli otto cubi che costituiscono le facce dell'ipercubo e i sedici vertici, in ognuno dei quali si intersecano quattro spigoli. Sei degli otto cubi che costituiscono le iperfacce dell'ipercubo sono deformati, in maniera non dissimile da quello che succedeva nella proiezione del normale cubo, mentre anche qui sono mantenute le forme cubiche delle due iperfacce quadridimensionali rispettivamente più vicina e più lontana dal centro di proiezione.

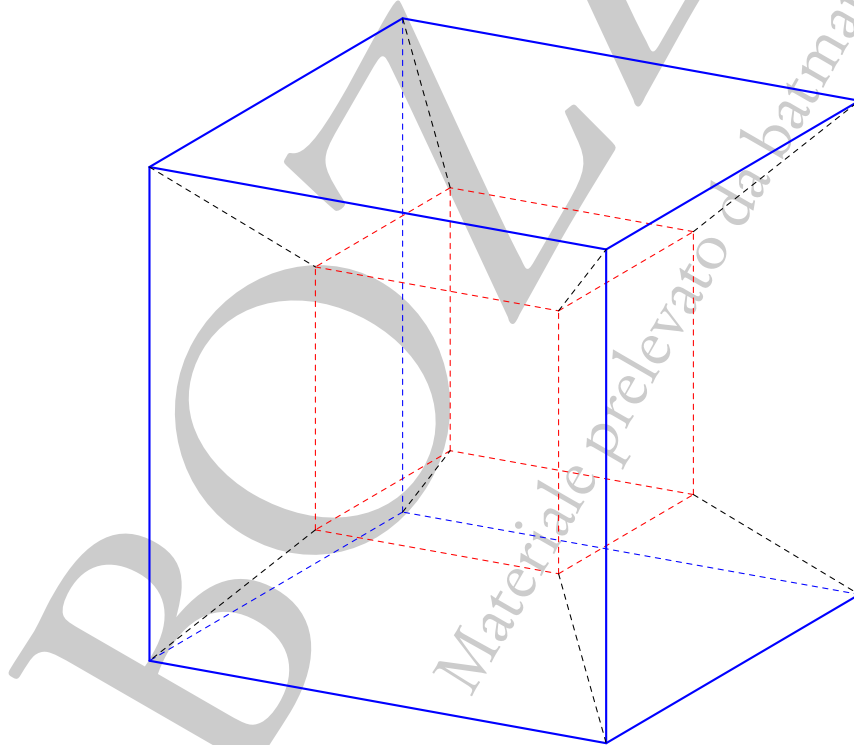


Figura A.17.: *Proiezione tridimensionale di un ipercubo*

Nelle figure che seguono proponiamo i diagrammi di Schlegel dei cinque solidi Platonici, oggetto di studio di questo fascicolo.

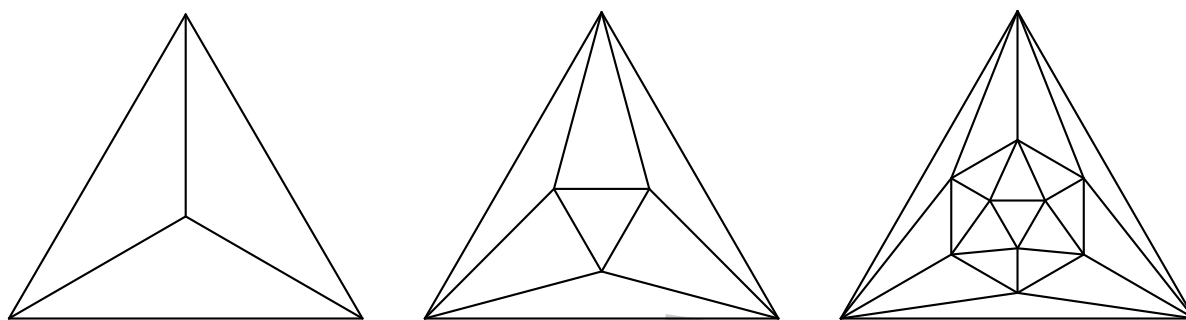


Figura A.18.: *Diagrammi di Schlegel del tetraedro, dell'ottaedro e dell'icosaedro*

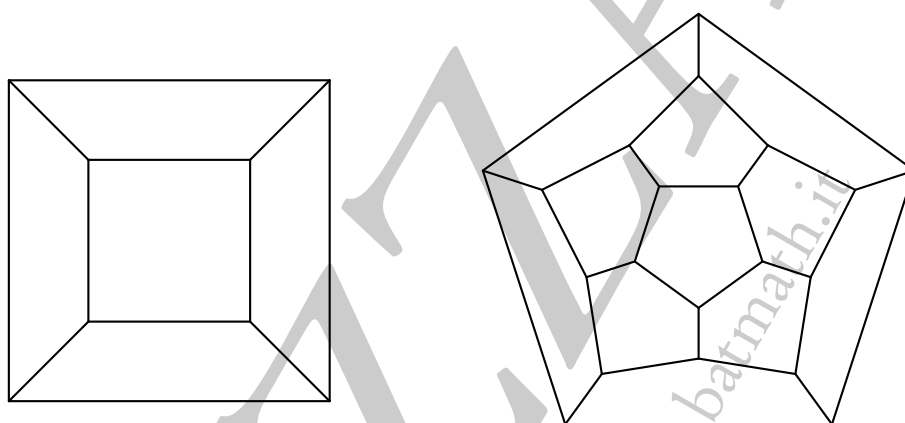


Figura A.19.: *Diagrammi di Schlegel del cubo e del dodecaedro*

A.5. Keplero e i poliedri

Come già più volte ricordato, Keplero si interessò estesamente ai poliedri, in particolare nel suo *Harmonices Mundi* del 1619.

Qui vogliamo segnalare che in alcune delle sue illustrazioni egli propose delle costruzioni di alcuni poliedri in una maniera non comune per l'epoca e che anticipano il concetto di poligono di Petrie.

La figura A.20 si riferisce alla costruzione del cubo, ottenuto unendo due parti il cui bordo è costituito da un poligono di Petrie.

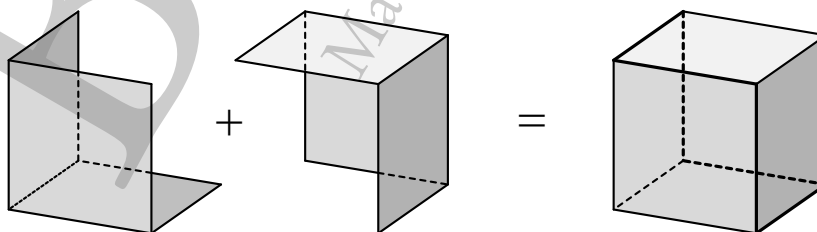


Figura A.20.: *Costruzione del cubo secondo Keplero*

Nella figura A.21 è proposta la costruzione del dodecaedro, anche qui ottenuto unendo due parti il cui bordo è costituito da un poligono di Petrie.

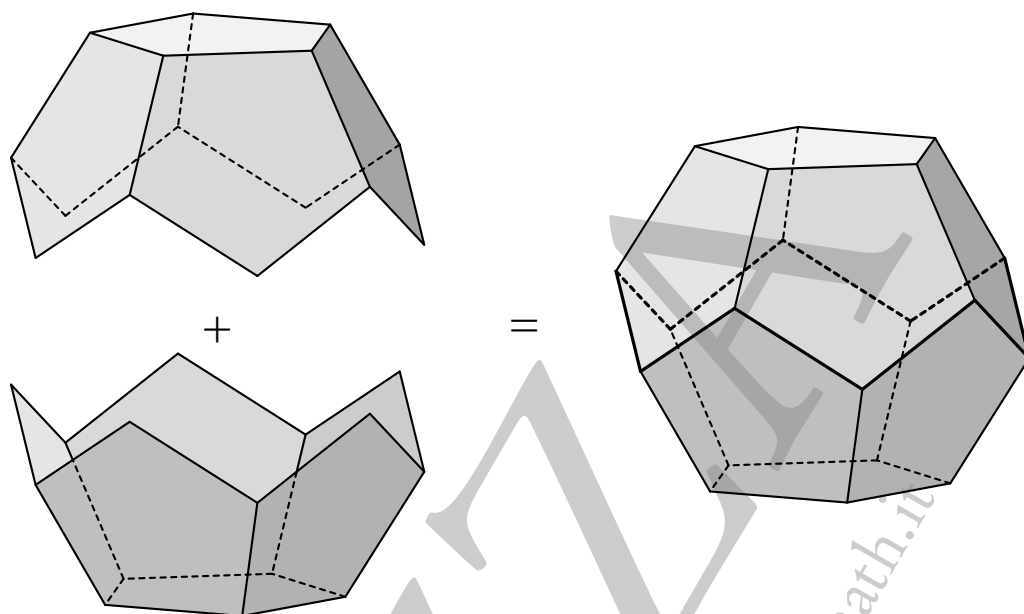


Figura A.21.: Costruzione del dodecaedro secondo Keplero

È opportuno anche segnalare che l'icosaedro è costruito da Keplero secondo la tecnica che abbiamo proposto nella figura 7.20 nella pagina 81.

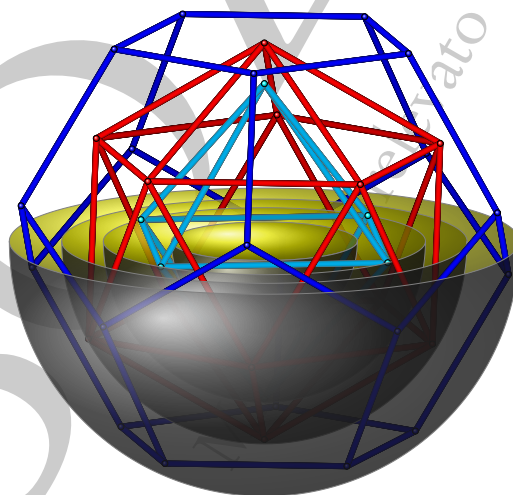


Figura A.22.: Dettaglio dei pianeti interni del sistema solare di Keplero dal *Mysterium Cosmographicum*

Un'ultima importante considerazione concernente Keplero: nel *Mysterium Cosmographicum* del 1596 egli propone un modello del sistema solare basato sui poliedri platonici e le loro sfere circoscritte. Precisamente egli sostiene che i sei pianeti allora conosciuti hanno delle posizioni determinate dal fatto

di essere inscritti e circoscritti ai cinque solidi regolari e quindi le distanze tra i pianeti sono regolate da precisi rapporti matematici. I pianeti e i solidi si succedono in quest'ordine: Saturno è il pianeta più esterno, a cui è inscritto un cubo. Inscritto al cubo vi è Giove a cui analogamente succedono il tetraedro, Marte, il dodecaedro, la Terra, l'icosaedro, Venere, l'ottaedro ed infine Mercurio. Lo stesso Keplero sarà però costretto in seguito ad abbandonare questa idea, troppo in disaccordo con le misurazioni sperimentali. Nello stesso volume sono proposte due immagini per illustrare l'idea: una mostra tutti i cinque pianeti, l'altra mostra il dettaglio della parte interna comprendente Marte, la Terra, Venere e Mercurio. Ne proponiamo una riproduzione nelle figure [A.22](#) e [A.23](#).

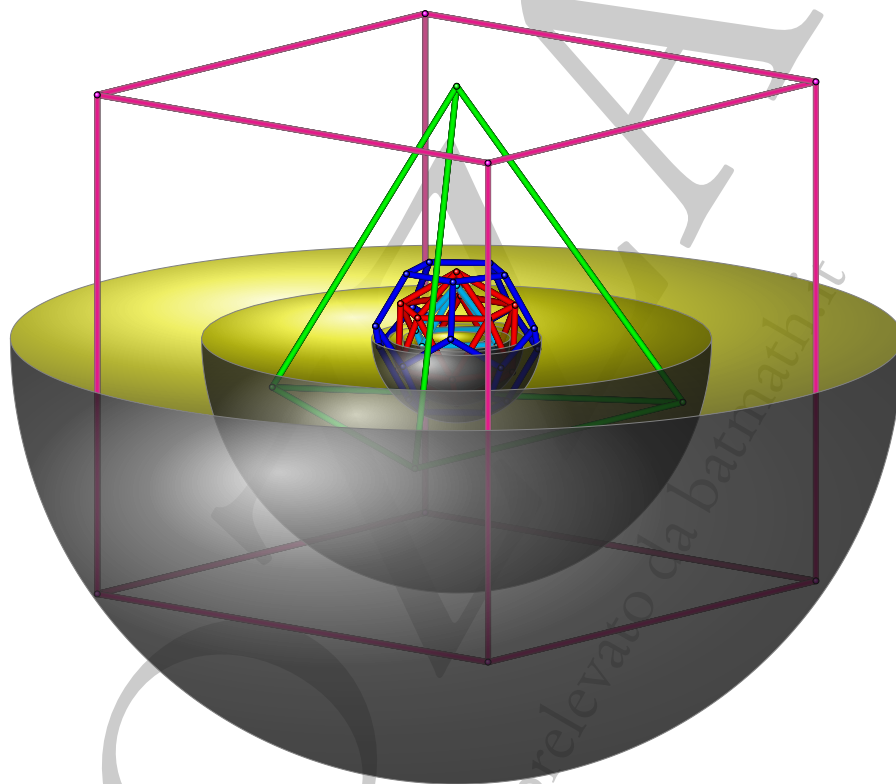


Figura A.23.: Riproduzione dell'immagine illustrante il sistema solare, presa dal *Mysterium Cosmographicum*

A.6. La formula di Eulero

Abbiamo già menzionato, vedi il teorema [2.2](#) nella pagina [12](#), l'importante formula di Eulero relativa ai poliedri

$$V - S + F = 2.$$

Vogliamo ora estendere questa relazione a situazioni più complesse e vederne qualche interessante conseguenza.

