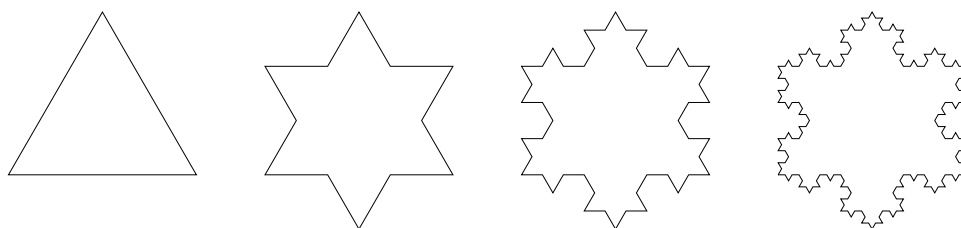


LUCIANO BATTIA

---

## MATEMATICA PER IL DESIGN 1

*Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design 1  
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone*



# Matematica per il Design 1

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design 1  
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 21 novembre 2019

In copertina: La generazione del *focco di neve di Koch*, uno dei primi frattali descritti.

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>.

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** Devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale.

**Non commerciale** Non puoi usare il materiale per scopi commerciali.

**Non opere derivate** Se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, non puoi distribuire il materiale così modificato.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore usi di quest'opera in deroga da questa licenza.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

*Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904*

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

*Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013*



# Indice

Elenco delle figure vii

Premessa ix

- 1 Logica. Insiemi 1
  - 1.1 Logica proposizionale 1
    - 1.1.1 Connettivi logici 2
  - 1.2 Logica dei predicati 3
    - 1.2.1 Quantificatori 3
  - 1.3 Il simbolo di sommatoria 4
  - 1.4 Insiemi 6
  - 1.5 Operazioni tra insiemi 8
  - 1.6 Diagrammi di Eulero-Venn 9
  - 1.7 Partizioni di un insieme 11
  - 1.8 Funzioni 15
  - 1.9 Cardinalità 16
  - 1.10 Numeri 17
  - 1.11 Intervalli di numeri reali 19
  - 1.12 Esercizi 20
- 2 Cenni di calcolo combinatorio 23
  - 2.1 Introduzione 23
  - 2.2 Disposizioni 24
  - 2.3 Permutazioni 25
    - 2.3.1 Permutazioni fra elementi distinti 25
    - 2.3.2 Permutazioni fra elementi non tutti distinti 26
  - 2.4 Combinazioni 26
  - 2.5 Esercizi 28
- 3 Introduzione alla probabilità 33
  - 3.1 Incertezza e sua valutazione 33
  - 3.2 Approccio classico e frequentista 34
  - 3.3 Approccio soggettivo 38
  - 3.4 Eventi e probabilità 39
  - 3.5 Valutazione della coerenza nelle assegnazioni di probabilità 40

3.6	Due esempi apparentemente paradossali	41
3.6.1	Il problema del compleanno	42
3.6.2	Il paradosso del secondo figlio	43
3.7	Cenno all'inferenza probabilistica	43
A	Come è stata progettata questa dispensa	49
	Notazioni utilizzate	55
	Alfabeto greco	59
	Bibliografia	61

## Elenco delle figure

- 1.1 Un insieme con alcuni elementi che gli appartengono ed altri che non gli appartengono 10
- 1.2 Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro unione 10
- 1.3 Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro intersezione 10
- 1.4 Due insiemi  $A$  e  $B$  e la differenza  $A \setminus B$  10
- 1.5 Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro differenza simmetrica 11
- 1.6 Complementare di un insieme rispetto all'universo  $U$  11
- 1.7 Un insieme universo  $\Omega$  e tre suoi sottoinsiemi:  $A, B, C$  12
- 1.8  $A \cap B \cap C = I_1$  e  $A \cap B \cap C^c = I_2$ , con riferimento alla figura 1.7 13
- 1.9  $A^c \cap B \cap C = I_3$  e  $A \cap B^c \cap C = I_4$ , con riferimento alla figura 1.7 13
- 1.10  $A \cap B^c \cap C^c = I_5$  e  $A^c \cap B \cap C^c = I_6$ , con riferimento alla figura 1.7 13
- 1.11  $A^c \cap B^c \cap C = I_7$  e  $A^c \cap B^c \cap C^c = I_8$ , con riferimento alla figura 1.7 14
- 1.12 Costituenti in caso di tre sottoinsiemi disgiunti 14
- 1.13 Diagramma “a frecce” per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti) 15
- 1.14 Insiemi di cardinalità 2 16
  
