Introduzione ai numeri aleatori

Luciano Battaia

18 gennaio 2018

Quasi tutti questi esempi sono descritti in dettaglio nel volume *Introduzione alla probabilità*, e qui se ne richiamano solo i concetti essenziali ai fini di schematizzare l'introduzione del concetto di numero aleatorio.

Esempio 1. *Consideriamo l'esperimento del lancio di due dadi non truccati e i possibili esiti dell'esperimento che sappiamo essere* 36*. Consideriamo poi il seguente insieme di* 11 *eventi (che costituiscono una partizione dell'evento certo* Ω*, ance se questa non sarà una caratteristica indispensabile relativa al concetto che vogliamo introdurre):*

$$E_2 = \{\,(1,1)\,\}, \quad E_3 = \{\,(1,2),(2,1)\,\}, \quad E_4 = \{\,(3,1),(2,2),(1,3)\,\}, \dots, E_{12} = \{\,(6,6)\,\}.$$

In generale un evento è costituito da tutti i possibili esiti che danno come somma delle facce i numeri 2, 2, …, 12*. Associamo a ciascuno di questi eventi il numero ottenuto come somma delle due facce (è per questo che li abbiamo chiamati* $E_2, \dots, E_{12}$*, avremmo anche potuto chiamarli A, B, …, M). Attenzione: in questo esempio e nel successivo associamo a ogni evento di un insieme un numero, in un certo senso "deducibile" dall'evento stesso; questo però non è un fatto essenziale: quello che conta è che abbiamo una serie di eventi legati ad un esperimento e che associamo ad ognuno di essi un numero, in qualche modo. Nel terzo esempio questa associazione è fatta in un modo completamente diverso.*

Esempio 2. *Nello stesso esperimento precedente consideriamo il seguente sottoinsieme di* 18 *eventi.*

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\,(1,1)\,\} \\ E_2 &= \{\,(1,2),(2,1)\,\} \\ &\vdots \\ E_{10} &= \{\,(2,6),(3,4),(4,3),(6,2)\,\} \\ &\vdots \\ E_{18} &= \{\,(6,6)\,\} \end{aligned}$$

dove gli eventi sono costruiti raggruppando gli esiti in cui il prodotto dei numeri delle facce è uguale. Associamo ad ogni evento il numero ottenuto facendo il prodotto delle due facce. Anche qui abbiamo una serie di eventi (che costituiscono ancora un partizione, anche se, lo ripetiamo, questo non sarà un fatto essenziale) e una regola per associare ad ogni evento un numero.

Esempio 3. *Lancio di una moneta non truccata per due volte. Consideriamo i seguenti tre eventi:*

$$E_1 = \{ (C,C) \}, \quad E_2 = \{ (C,T),(T,C) \}, \quad E_3 = \{ (T,T) \},$$

con ovvio significato dei simboli. Associamo a questi eventi i seguenti numeri

$$\begin{aligned} E_1 &\to \quad 0 \\ E_2 &\to 100 \\ E_3 &\to 200. \end{aligned}$$

Questa volta l'associazione tra gli eventi e i numeri non ha nulla a che fare con gli esiti che costituiscono l'evento: come già detto quello che conta è il fatto che ad ogni evento di un insieme risulta associato un numero.

Nei tre esempi precedenti abbiamo la seguente situazione

1. Un esperimento "casuale".
2. Un insieme di eventi legati a quell'esperimento (che, per ora, costituiscono una partizione dell'evento certo).
3. Una regola per associare ad ogni evento un numero.

La "regola" con cui associamo ad ogni evento un numero è una *funzione* in cui il dominio è l'insieme di eventi considerati e il codominio è l'insieme dei numeri reali (in questi esempi i numeri erano sempre interi positivi, ma in generale possono essere numeri reali qualunque). Questa funzione si usa indicare con lettere come X, Y, dots, anziché con f, g, $\dots$ come di solito. Per esempio in riferimento al terzo esempio possiamo dire che per il dominio si ha $D = \{ E_1, E_2, E_3 \}$, e che la funzione risulta così definita:

$$X(E_1) = 0, \quad X(E_2) = 100, \quad X(E_3) = 200.$$

Questa funzione ha un nome che, a prima vista, può sorprendere, in quanto si chiama *Numero casuale*, in questo caso *semplice*, perchè i suoi valori sono in numero finito (3 nell'esempio appena considerato). In realtà il nome è giustificato dal fatto che della funzione interessano nelle applicazioni soprattutto i valori, cioè l'insieme immagine, in questo caso i numeri 0, 100, 200. Addirittura, con un certo abuso di linguaggio, possiamo scrivere

$$X =, \{ 0, 100, 200 \},$$

anche se la scrittura corretta sarebbe

$$\mathrm{Im}(X) = \{ 0, 100, 200 \}.$$

Poiché ogni evento ha una probabilità e ad ogni evento risulta associato un ben determinato numero, possiamo parlare di *probabilità del numero*, anzichè di probabilità dell'evento e possiamo costruire una nuova funzione che ad ogni numero faccia corrispondere la sua probabilità: questa funzione si chiama *distribuzione di probabilità* e i dettagli si possono vedere nel testo già citato.