Innanzitutto ricordiamo che la formula di Eulero vale per poliedri che soddisfino la definizione che ne abbiamo dato nella pagina [11](#) e che siano semplicemente connessi: un modo semplice per valutare se

la formula è applicabile o no è quella di pensare il poliedro fatto di materiale elastico e immaginare di gonfiarlo fino ad ottenere un palloncino sferico.

Senza entrare troppo nei dettagli diamo ora una definizione, a livello intuitivo, di *genere* (geometrico) di una superficie quindi di *genere di un poliedro*.

Su una superficie si possono tracciare curve semplici (cioè non intrecciate) e chiuse. Per esempio su una sfera si possono tracciare cerchi, come i meridiani e i paralleli, o anche altre linee chiuse come evidenziato con un esempio nella figura A.24.

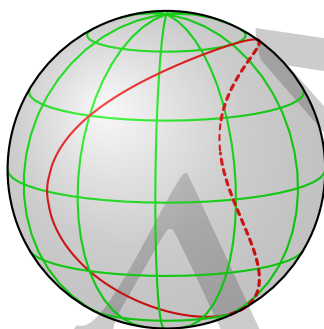


Figura A.24.: Paralleli, meridiani e una curva chiusa su una sfera

Si dice che le linee chiuse tracciate sulla superficie “tagliano” la superficie. La sfera ha la particolarità che anche una sola linea chiusa taglia la superficie sferica in due parti disgiunte: per questo motivo alla sfera si assegna il *genere* geometrico 0.

Passiamo ora a esaminare il caso di una superficie più complessa, precisamente una superficie toroidale, che ha la particolarità di avere un buco: si veda la figura A.25 di sinistra. Anche in questo caso una linea chiusa può dividere la superficie in due regioni disgiunte, come mostra la figura A.25 di destra.

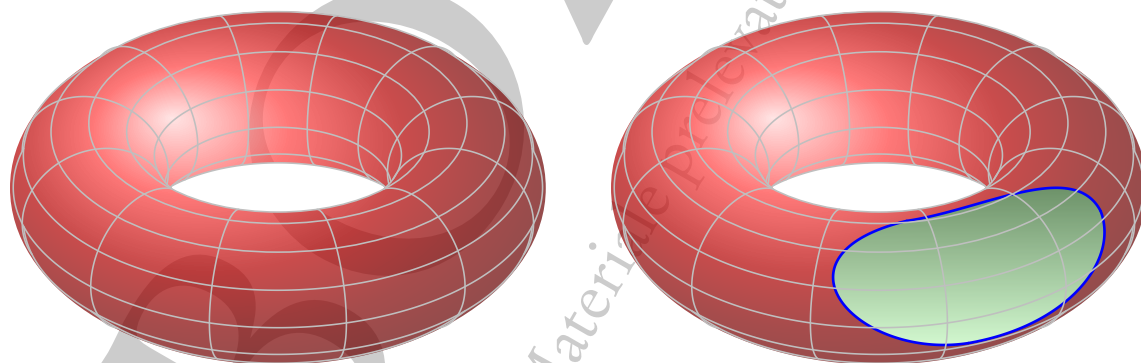


Figura A.25.: Superficie toroidale, a sinistra, e una curva chiusa che la divide in due regioni disgiunte, a destra

Tuttavia, a differenza della sfera, in questo caso esiste la possibilità di tracciare una linea chiusa sulla superficie, senza che essa venga divisa in due regioni disgiunte: la figura A.26 illustra questo fatto, dove sono state scelte come linee chiuse una volta un “parallelo” e una volta un “meridiano”.

Se però tracciamo sulla superficie del toro due linee chiuse, la superficie stessa viene necessariamente divisa in due regioni disgiunte: si veda la figura A.27.

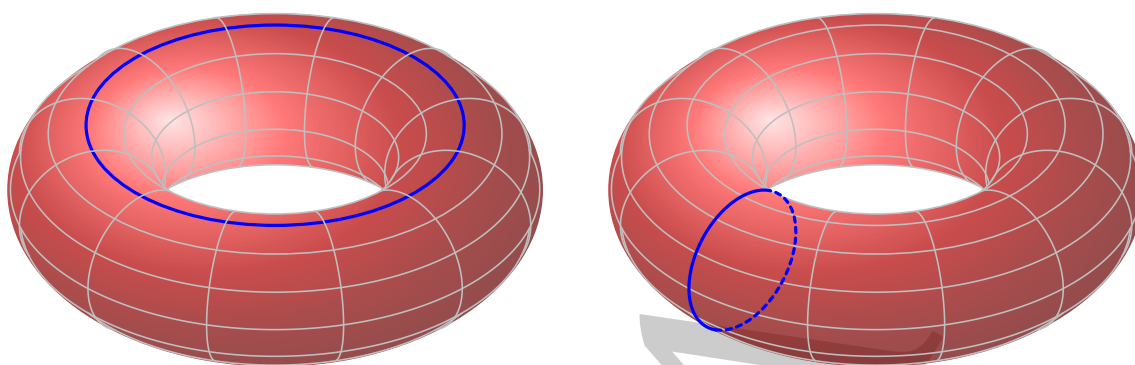


Figura A.26.: Superficie toroidale con due esempi di curve chiuse che non la dividono in regioni disgiunte

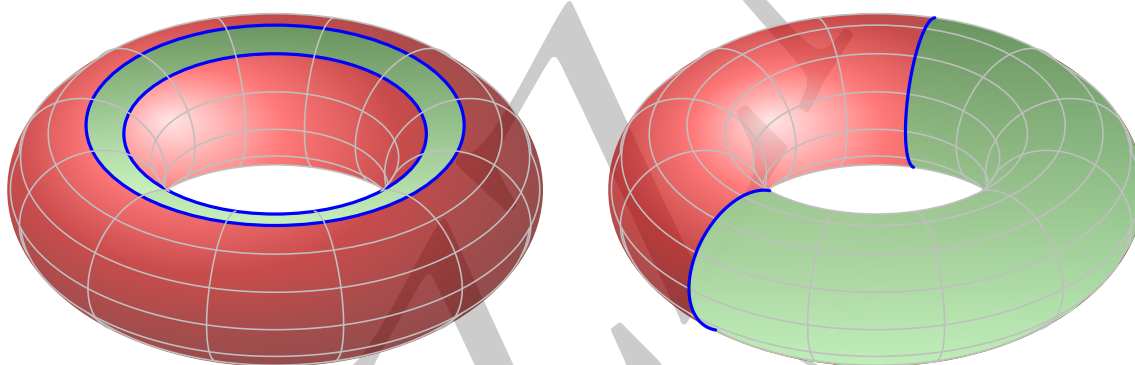


Figura A.27.: Superficie toroidale con due esempi di due curve chiuse che la dividono in regioni disgiunte

In sostanza possiamo dire che al massimo possiamo tracciare sulla superficie del toro una linea chiusa senza che essa venga divisa in regioni disgiunte: per questo motivo al toro si assegna il *genere* geometrico 1.

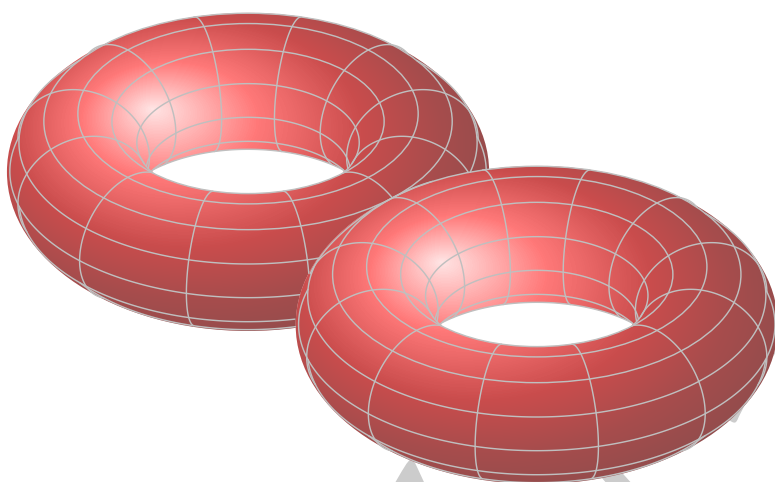
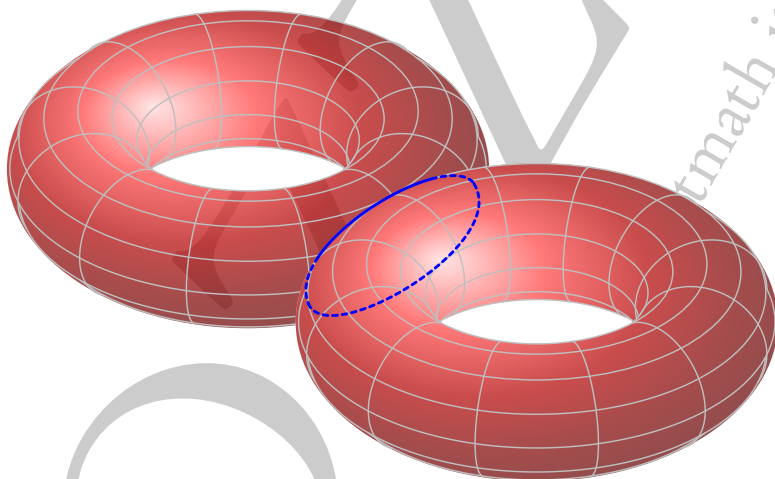
Passiamo ora ad esaminare una superficie ancora più complessa, come il “toro doppio” della figura A.28.

In questo caso è sempre possibile tracciare una sola linea chiusa che divide la superficie in due regioni disgiunte, come la linea della figura A.29, che è la linea che separa le due parti di “ciambella” che costituiscono il doppio toro, a anche una linea come quella della figura A.25 di destra.

Questa volta però anche due linee chiuse possono essere tracciate senza dividere la superficie in due regioni disgiunte: basta considerare ad esempio due delle tre linee della figura A.30. Se però consideriamo tre linee chiuse, come quelle sempre della figura A.30, allora la superficie viene divisa in due regioni distinte: questa volta il massimo numero di linee chiuse che non spezzano la superficie è 2: per questo motivo al doppio toro si assegna il genere geometrico 2.

In sostanza il genere di una superficie misura quanti “buchi” distinti sono presenti sulla stessa.

Il concetto di genere si può estendere anche a una superficie poliedrica: il poliedro è di genere 0 se, “gonfiato come un palloncino”, si riduce ad una sfera, è di genere 1 se si riduce ad un toro, e così via. I poliedri di Platone sono di genere 0, i poliedri di Császár e di Szilassi, che abbiamo già proposto nella figura 2.3 del capitolo 2 e che tratteremo più in dettaglio nel prossimo paragrafo A.7, sono di genere 1.

Figura A.28.: *Superficie toroidale doppia*Figura A.29.: *Superficie toroidale doppia con linea chiusa che la divide in due regioni disgiunte*

La cosa interessante è che la formula di Eulero, valida nella forma $V - S + F = 2$ per i poliedri equivalenti ad una sfera, può essere estesa anche ai poliedri equivalenti a una superficie di genere più elevato nella forma

$$V - S + F = 2 - 2p,$$

ove p è il genere del poliedro. Lo vedremo in dettaglio sui due esempi dei poliedri di Császár e di Szilassi nel prossimo paragrafo [A.7](#).

Ci sono molte importanti conseguenze di questa formula. Ci interesserà per esempio, nel fascicolo sui solidi di Archimede, il fatto che i poliedri di Goldberg, ovvero i poliedri con facce pentagonali ed esagonali e vertici di valenza tre, hanno necessariamente 12 facce a pentagoni. Analogamente si può provare che poliedri con facce quadrangolari ed esagonali e vertici di valenza tre hanno necessariamente 6 facce quadrilateri.

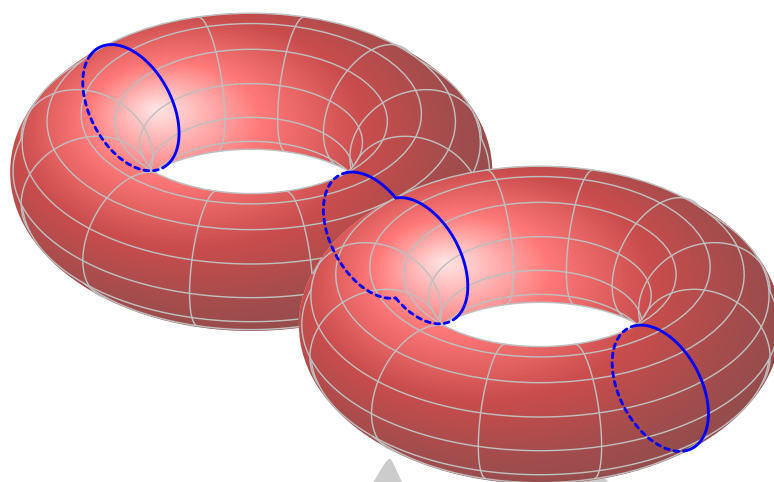


Figura A.30.: *Superficie toroidale doppia con tre linee chiuse*

Qui vogliamo segnalare due fatti: il primo è che non possono esistere poliedri “sferici” con sette spigoli, il secondo che la prova che esistono solo cinque poliedri platonici può essere derivata direttamente dalla formula di Eulero.