- 2.1 Disposizioni di “ $n$ ” oggetti distinti in “ $k$ ” caselle numerate 24
  
- 3.1 Somma degli angoli interni in un triangolo equilatero 45
- 3.2 Somma degli angoli interni in triangoli rettangoli e isosceli 45
  
- A.1 Legature 51





## Premessa

Questi appunti sono rivolti agli studenti del primo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Il corso di Matematica per il Design si articola nei primi due anni di corso: nel primo anno sono previste un'introduzione alla teoria degli insiemi, un cenno al calcolo delle probabilità, elementi di geometria analitica del piano e dello spazio, la logica di base dello scripting in Python. Solo una parte di questi contenuti è presente in questa dispensa. Altri appunti saranno forniti secondo necessità. Nel secondo anno si prevede la trattazione di alcuni argomenti più propriamente legati all'arte e al design, come i solidi platonici, varie curve e superfici geometriche, un cenno alla quarta dimensione, un cenno ai frattali, oltre all'introduzione dell'uso di un programma di computer grafica come Rhinoceros.

Questi appunti contengono solo ed esclusivamente lo schema delle lezioni svolte senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità. Anzi, trattandosi principalmente di un *diario delle lezioni*, alcuni argomenti possono essere anche ripresi più volte in contesti diversi, a seconda delle domande e osservazioni degli studenti. Inoltre alcuni argomenti sono semplicemente accennati, per altri si è fatta una trattazione a volte più estesa e approfondita di quanto fatto in classe, per stimolare eventuali approfondimenti da parte degli allievi. In ogni caso si rimanda ai testi via via consigliati per i necessari completamenti che non trovano posto in questi appunti.

Si tenga comunque conto che, essendo in ogni caso questa dispensa un libro di testo, abbiamo dovuto essere più rigorosi di quanto non succeda con le lezioni in aula, dove è ammesso uno stile meno formale.

Questo testo è liberamente disponibile sul sito web dell'autore, [www.batmath.it](http://www.batmath.it). Come ogni testo di matematica, anche questo non può essere esente da errori, imperfezioni, lacune: chiunque abbia qualcosa da segnalare è pregato di usare l'indirizzo di mail collegato al già citato sito web dell'autore.



# 1. Logica. Insiemi

La logica vi porterà da A a B. L'immaginazione vi porterà dappertutto.  
Albert Einstein

Scopo di questo capitolo è quello di costruire un linguaggio sufficientemente chiaro e preciso per gli sviluppi futuri del corso e di richiamare alcuni concetti di teoria degli insiemi che ci saranno utili per lo studio della probabilità.

In questo capitolo utilizzeremo fin da subito gli insiemi dei numeri naturali ( $\mathbb{N}$ ), interi ( $\mathbb{Z}$ ), razionali ( $\mathbb{Q}$ ) e reali ( $\mathbb{R}$ ), le cui proprietà essenziali dovrebbero essere note dalla scuola media superiore.

## 1.1. Logica proposizionale

La frase “*La neve è bianca*” esprime un fatto ritenuto da tutti *vero*, anzi universalmente vero. La frase “*La terra è una stella*” esprime invece un fatto ritenuto da tutti *falso*, anzi universalmente falso. La frase “*Pordenone è una bella città*” esprime un fatto che può essere ritenuto vero da certi individui e falso da altri. Alle frasi “*Non disturbare mentre faccio lezione*”, “*Vai a comperare il pane*”, “*Se lancio un dado esce il sei*”, “*Domani pioverà*”, non può essere attribuito<sup>(1)</sup> un valore di verità o falsità.

Questi esempi mostrano che alcune frasi, o proposizioni, della lingua italiana (ma lo stesso succede in tutte le lingue) assumono uno ed uno solo tra i valori *vero* e *falso*, in altri casi o non c'è accordo sull'attribuzione di un valore di verità o falsità, oppure non ha proprio senso tale attribuzione.

Esistono anche esempi più complessi, come l'affermazione “*Tutti i numeri naturali pari maggiori di 2 sono somma di due numeri primi*”. Ebbene, a tutt'oggi (2015), non è possibile sapere se tale affermazione sia *vera* o *falsa*<sup>(2)</sup>, benché non si sia trovato nessun caso in cui tale affermazione non è verificata.