Ci chiediamo ora: è possibile esprimere questo tipo di funzioni con una "regola matematica", come si fa con le "normali" funzioni in uso in matematica? La risposta è affermativa, anche se se le regole di calcolo per questo tipo di funzioni non si limitano solo a somme, prodotti, quozienti, o simili.

Cominciando dal caso di un insieme di eventi che costituiscono una partizione, come nei casi precedenti, indichiamo con $|E_i|$ l'indicatore dell'evento i-esimo, ricordando che uno e uno solo degli $|E_i|$ vale 1, mentre tutti gli altri valgono 0. Sempre con riferimento al terzo esperimento considerato possiamo osservare che si può scrivere

$$X = 0 \cdot |E_1| + 100 \cdot |E_2| + 200 \cdot |E_3|.$$

Questa scrittura, che vale quando gli eventi sono una partizione dell'evento certo, si chiama *scrittura canonica* del numero casuale. Da qui si vede subito che i valori del numero sono proprio 0, 100, 200 e si capisce subito che 0 è associato all'evento E_1 , 100 all'evento E_2, 200 all'evento E_3.

Consideriamo ora un esperimento e alcuni eventi ad esso legati, per esempio A, B, C, senza che necessariamente essi costituiscano una partizione dell'evento certo e tre numeri x_1, x_2, x_3 associati a ciascun evento, nell'ordine. Consideriamo poi la seguente formula:

$$X = x_1 \cdot |A| + x_2 \cdot |B| + x_3 \cdot |C|.$$

Possiamo chiederci se si tratta di un *numero casuale* con le stesse caratteristiche di prima. Il problema è che, questa volta non è affatto detto che uno ed uno solo degli indicatori sia 1: potrebbero essere tutti 0, o potrebbe succedere che anche più di uno sia 1.

Se facciamo riferimento all'esperimento della lotteria con tre premi, di cui abbiamo acquistato due biglietti, e consideriamo i tre eventi A "vincita del primo premio", B "vincita del secondo premio", e C "vincita del terzo premio", possiamo considerare la formula:

$$X = 10000|A| + 1000|B| + 100|C|.$$

Questa formula traduce in linguaggio matematico la seguente situazione: il primo premio vale 10000, il secondo premio vale 1000, il terzo premio vale 100. Ebbene, avendo acquistato due biglietti, i valori possibili sono

$$\mathrm{Im}(X) = \{\, 10000, 1000, 100, 11000, 10100, 1100, 0 \,\},$$

che corrispondono a somme di qualcuno dei numeri che appaiono nella formula precedente, con in più il numero 0. Come mostrato nel testo, a partire dai tre eventi considerati si può costruire una partizione dell'evento certo e riscrivere la formula precedente nel seguente modo:

$$X = 10000|I_1| + 1000|I_2| + 100|I_3| + 11000|I_4| + 10100|I_5| + 1100|I_6| + 0|I_7|.$$

In questo modo tutto torna e i valori del numero e gli eventi a cui corrispondono possono essere facilmente letti dalla formula.

In ogni caso possiamo riassumere quanto detto con la definizione seguente, che riportiamo per comodità:

Definizione 1 (Numero aleatorio semplice)**.** *Dati n eventi E_1, E_2, ..., E_n, e n numeri reali x_1, x_2, ..., x_n si chiama* numero aleatorio semplice *il numero X così definito*

$$X = x_1|E_1| + x_2|E_2| + \cdots + x_n|E_n|. \tag{1}$$

Se gli eventi E_i costituiscono una partizione dell'evento certo Ω, il numero definito dalla (1) *si dice* in forma canonica*.*

Nel caso generale i valori possibili per X sono le somme di alcuni (anche tutti) i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$, incluso il numero 0, se nessuno degli eventi si verifica. Nel caso di numero espresso in forma canonica i valori possibili per X sono solo gli n numeri x_1, x_2, ..., x_n e il numero aleatorio si può pensare come una funzione definita sull'insieme degli eventi E_i e a valori in $\mathbb{R}$.

In termini intuitivi possiamo dire che un numero aleatorio è un numero di cui si conoscono i possibili valori, ma non quale valore esso assumerà esattamente, in quanto questo valore è legato al risultato di un esperimento casuale. potremo in generale parlare solo di *probabilità di ciascun numero*, che è, lo ripetiamo, la probabilità dell'evento a cui quel numero è collegato.