Cominciamo dalla prima osservazione: non vogliamo provarla direttamente, rimandando per questo ai testi specializzati, mentre vogliamo mostrare come a partire dal minimo numero di spigoli, cioè 6, corrispondente al caso del tetraedro, si possano costruire poliedri con qualunque numero di spigoli, a parte appunto sette. Poliedri con un numero pari qualunque, $2n$, di spigoli sono, per esempio, le piramidi aventi per base un poligono di n lati. Un po' più delicata la costruzione di un poligono con un qualunque numero dispari di spigoli. Il modo più semplice è quello di partire da una piramide, per semplicità retta e a base poligonale regolare, almeno per $n \geq 5$, con un totale di $2n$ spigoli, e aggiungere uno spigolo e un vertice come schematizzato nella figura A.31 relativamente al caso di una piramide a base pentagonale: i punti M_1, M_2, M_3, M_5 sono i punti medi dei rispettivi spigoli $\overline{VA_1}, \overline{VA_2}, \overline{VA_3}, \overline{VA_5}$, mentre B è il punto di incontro di M_5M_1 e M_3M_2 .

Il risultato finale è mostrato nella figura A.32.

Il procedimento può essere esteso a una piramide qualunque con base almeno pentagonale; per $n = 4$, e quindi $2n = 8$, bisogna prendere per base ad esempio un trapezio isoscele (altrimenti non si trova il corrispondente del punto B della figura A.32), mentre per $n = 3$ il procedimento non funziona, in accordo con il fatto che non ci sono poliedri con sette spigoli.

E veniamo alla dimostrazione che i solidi platonici sono solo cinque, sulla base della formula di Eulero: la dimostrazione è ripresa dal magnifico testo di Richeson [41]. Consideriamo dunque un poliedro regolare, con V vertici, S spigoli e F facce. In questa prima fase della dimostrazione il fatto che le facce siano regolari non interviene direttamente: la cosa che conta è che tutte le facce abbiano lo stesso numero di lati e che tutti i vertici abbiano la stessa valenza. Indichiamo con n il numero di lati di ciascuna faccia ($n \geq 3$) e con m il numero di vertici, o di facce, concorrenti in ciascun vertice. Ogni faccia contribuisce a S con n spigoli, ma ciascuno spigolo è in comune a due facce: si deve dunque avere $S = nF/2$. Similmente ogni faccia contribuisce a V con n vertici, ma poiché in ogni vertice si incontrano m facce, si deve avere $V = nF/m$. Sostituendo questi valori nella formula di Eulero si può

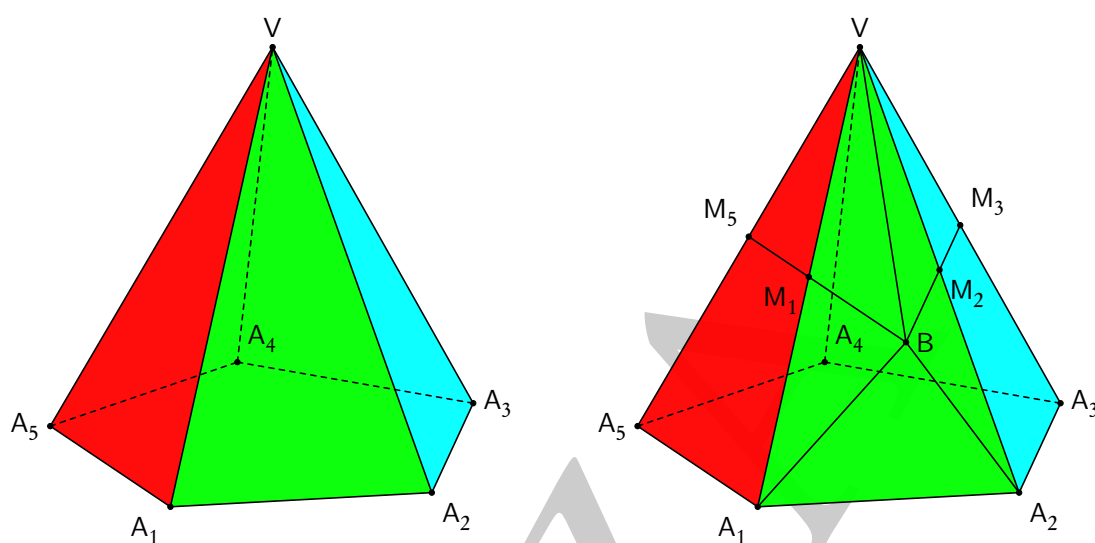


Figura A.31.: Da una piramide con 10 spigoli a un poliedro con 11 spigoli

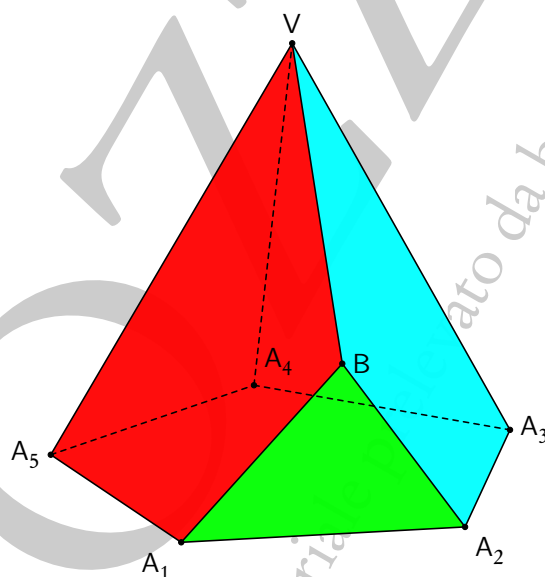


Figura A.32.: Il poliedro con 11 spigoli ottenuto con il processo indicato nella figura A.31

ricavare F in funzione di n ed m . Si trova

$$F = \frac{4m}{2n - mn + 2m}.$$

Poiché F e $4m$ sono numeri positivi, tale deve essere anche il denominatore della frazione. Dunque i

numeri n ed m devono verificare la condizione:

$$2n - mn + 2m > 0.$$

Non è difficile provare che ci sono solo cinque coppie (n, m) che soddisfano questa disuguaglianza, e precisamente $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$: questi sono proprio i valori di n ed m che caratterizzano i solidi platonici.

Non abbiamo ancora sfruttato la regolarità delle facce: per esempio nel caso $n = 4$ e $m = 3$ anche il parallelepipedo o il tronco di piramide della figura A.33 vanno bene.

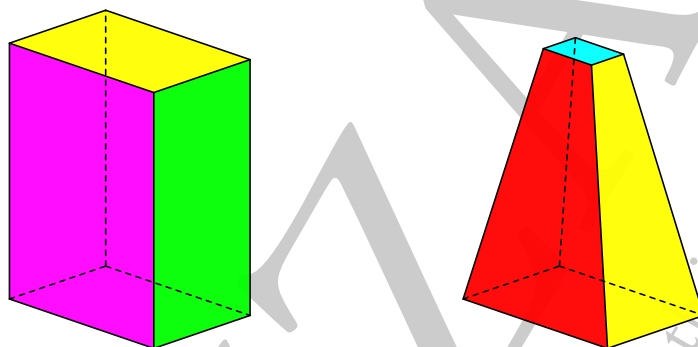


Figura A.33.: Un parallelepipedo e un tronco di piramide con $n = 4$ e $m = 3$

Richiedendo infine la regolarità delle facce si ottengono i solidi platonici.

A.7. I parenti del tetraedro

I tetraedri sono i poliedri con il minor numero di facce possibili: sono necessariamente solidi convessi a quattro facce triangolari, quattro vertici e sei spigoli. Il più noto è ovviamente il tetraedro regolare, il primo dei solidi platonici.

I tetraedri hanno due interessanti proprietà:

1. non hanno diagonali, in quanto ogni coppia di vertici è collegata da uno spigolo;
2. ogni loro faccia confina con tutte le altre, ovvero due facce qualunque hanno uno spigolo in comune.

Queste due proprietà sono esclusive dei tetraedri, se ci limitiamo a considerare i poliedri convessi, mentre esistono altri due poliedri, non convessi, che hanno rispettivamente la prima e la seconda proprietà. Precisamente:

1. il poliedro di Császár è un poliedro privo di diagonali: è stato scoperto dal matematico ungherese Ákos Császár nel 1949;
2. il poliedro di Szilassi è un poliedro in cui ogni faccia confina con tutte le altre: è stato scoperto dal matematico ungherese Lajos Szilassi nel 1977.

Abbiamo già proposto un'immagine di questi due poliedri, tra di loro duali, nella figura 2.3 del capitolo 2, che qui riproduciamo nella figura A.34.

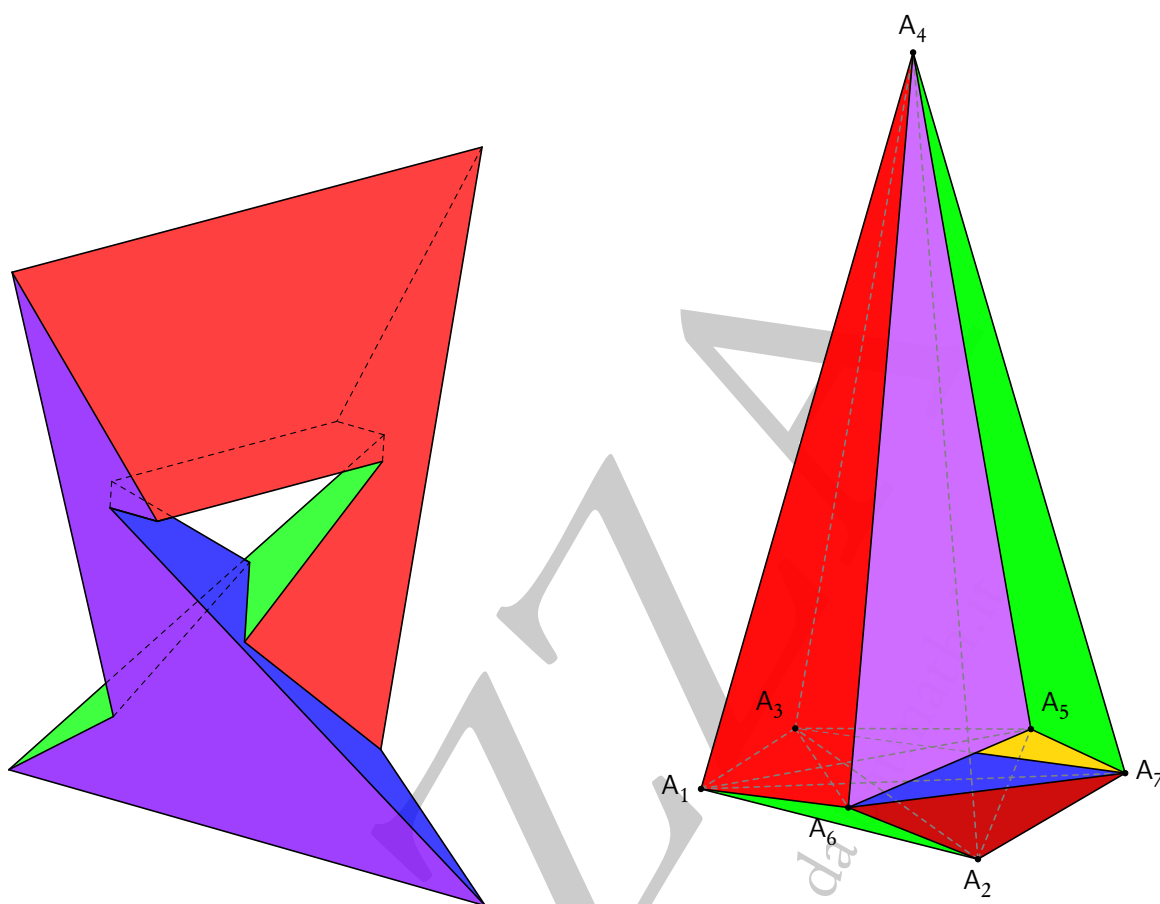


Figura A.34.: I poliedri duali di Szilassi, a sinistra, e Császár, a destra

Vogliamo ora trattare questi poliedri in maniera più dettagliata, cominciando con l'elencare le loro caratteristiche in termini di facce, vertici, spigoli.

	Vertici	Spigoli	Facce	Valenza vertici	Tipo di facce
Császár	7	21	14	6	Triangoli
Szilassi	14	21	7	3	Esagoni non regolari

Entrambi i poliedri sono di genere $p = 1$, ovvero sono poliedri *toroidali* (hanno un solo “buco”), per cui la relazione di Eulero per essi diventa

$$V - S + F = 2 - 2p = 0,$$

come si verifica facilmente.