Tenendo conto di queste osservazioni, daremo ora una definizione di *enunciato*, o *proposizione*, segnalando comunque che il concetto di *verità* è estremamente delicato e un'analisi approfondita del problema esula dagli scopi di questo corso.

**Definizione 1.1.** *Si chiama proposizione o enunciato ogni affermazione che assume uno e un solo valore di verità: vero o falso.*

Si noti che è implicito nella definizione data il fatto che ammettiamo che la logica di cui ci occupiamo sia *bivalente*, cioè preveda che le espressioni di cui ci occupiamo possano avere uno solo dei due valori di verità “vero” o “falso”.

<sup>1</sup>Come vedremo studiando il calcolo delle probabilità, frasi come “*Se lancio un dado esce il sei*” oppure “*Domani pioverà*”, diventano importanti in quella teoria, in quanto saremo allora interessati non ad attribuire loro a priori un valore di verità o falsità, quanto piuttosto una probabilità di accadimento.

<sup>2</sup>Si tratta della famosa *Congettura di Goldbach*, proposta sostanzialmente da Christian Goldbach nel 1742. Per esempio si ha  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 3 + 5$ ,  $10 = 3 + 7 = 5 + 5$ , ...

Gli enunciati possono essere costituiti da una sola affermazione, come negli esempi che abbiamo proposto sopra, e li chiameremo *enunciati atomici*, oppure possono essere costituiti da più affermazioni, collegate tra di loro. Un esempio è costituito dall'enunciato “*Il sole è una stella e la terra è un pianeta*”, che si può considerare composto da due enunciati atomici (entrambi veri) connessi dalla parola “e”. Un altro modo per costruire nuovi enunciati è quello di usare la negazione “non”. Per esempio “*La terra non è una stella*” è ottenuto dalla *negazione* dell'enunciato (falso) “*La terra è una stella*”.

Si chiamano *connettivi* le parole (come la “e” dell'esempio) che collegano tra di loro due enunciati, oppure che operano su un enunciato (come il “non” dell'esempio) per ottenere un nuovo enunciato. A volte il “non” è chiamato un *operatore* invece che un connettivo, in quanto in realtà non connette due enunciati, ma agisce, “opera”, su un singolo enunciato.

Si deve notare che i connettivi collegano tra di loro due enunciati senza alcun riguardo al significato che questi possono assumere; per esempio è perfettamente legittimo l'enunciato “*Parigi è la capitale del Brasile o  $2 + 2$  vale  $4$* ”, che è la connessione, tramite la parola “o”, di due enunciati (uno falso e uno vero). L'unica cosa che conta è il valore di verità complessivo dell'enunciato risultante.

Poiché nel linguaggio comune le parole non hanno sempre un senso univoco, in logica al posto delle parole si utilizzano dei simboli speciali per formalizzare in maniera rigorosa i connettivi e si costruiscono delle *tavole di verità* che stabiliscono le regole che permettono di dedurre la verità o meno di un enunciato composto, una volta che sia noto il valore di verità degli enunciati componenti: queste tavole di verità possono essere pensate come delle vere e proprie *definizioni* dei connettivi stessi.

### 1.1.1. Connettivi logici

Nel seguito indicheremo le proposizioni con simboli come  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$ , ... I connettivi che ci interesseranno sono i seguenti:

- *non*, oppure  $\neg$ , *negazione*: *non* $\mathcal{P}$  (oppure  $\neg\mathcal{P}$ ) è vera, se  $\mathcal{P}$  è falsa, e viceversa;
- $\wedge$ , “et”, oppure “e”, *coniunzione*:  $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$  è vera se tutte due le proposizioni sono vere, altrimenti è falsa;
- $\vee$ , “vel”, oppure “o”, *disgiunzione*:  $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$  è vera se almeno una delle due proposizioni è vera, altrimenti è falsa;
- $\Rightarrow$ , “implica”, *implicazione*:  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  è falsa solo quando  $\mathcal{P}$  è vera e  $\mathcal{Q}$  è falsa, in particolare da una proposizione falsa si può dedurre qualsiasi cosa;
- $\Leftrightarrow$ , “se e solo se”, “condizione necessaria e sufficiente”, *equivalenza*:  $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$  è vera se  $\mathcal{P}$  e  $\mathcal{Q}$  sono entrambe vere o entrambe false.