Per entrambi i poliedri esistono diverse versioni, strutturalmente e topologicamente identiche: in tutte le figure abbiamo scelto di proporre la versione più classica. Il poliedro più difficile da visualizzare in una proiezione bidimensionale è quello di Császár: solo costruendo un modellino in cartone ci si

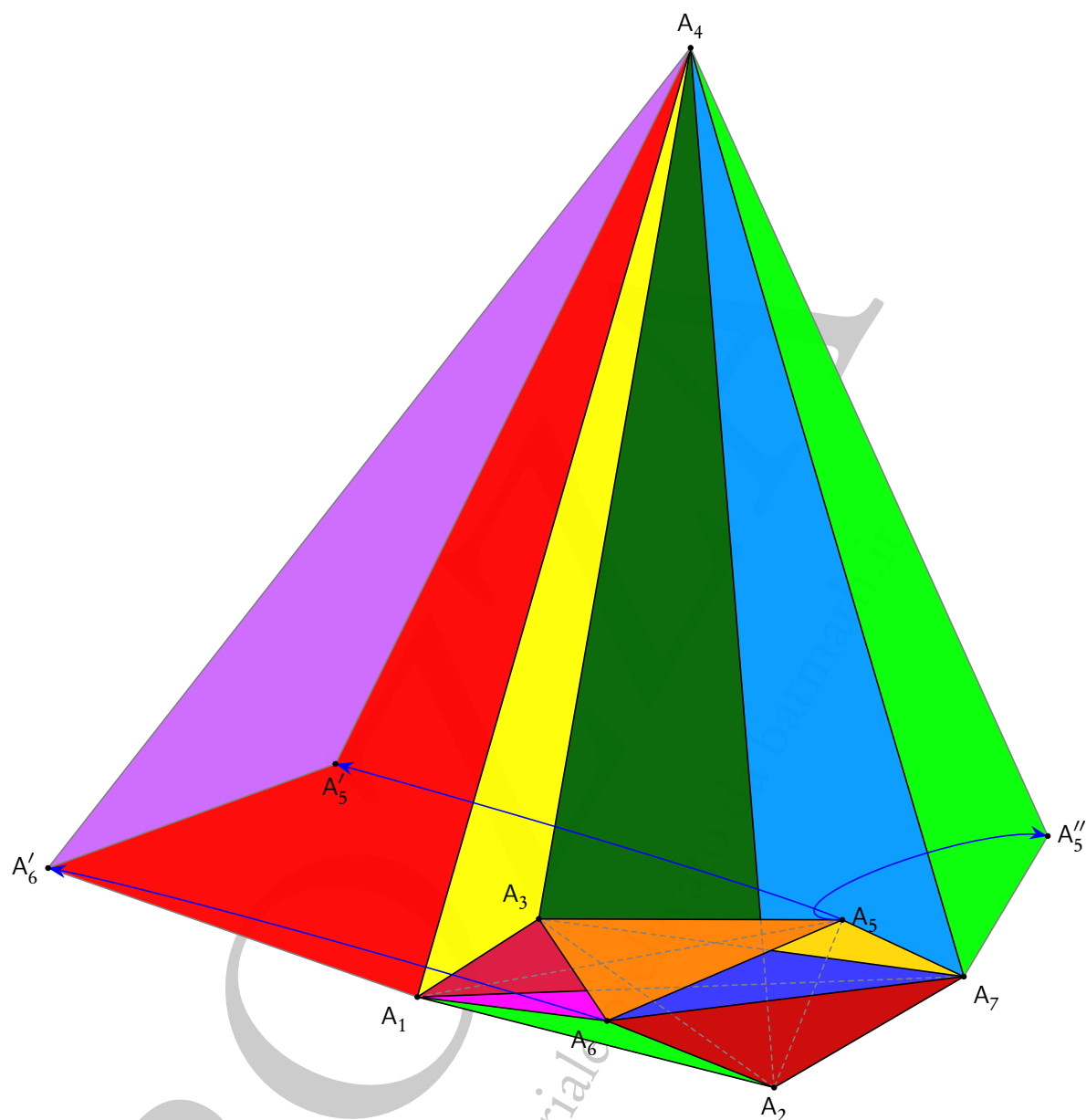


Figura A.35.: *Dettaglio della struttura interna del poliedro di Császár dopo rotazione di alcune facce della parte alta*

può rendere, almeno parzialmente, conto della sua complessità. Più semplice la visualizzazione, anche in una proiezione 2D, del poliedro di Szilassi.

Le figure dalla A.35 alla A.39 propongono diverse immagini relative al poliedro di Császár in cui abbiamo ruotato progressivamente alcune facce dello stesso, con lo scopo di “svelarne” la struttura interna, molto complessa. In questa versione il poliedro di Császár si può pensare costituito da due tronconi: le sei facce che hanno in comune il vertice A_4 , che costituiscono la “parte alta” del poliedro, e

le altre otto facce che coinvolgono i rimanenti sei vertici e che costituiscono la “parte bassa” del poliedro: è proprio quest’ultima che risulta di più difficile visualizzazione.

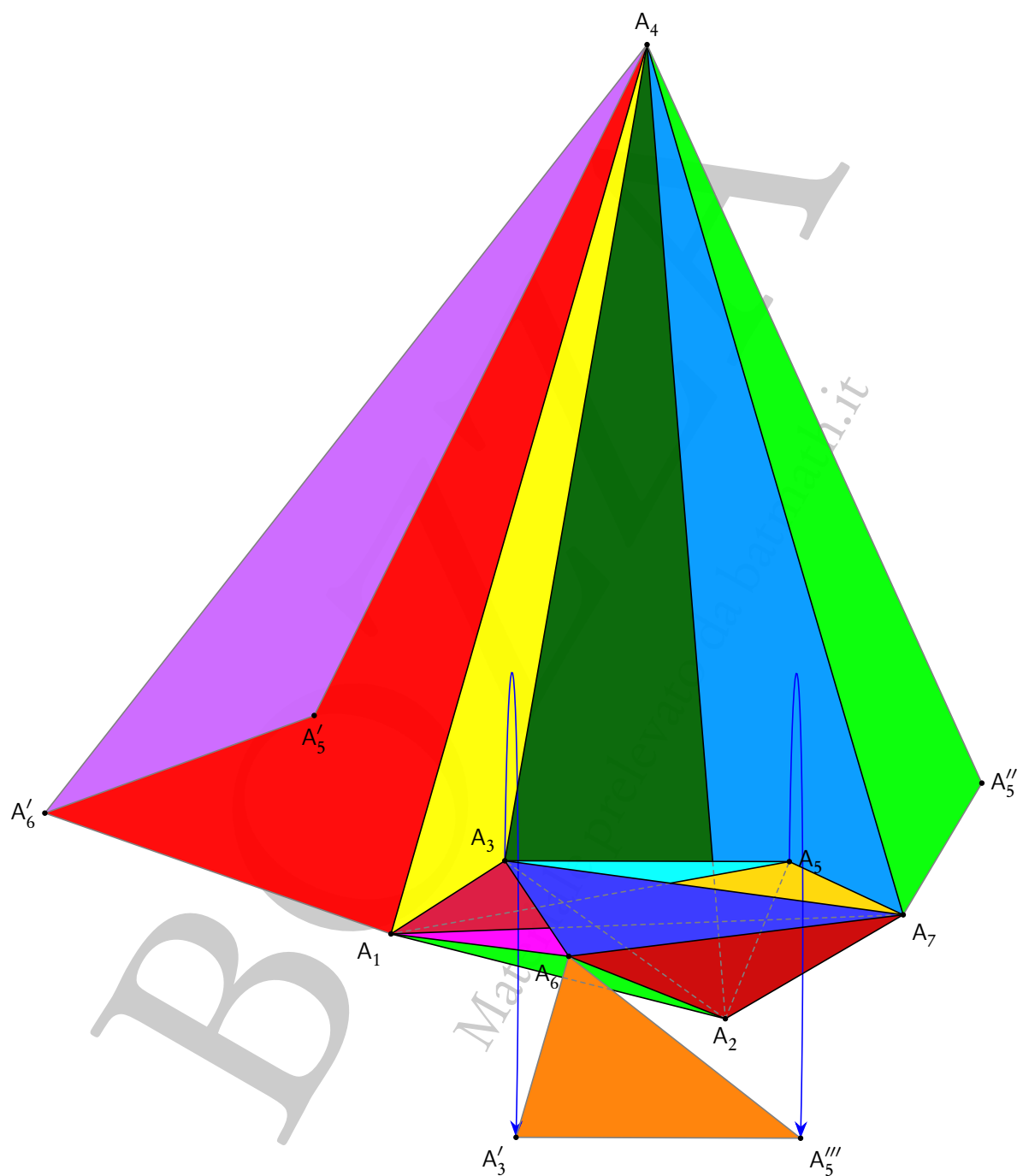


Figura A.36.: Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una quarta faccia

Nella figura A.35 abbiamo iniziato a sottoporre la faccia $A_4A_5A_7$ ad una rotazione attorno allo spigolo A_4A_7 e la coppia di facce $A_4A_5A_6$ e $A_4A_6A_1$ ad una rotazione attorno allo spigolo A_4A_1 : questo ci consente di visualizzare con maggiore dettaglio le tre facce posteriori di vertice A_4 (ovvero $A_4A_1A_3$, $A_4A_3A_2$ e $A_4A_2A_7$), oltre ad alcuni dettagli delle facce con vertici nei punti A_1 , A_2 , A_3 , A_5 , A_6 e A_7 .

Nelle figure successive abbiamo via via ruotato i triangoli che costituiscono la parte bassa del poliedro, consentendo la visualizzazione delle facce nascoste o parzialmente nascoste.

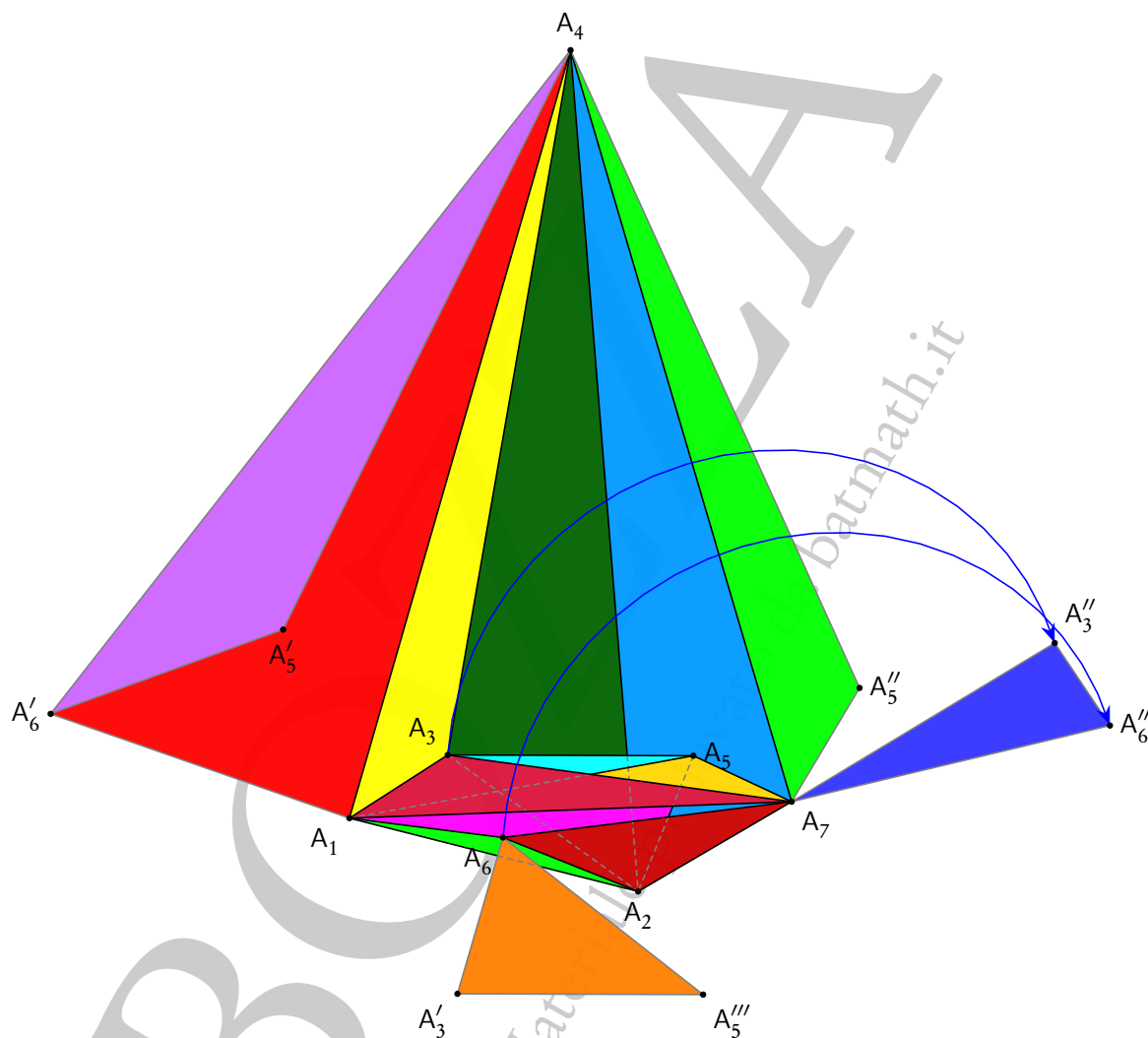


Figura A.37.: Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una quinta faccia

Le figure A.40 e A.41 mostrano lo sviluppo separatamente della parte alta e della parte bassa del poliedro di Császár. Esse sono utili per valutare la valenza dei vertici controllando, per ciascuno dei vertici, che esso si collega con tutti gli altri, che è la proprietà che rende questo poliedro interessante, e simile al tetraedro. Questi sviluppi possono anche essere utilizzati (seppure con una certa difficoltà) per costruire un modello in cartone del poliedro. Anche questi sviluppi mostrano come la parte alta

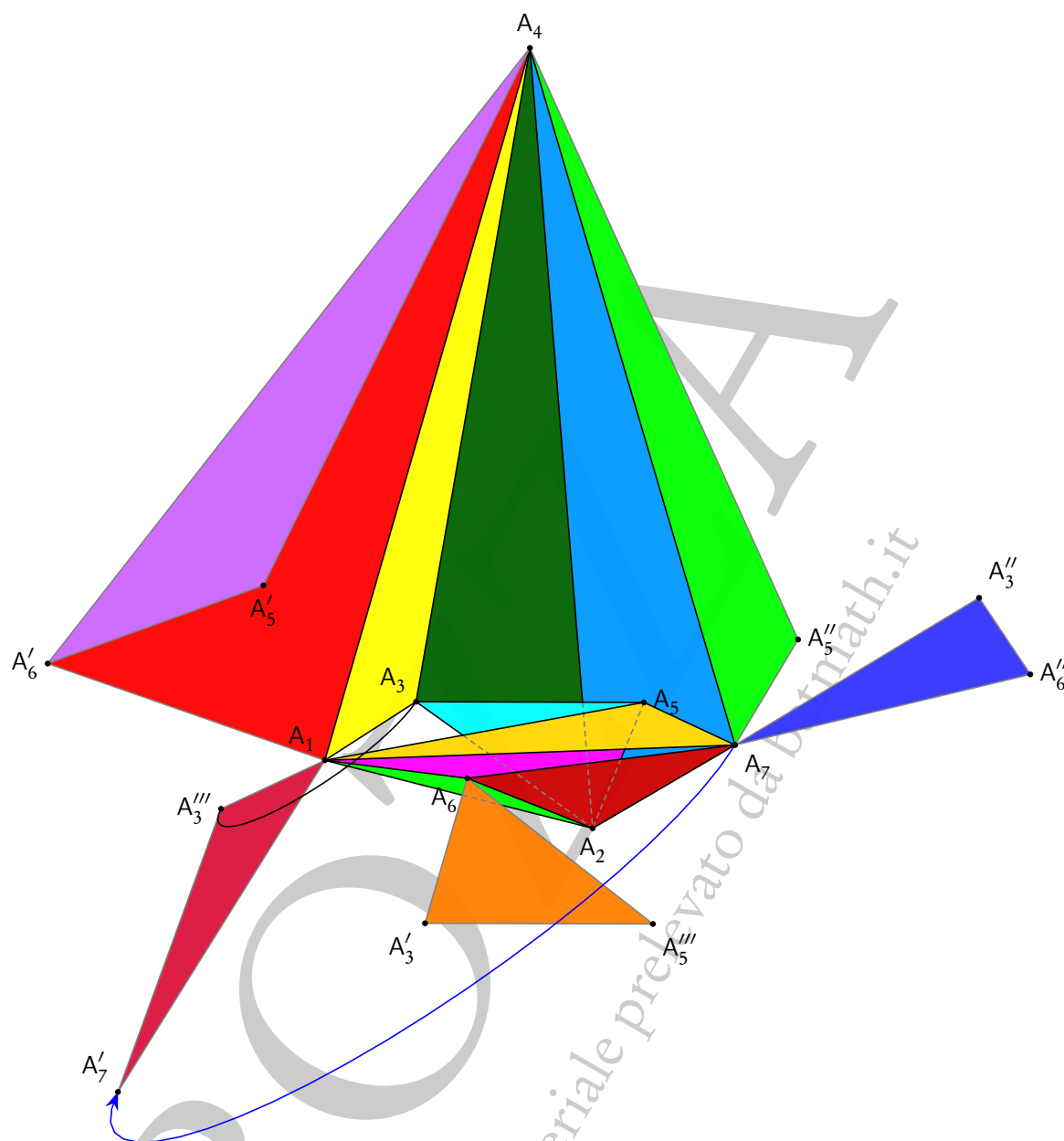


Figura A.38.: Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una sesta faccia

del poliedro abbia una struttura abbastanza semplice, mentre le difficoltà nascono nella parte inferiore. Questo sviluppo è sostanzialmente quello proposto nell'articolo [23] di Martin Gardner su Scientific American.

Entrambi i poliedri di Szilassi e Császár, come già detto, sono poliedri toroidali: se immaginiamo che le loro facce siano elastiche essi possono essere deformati in un toro (o ciambella). In particolare il poliedro di Szilassi in cui ciascuna delle sette facce confina con tutte le altre prova, assieme alla sua

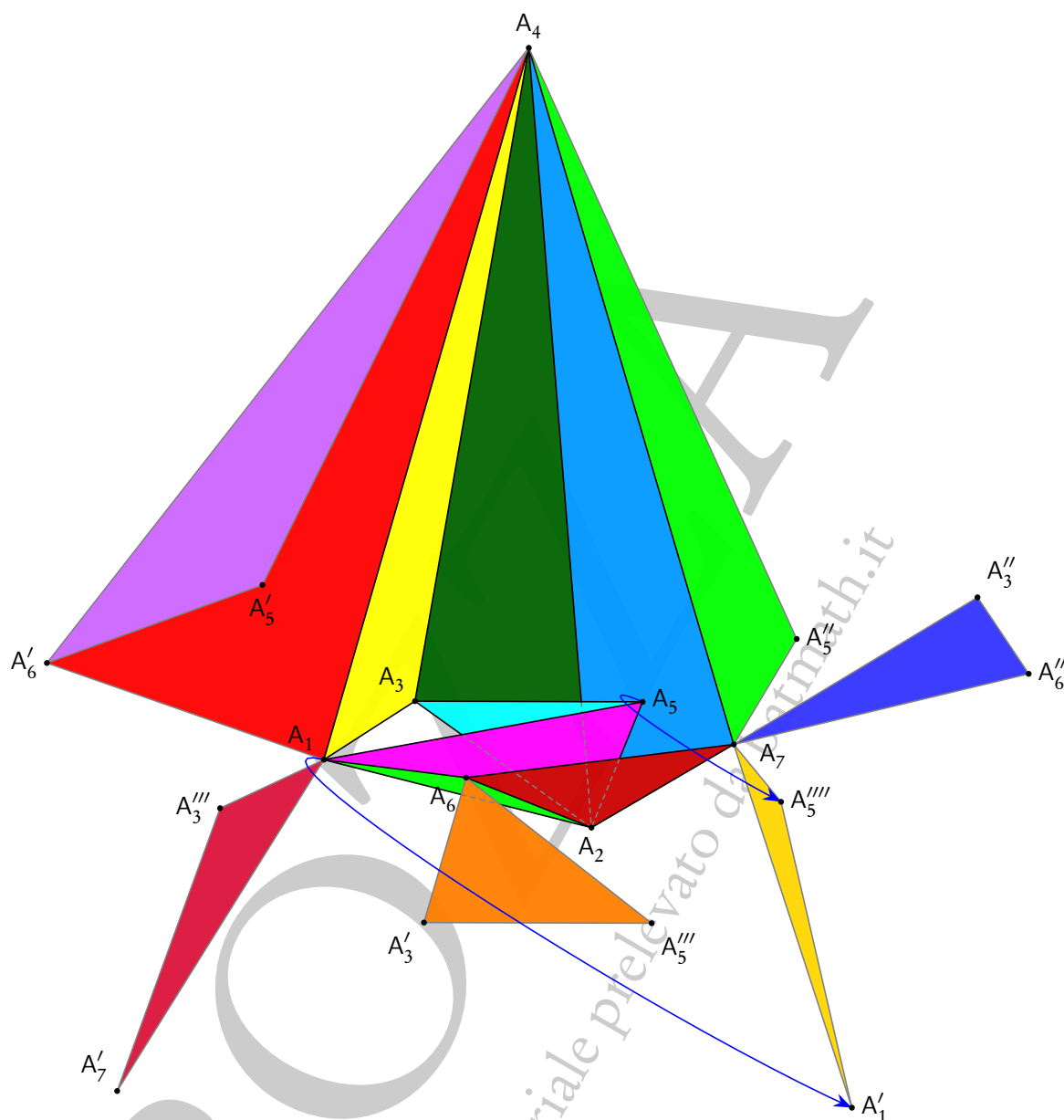


Figura A.39.: Il poliedro di Császár: ulteriore dettaglio della struttura interna dopo rotazione di una settima faccia

equivalenza al toro, che una “carta geografica” sul toro ha bisogno di sette colori per fare in modo che due regioni confinanti non abbiano lo stesso colore.

Sul piano, come è stato provato non senza difficoltà e con l’ausilio di potenti calcolatori, quattro colori sono sempre sufficienti per risolvere il problema di illustrare una qualunque carta geografica con regioni confinanti su una linea con colori diversi: si tratta del famoso *Teorema dei quattro colori*, che risolve una congettura proposta nel 1852 da Francis Guthrie e provata solo nel 1977 da parte di Kenneth

Appel e Wolfgang Haken. La storia di questo teorema è molto interessante: la prima “dimostrazione” di Alfred Kempe risale al 1879 e solo undici anni Percy Heawood dimostrò che era errata.

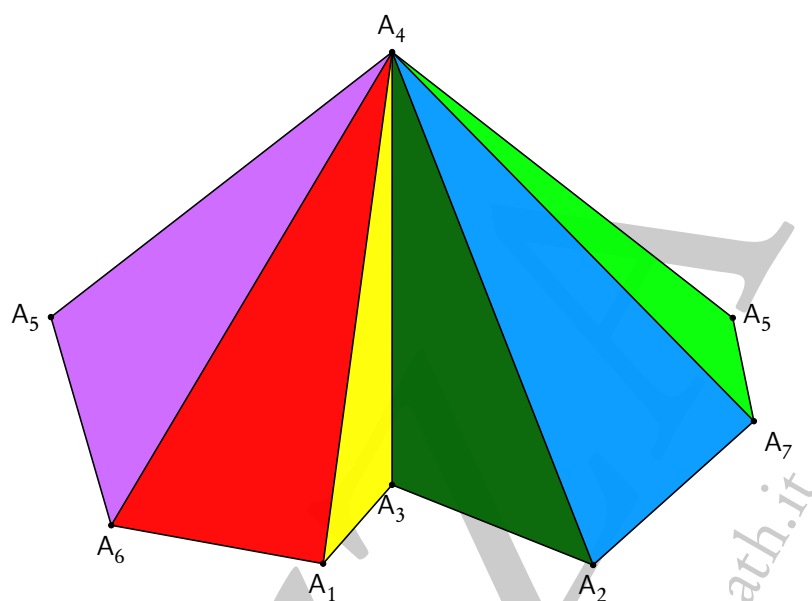


Figura A.40.: *Il poliedro di Császár: sviluppo della parte alta*

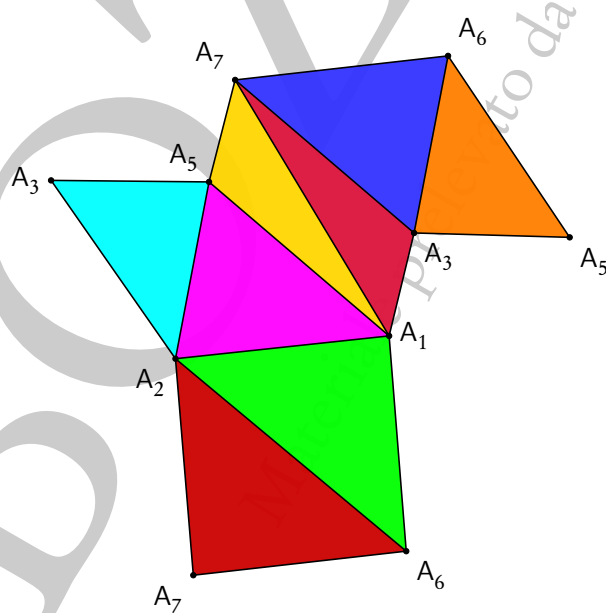


Figura A.41.: *Il poliedro di Császár: sviluppo della parte bassa*

Per concludere questa lunga digressione sui parenti del tetraedro proponiamo un'ultima immagine

che ha proprio lo scopo di controllare la struttura toroidale del poliedro di Császár, con la presenza di un buco, anche se appena visibile: si veda la figura A.42.

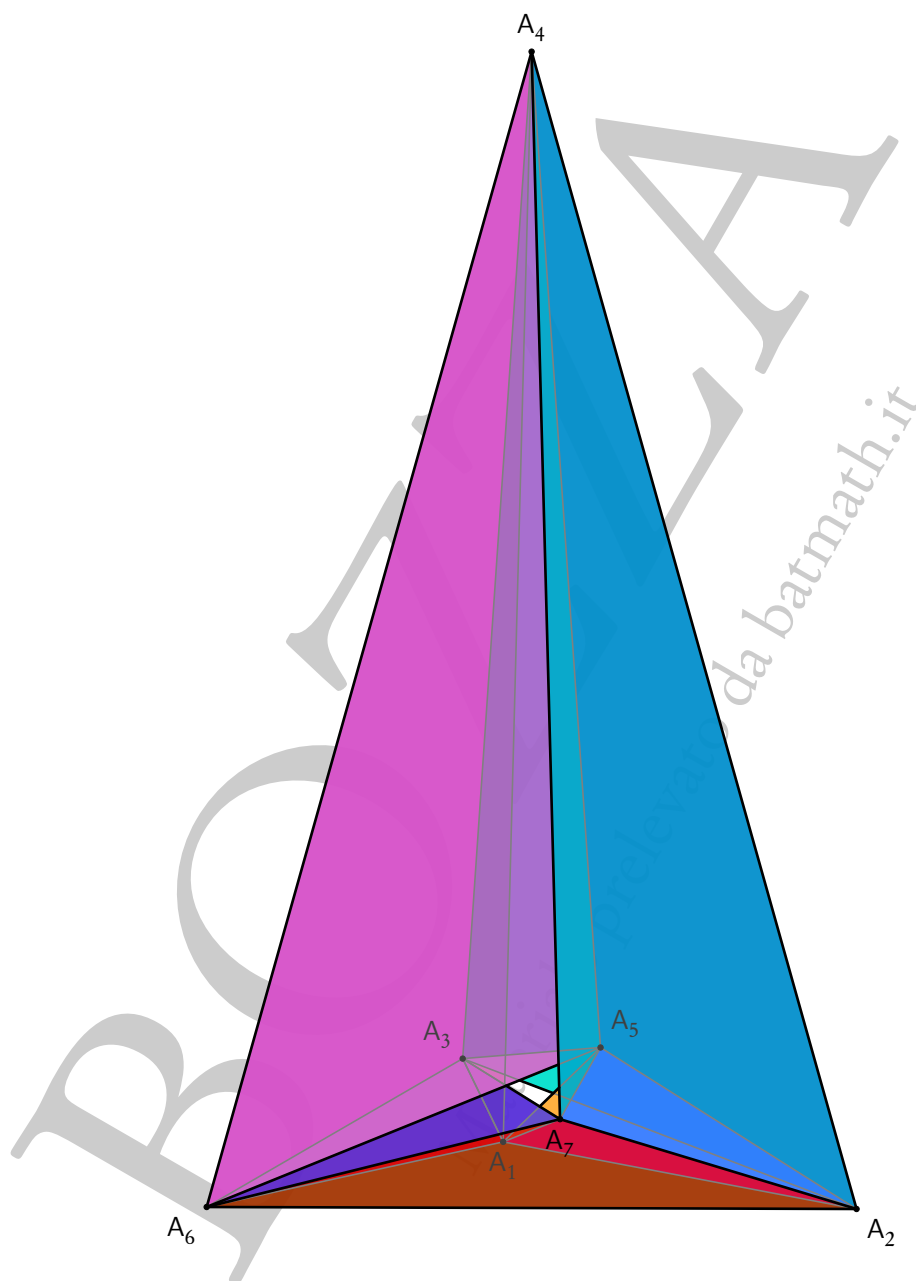


Figura A.42.: Il poliedro di Császár in un proiezione che lascia intravedere la struttura toroidale

A.8. Triangolazioni

I poligoni semplici, ovvero quelli il cui contorno è una linea spezzata non intrecciata, possono sempre essere suddivisi in triangoli in modo che valgano le seguenti due proprietà:

1. l'insieme dei vertici dei triangoli coincide con l'insieme dei vertici del poligono;
2. l'unione dei triangoli coincide con la regione poligonale delimitata dal poligono.

La triangolazione si può realizzare in genere in molti modi. Tra i più semplici ed intuitivi ne segnaliamo uno che si basa sulla seguente proprietà dei poligoni semplici: *ogni poligono semplice con più di tre lati ammette una diagonale interna tale che uno dei due sottopoligoni in cui esso è diviso da quella diagonale sia un triangolo*. Un sottopoligono triangolare generato in questo modo si chiama un *orecchio* del poligono dato.

La figura A.43 mostra un esagono, ABCDEF, e le sue nove diagonali⁽²⁾, alcune interne ed alcune esterne.

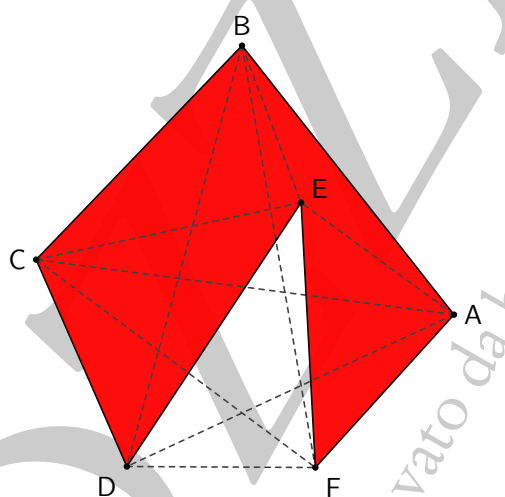


Figura A.43.: Un esagono e le sue nove diagonali

Tra le diagonali interne le $\overline{AE}$, $\overline{CE}$ e $\overline{BD}$ soddisfano la condizione richiesta, ovvero individuano un orecchio, mentre la $\overline{BE}$ non è adatta.

Si può procedere alla triangolazione nel seguente modo:

- esploro il contorno del poligono, per esempio in senso antiorario, a partire da un vertice;
- per ogni terna di vertici consecutivi V_1, V_2, V_3 , controllo se il segmento $\overline{V_1V_3}$ è una diagonale interna;
- in caso affermativo i tre vertici formano un orecchio: isolo questo orecchio e ripeto il processo con il poligono rimanente;
- in caso negativo proseguo la ricerca spostando la terna V_1, V_2, V_3 in avanti, fin quando non trovo una diagonale interna;
- il processo termina quando il poligono si è ristretto a un triangolo.

²Ricordiamo che le diagonali di un poligono di n lati sono in numero di $n(n-3)/2$.

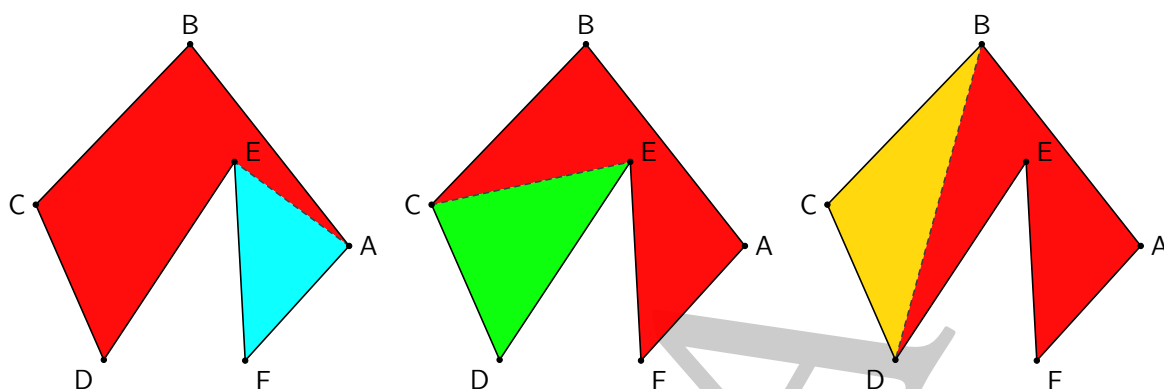


Figura A.44.: “Orecchi” individuabili nell’esagono della figura A.43

Nel caso dell’esagono della figura A.43, se parto dal vertice A, i tre vertici A, B e C non soddisfano alla condizione, in quanto la diagonale $\overline{AC}$ non è interna. Si passa alla terna B, C, D dove si verifica che la diagonale $\overline{BD}$ è adatta (come già segnalato). Si può ora isolare l’orecchio BCD e procedere sul pentagono ABDEF. Si ottiene la triangolazione della figura A.45, che naturalmente non è l’unica possibile.

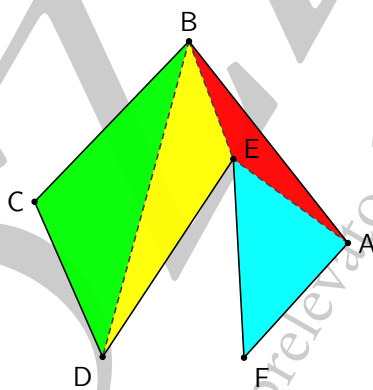


Figura A.45.: Triangolazione completa dell’esagono della figura A.43

Anche sul problema della triangolazione di un poligono Eulero ci ha messo lo zampino, dimostrando che per un poligono convesso di n lati esistono

$$\frac{n(n+1) \cdots (2n-4)}{(n-2)!}$$

diverse triangolazioni possibili. Per esempio per un pentagono si ha $n = 5$, $2n - 4 = 6$ e dunque il numero di triangolazioni è

$$\frac{5 \cdot 6}{3!} = 5.$$

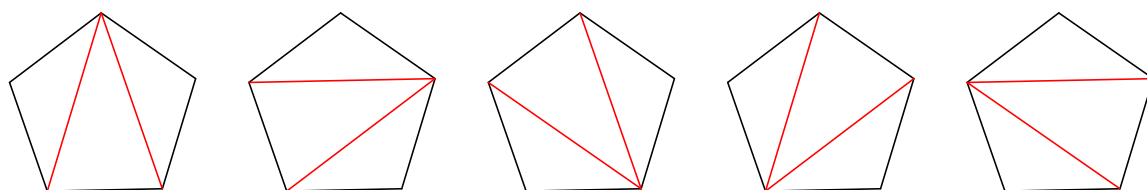


Figura A.46.: Le cinque triangolazioni di un pentagono

Le cinque triangolazioni sono mostrate nella figura A.46, con riferimento a un pentagono regolare. È evidente che per un pentagono regolare le cinque diverse triangolazioni sono ottenute mediante rotazione da un'unica triangolazione: esse potrebbero essere diverse per un pentagono non regolare.

La triangolazione di un poligono qualsiasi è molto importante per le applicazioni: per esempio il modo più semplice per calcolare l'area della superficie di un poligono è proprio quello di triangolarlo.

Passando da due a tre dimensioni si deve necessariamente sostituire il triangolo con il tetraedro, il più semplice dei poliedri. Ci si può allora chiedere se ogni poliedro è suddivisibile in tetraedri, esattamente come ogni poligono (semplice) è divisibile in triangoli. La risposta è positiva per i poliedri convessi, ma in generale è negativa.

Per i poliedri convessi la suddivisione in tetraedri (che si chiama ancora *triangolazione*, più raramente *tetraedrizazione*) si può realizzare in maniera molto semplice: basta triangolare ogni faccia (che è un poligono semplice, anzi convesso) e poi connettere ciascun triangolo (considerato come base del tetraedro) con uno stesso vertice. Questo processo nel caso del cubo è illustrato nella figura A.47, dove il cubo è scomposto in sei tetraedri.

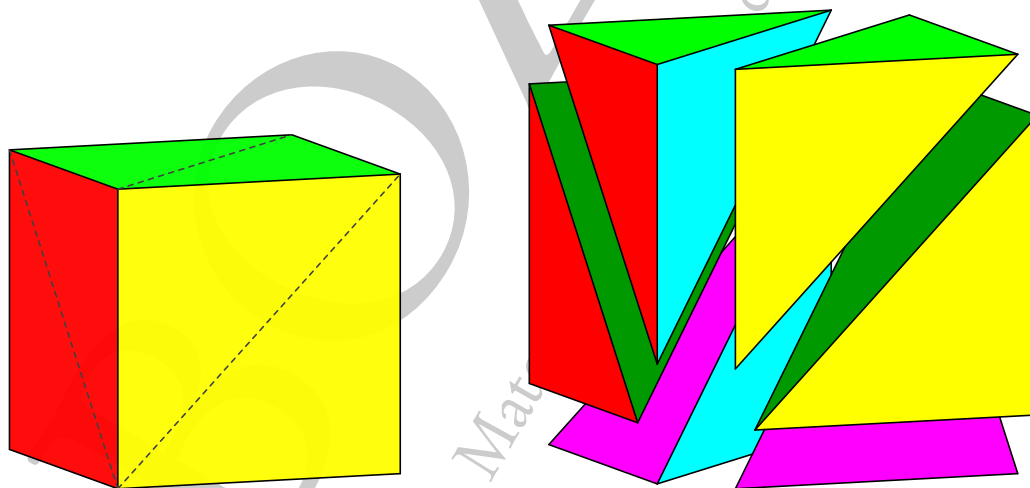


Figura A.47.: Cubo e una sua triangolazione elementare

Questa triangolazione oltre ovviamente a non essere l'unica possibile non è nemmeno in generale la più efficiente: la figura A.48, illustra una triangolazione più efficiente con solo cinque tetraedri di cui uno, quello centrale, addirittura regolare.

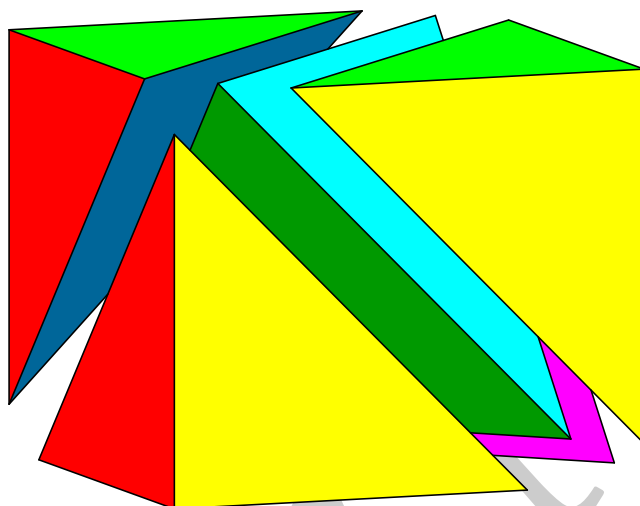


Figura A.48.: Una triangolazione efficiente del cubo della figura A.47

I poliedri non convessi non sono invece sempre triangolabili⁽³⁾: il primo esempio è stato costruito da Erich Schönhardt nel 1928 ed è il più elementare poliedro con questa caratteristica. La sua costruzione è molto semplice, ed è illustrata nella figura A.49. Costruito il prisma a base triangolare $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$, si triangolarizzano le sue facce laterali con le diagonali A_1B_2 , B_1C_2 e C_1A_2 . È sufficiente a questo punto sottoporre la faccia triangolare superiore a una piccola rotazione, in senso antiorario: il poliedro che si ottiene non è triangolabile, anzi nessuno dei tetraedri costruiti con quattro dei vertici del poliedro è interno allo stesso.

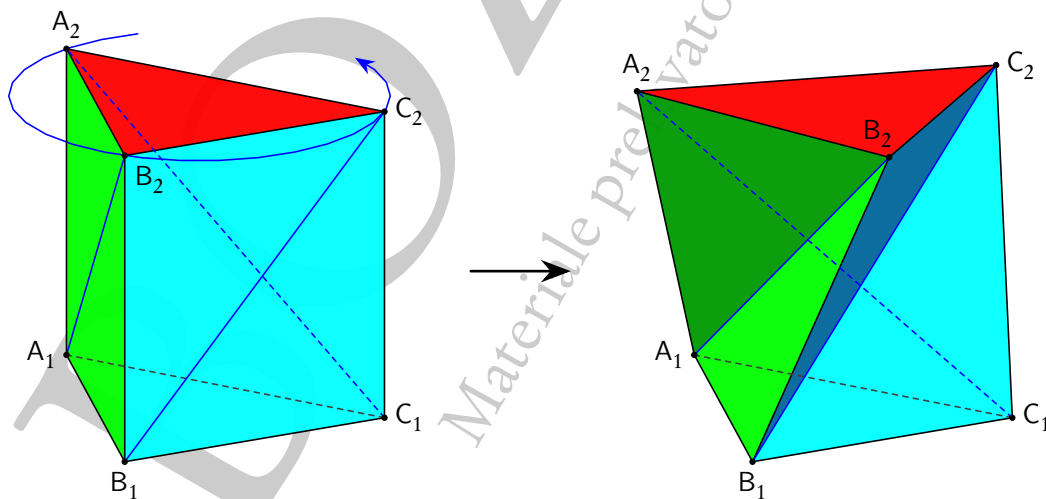


Figura A.49.: Costruzione del poliedro non triangolabile di Schönhardt

³Attenzione: come per i poligoni, anche per i poliedri una triangolazione è accettabile solo se non introduce nuovi vertici oltre a quelli del poliedro dato.

È abbastanza interessante il fatto che anche poliedri decisamente complessi possono essere triangolati: un esempio è dato dal poliedro di Császár, che è addirittura un poliedro toroidale. La triangolazione che proponiamo nella figura A.50 è sostanzialmente riprodotta da *The Császár Polyhedron Subdivided into Tetrahedra* di Lajos Szilassi, reperibile su <http://demonstrations.wolfram.com/TheCsaszarPolyhedronSubdividedIntoTetrahedra/>.

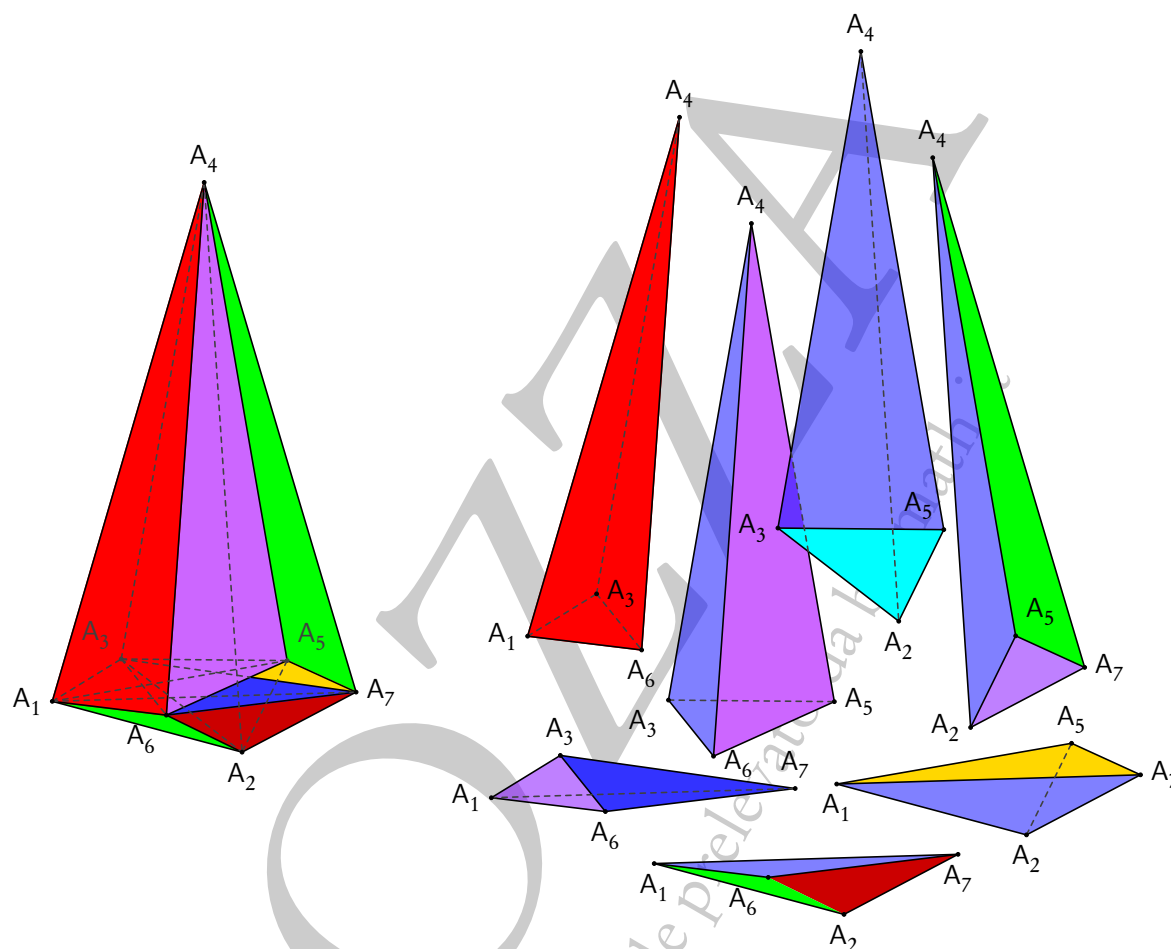


Figura A.50.: Triangolazione del poliedro di Császár

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

B. Anelli di Borromeo

Anche se non fa strettamente parte dell'argomento di questo fascicolo, proponiamo qui di seguito alcune considerazioni e, soprattutto, immagini relative agli *Anelli di Borromeo*, in quanto collegati ai tre rettangoli aurei che possono essere utilizzati per costruire un icosaedro regolare. Si tratta di tre anelli intrecciati in modo che non si possano separare l'uno dall'altro senza romperli, ma che, una volta rotto uno qualsiasi dei tre, gli altri due si possano separare senza ulteriori rotture.

Questa configurazione di tre anelli appare innumerevoli volte nella storia dell'iconografia e dell'arte (in particolare era uno dei simboli della famiglia Borromeo di Milano, onde il nome "anelli di Borromeo") e riveste un ruolo fondamentale in una branca della matematica moderna, la geometria iperbolica.

La più classica rappresentazione di questi anelli può far pensare che essi siano perfettamente circolari, come mostra la figura [B.1](#).

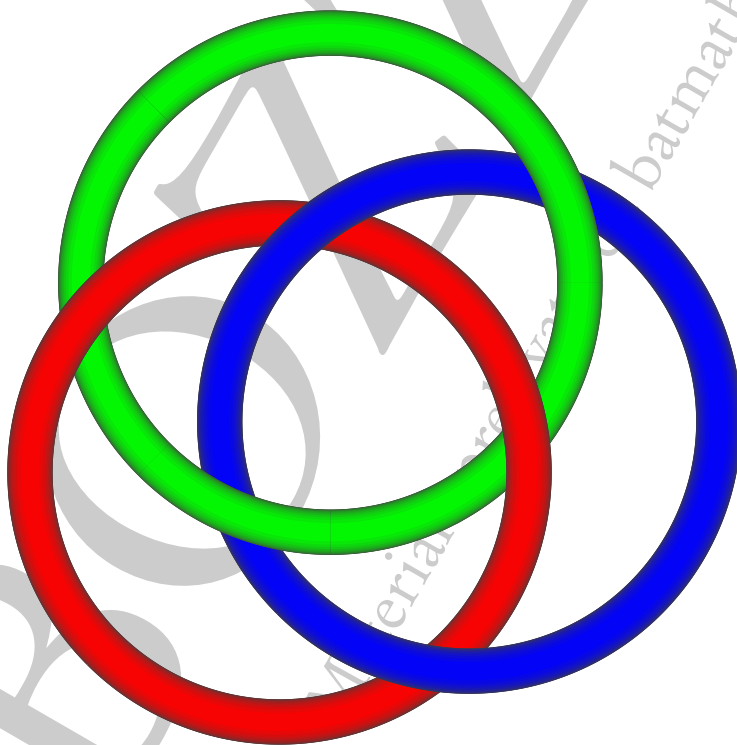


Figura B.1.: *Gli anelli di Borromeo in una proiezione che li fa sembrare circolari*

In realtà la costruzione non è possibile con tre cerchi perfetti e la figura [B.2](#) illustra questo fatto, mostrando la stessa costruzione della figura [B.1](#), ma utilizzando una diversa proiezione che rende evidente che in realtà i tre anelli non sono cerchi.

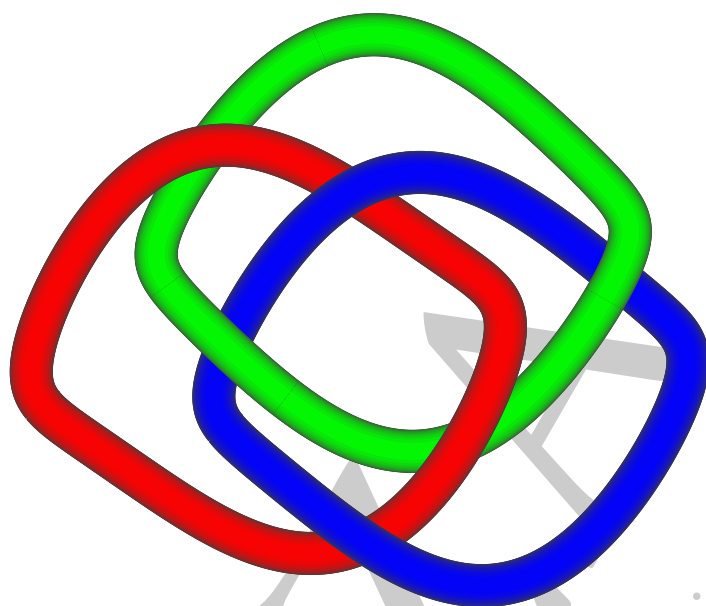


Figura B.2.: *Gli anelli di Borromeo in una proiezione che evidenzia il fatto che non si tratta di anelli circolari*

Tuttavia invece è possibile realizzare la costruzione con tre ellissi, anche se di eccentricità molto piccola, purché non nulla. La figura [B.3](#) illustra questa costruzione, con le tre ellissi in tre piani perpendicolari, per maggiore evidenza.

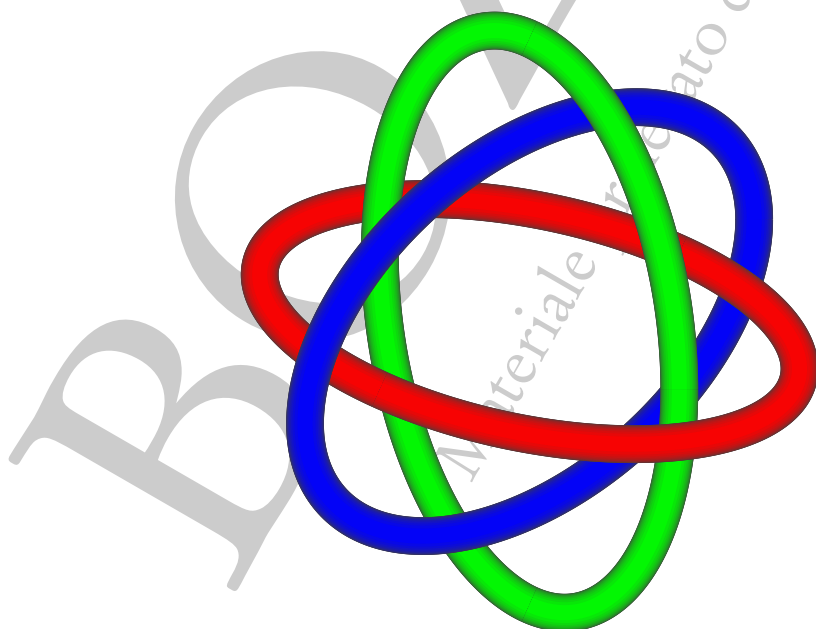


Figura B.3.: *Gli anelli di Borromeo realizzati con tre ellissi identiche*

Una figura basata sugli anelli di Borromeo è stata adottata come logo dell'International Mathematical Union, a partire dal 2006. Il logo è stato disegnato dal prof. John Sullivan del Dipartimento di Matematica dell'Università dell'Illinois. La struttura base di questo logo è riprodotta nella figura B.4. Anche in questo caso, come con le ellissi, le tre curve base sono piane.

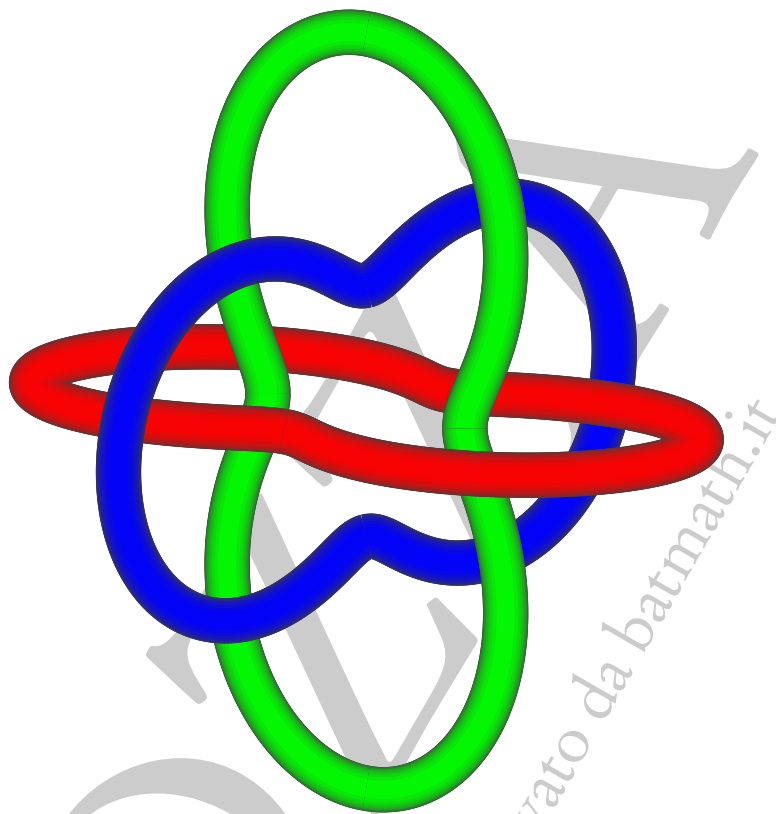


Figura B.4.: *Il logo dell'IMU, basato sugli anelli di Borromeo*

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

Bibliografia

- [1] Fabio Acerbi. *EUCLIDE Tutte le opere*. Milano: Bompiani, 2007 (cit. a p. 67).
- [2] Eric Aiton, Judith V. Field e A.M. Duncan. *The Harmony of the World by Johannes Kepler*. Philadelphia: American Philosophical Society, 1997.
- [3] Tomaso Aste e Weaire Denis. *The Pursuit of perfect Packing*. New York: Taylor & Francis Group, 2008.
- [4] Daniel Barbaro. *La pratica della Perspectiva*. Venezia: Camillo e Rutilio Borgominieri, 1669.
- [5] Marcel Berger. *Géométrie vivante ou L'échelle de Jacob*. Paris: Cassini, 2009.
- [6] Max Bruckner. *Vielecke und Vielflache*. Leipzig: Teubner, 1900.
- [7] Richard Buckminster Fuller. *Synergetics - Explorations in the Geometry of Thinking*. London: Macmillan Publishing, 1975.
- [8] Francis Buekenhout e Monique Parker. «The number of nets of the regular polytopes in dimension ≤ 4 ». In: *Discrete Mathematics* 186 (1998).
- [9] Federico Commandino. *Pappi Alexandrini Mathematicae Collectiones*. Bologna: Ex Typographia HH. de Duccijs, 1660.
- [10] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Introduction to Geometry - Second Edition*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1989.
- [11] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Regular Polytopes*. London: Methuen & Co. Ltd., 1948.
- [12] Harold Scott MacDonald Coxeter e Rouse Ball. *Mathematical Recreations and Essays*. New York: The Macmillan Company, 1947.
- [13] Harold Scott MacDonald Coxeter e Patrick Du Val. *The Fifty-Nine Icosahedra*. New York: Springer, 1982.
- [14] Harold Scott MacDonald Coxeter e Samuel Greitzer. *Geometry Revisited*. New York: The Mathematical Association of America, 1967.
- [15] Keith Critchlow. *Order in space, a design source book*. New York: Thames e Hudson Inc., 1987.
- [16] Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer e Richard K. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. New York: Springer, 1991.
- [17] Peter R. Cromwell. *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [18] Henry Martin Cundy e A.P. Rollett. *Mathematical Models*. Oxford: Oxford University Press, 1961.
- [19] Maria Dedó. *Forme, simmetria e topologia*. Bologna: Zanichelli, 1999 (cit. a p. 11).
- [20] Albrecht Dürer. *Underweisung der Messung*. Nuremberg: Hieronymus Formschnyder, 1538.

- [21] Robert Ferréol. *Encyclopédie des formes remarquables, Courbes, Surfaces, Fractals, Polyèdres*. 2017. URL: <http://www.mathcurve.com>.
- [22] Judith V. Field. «Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler». In: *Archive for History of Exact Sciences* 50 (1997).
- [23] Martin Gardner. «On the remarkable Császár polyhedron and its applications in problem solving». In: *Scientific American* 232.5 (1975) (cit. a p. 131).
- [24] Francesco Giovannetti. *Le tassellazioni dello spazio*. Capitolo 8 del laboratorio didattico-scientifico *Poliedri in pezzi*. 2012. URL: http://www.labfrancoconti.it/public/lab_conti/LAB/DOCUMENTAZIONE/08-Letassellazionidellospazio.pdf.
- [25] Michael Goldberg. «A class of Multi-Symmetric Polyhedra». In: *Tohoku Mathematical Journal* 42 (1937).
- [26] Michael Goldberg. «Unstable Polyhedral Structures». In: *Mathematics Magazine* 51 (1978).
- [27] Branko Grünbaum. *Convex Polytopes*. New York: Springer, 2003.
- [28] Wenzel Jamnitzer. *Perspectiva Corporum Regularium*. Nuremberg: Jost Amman, 1568.
- [29] Normann Johnson. «Convex Solids with Regular Faces». In: *Canadian Journal of Mathematics* 18 (1966).
- [30] Jay Kappraf. *Connections - The Geometric Bridge Between Art and Science*. Singapore: World Scientific, 2001.
- [31] Miyuki Kawamura. *Polyhedron Origami for Beginners*. Tokyo: Nihon Vogue Company, 2001.
- [32] Giovanni Keplero. *Harmonices Mundi*. Linz, Austria: Johannes Planck, 1619.
- [33] Lazar Aronovich Lyusternik. *Convex Figures and Polyhedra*. Boston: D.C.Heath e Company, 1966.
- [34] John Montroll. *A Constellation of Origami Polyhedra*. New York: Dover Publications, 2004.
- [35] John Montroll. *A Pletora of Polyhedra in Origami*. New York: Dover Publications, 2002.
- [36] Edith Mooers. *Tammes's Problem*. 1994. URL: <http://www.uvm.edu/pdodds/files/papers/others/1994/mooers1994a.pdf>.
- [37] Luca Pacioli. *Divina proportione*. Venezia: Paganio Paganino, 1509.
- [38] Clifford Alan Pickover. *The Math Book*. New York: Sterling Publishing, 2009.
- [39] Edward S. Popko. *Divided Shperes*. New York: CRC Press - Taylor & Francis Group, 2012.
- [40] Anthony Pugh. *Polyhedra, a visual approach*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1976.
- [41] David S. Richeson. *Euler's Gem - The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 2008 (cit. a p. 124).
- [42] Jean Francois Rotgé. «Rotating Polyhedra with Congruent Plane Pentagonal Faces». In: *Structural Topology* 9 (1984).
- [43] Marjorie Senechal. *Shaping Space*. New York: Springer, 2013 (cit. a p. 109).

- [44] Walter Steurer e Sofia Deloudi. *Crystallography of Quasicrystals - Concepts, Methods and Structures*. Berlin: Springer, 2009.
- [45] Alicia Boole Stott. «Geometrical deduction of semiregular from regular polytopes and space fillings». In: *Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen* XL.1 (1910).
- [46] Geneviève Tulloue. *Figures animées pour la Physique*. 2017. URL: http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/.
- [47] Eric W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. Boca Raton, Florida: Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [48] David Wells. *The Penguin Dictionary of curious and interesting Geometry*. London: Penguin Books, 1991.
- [49] Magnus Joseph Wenninger. *Dual Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1983.
- [50] Magnus Joseph Wenninger. *Polyhedron Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1971.
- [51] Magnus Joseph Wenninger. *Spherical Models*. Cambridge: Cambridge University Press, 1979.
- [52] Robert Williams. *The Geometrical Foundation of Natural Structure - A Source Book of Design*. New York: Dover Publications, 1972.

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

Indice analitico

- anelli di Borromeo, 76
antirpsimi, 80
autodualità, 53

criteri di congruenza dei triangoli, 84
cubo impossibile, 42

definizione elementare di poliedro, 7
densità di un poligono stellato, 107
divisione di un segmento in rapporto estremo e medio, 70

esagramma, 107

facce di un poliedro, 11
facce laterali di un prisma, 80
figura al vertice, 12
figure impossibili, 42
formula di Eulero generalizzata, 123
formula di Eulero per i poliedri, 12
fuso sferico, 85

genere di un poliedro, 121

intersfera, 16
ipercubo, 117

lato di un poligono, 11
linea spezzata, 10
linee geodetiche, 83

Merkaba, 43

orecchio di un poligono, 135

pentagramma, 107
poliedri composti regolari, 63
poliedri elevati di Pacioli, 35
poliedri regolari piramidati, 43
poliedri sferici regolari, 98
poliedri solidi di Leonardo, 35
poliedri troncati di Pacioli, 35
poliedri vuoti di Leonardo, 35
poliedro, 11
poliedro convesso, 12
poliedro di Császár, 126
poliedro di Szilassi, 126
poliedro duale, 53
poliedro regolare, 13
poliedro semplicemente connesso, 12
poligonale, 11
poligono, 11
poligono regolare convesso, 105
poligono regolare stellato, 105
poligono sferico, 98
poligono stellato generalizzato, 106
prismi, 80

rettangolo aureo, 75
rette di una sfera, 83

sezione aurea, 69
sfera circoscritta, 16
sfera inscritta, 16
sistema solare di Keplero, 119
spezzata aperta, 11
spezzata chiusa, 10
spezzata intrecciata, 10
spicchio sferico, 88
spigoli di un poliedro, 11
Stella di Lakshmi, 107
Stella octangula, 43
stellazione di un poligono, 107

stellazioni, [43](#)

superficie poliedrale, [11](#)

tassellazione regolare dello spazio, [99](#)

Teorema dei quattro colori, [132](#)

tesseratto, [117](#)

tetraedrizazione, [137](#)

triangolazione, [137](#)

uguaglianza di triangoli sferici, [84](#)

valenza di un vertice, [12](#)

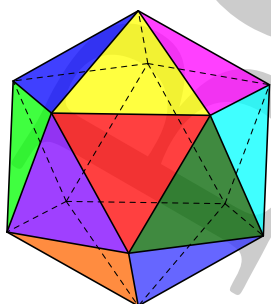
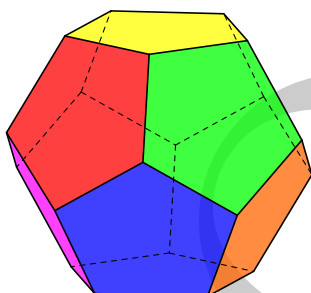
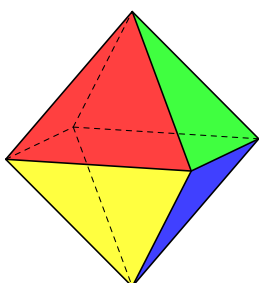
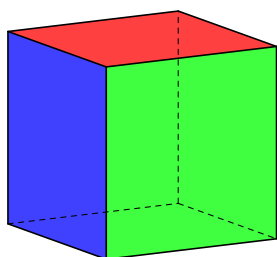
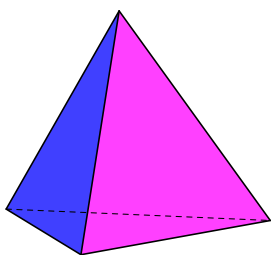
vertici di un poligono, [11](#)

BOZZA
Materiale prelevato da batmath.it

BOZZA

Materiale prelevato da batmath.it

In ultima di copertina: *I cinque solidi platonici.*



Fantastici Poliedri

1 - Solidi Platonici

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.1 del 8 novembre 2018

Questo fascicolo fa parte di una serie dedicata ai poliedri. Non si tratta di una pubblicazione teorica, quanto piuttosto di una raccolta di immagini e di indicazioni grafiche sulle tecniche costruttive. Tutte le immagini sono realizzate esclusivamente con $\text{\LaTeX}$ e il pacchetto grafico Tikz.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematrica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.