La tabella 1.1 (dove “V” indica *vero* e “F” indica *falso*) riassume in maniera formale le definizioni dei connettivi.

Si noti che la tabella 1.1 è costruita tenendo conto che ciascuno dei due enunciati atomici ha due possibili valori di verità, e che quindi per esaminare il valore di verità di un enunciato che li coinvolga entrambi devo esaminare tutte le situazioni che si possono presentare. Per il solo connettivo “non” basterebbero evidentemente due sole righe nella tabella, in quanto in questo caso è coinvolto un solo enunciato atomico. Tabelle di questo tipo si chiamano *tavole di verità*.

Il connettivo  $\Rightarrow$  ha molta importanza in matematica. Dimostrare un teorema significa infatti dimostrare la verità di  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ , sapendo che  $\mathcal{P}$  è vera:  $\mathcal{P}$  è detta *ipotesi* e  $\mathcal{Q}$  è detta *tesi*.

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\neg\mathcal{P}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Tabella 1.1.: Connettivi logici e tavola di verità

## 1.2. Logica dei predicati

Come abbiamo detto, il senso di una proposizione sta nel poter stabilire se è vera o se è falsa. Un'affermazione del tipo  $x < -2$  non è una proposizione, perché il suo valore di verità dipende da  $x$ . Facendo variare  $x$  in un opportuno insieme (che deve essere precisato) si possono ottenere proposizioni vere o proposizioni false. Possiamo dire che si tratta di una proposizione dipendente da  $x$ , e indicarla con  $\mathcal{P}(x)$ :  $x$  sia chiamata una *variabile* e  $\mathcal{P}(x)$  un *predicato*. Naturalmente si possono avere predicati che dipendono da più variabili, per esempio  $x + y > 0$ , e in questo caso i predicati sono anche chiamati *relazioni*.

Come abbiamo già osservato è indispensabile precisare in quale ambiente si deve scegliere la variabile (o le variabili) di un predicato. Per esempio l'affermazione “ $x$  è pari” ha senso se  $x$  è un numero naturale, non ha alcun senso se  $x$  è una frazione.

Fissato uno dei possibili valori di  $x$ , diciamolo  $x_0$ , il predicato diventa una proposizione (che sarà vera o falsa a seconda di  $x_0$ ), proposizione che si indica con  $\mathcal{P}(x_0)$ .

### 1.2.1. Quantificatori

Nella costruzione dei predicati si usano comunemente costruzioni del tipo

- *Esiste (almeno) un  $x$  tale che valga  $\mathcal{P}(x)$ .*
- *Per ogni  $x$  è verificato  $\mathcal{P}(x)$ .*

Per formalizzare queste frasi si usano due simboli logici, detti *quantificatori*

- $\forall$ , “per ogni”, *quantificatore universale*;
- $\exists$ , “esiste (almeno) un”, *quantificatore esistenziale*.

Si usa anche spesso il simbolo  $\exists!$ , oppure  $\exists_1$  per indicare che *esiste uno e uno solo*.

Nel caso di uso contemporaneo di più quantificatori si deve prestare particolare attenzione all'ordine con cui sono scritti. Un esempio chiarirà il senso di questa affermazione.

Consideriamo il predicato  $\mathcal{P}(x, y) =$  “ $x$  è uno studente in grado di risolvere il problema  $y$ ”. Allora

$$\forall y \exists x \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: “qualunque sia il problema  $y$  c'è uno studente in grado di risolverlo”. Invece

$$\exists x \forall y \text{ tale che } \mathcal{P}(x, y)$$

significa: “c’è uno studente in grado di risolvere qualsiasi problema”. Evidentemente si tratta di due situazioni radicalmente diverse.

Osservazione 1.2. È opportuno rendersi conto, su un esempio classico, di come la simbologia comunemente usata in matematica possa facilmente dar luogo a equivoci, senza un’effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi logici.

Consideriamo dunque l’equazione

$$x^2 = 1,$$

le cui soluzioni si trovano scritte usualmente nella forma

$$x = \pm 1,$$

ove si intende che sia il numero 1 che il numero  $-1$  soddisfano l’equazione (in termini logici: rendono vero, nell’insieme dei numeri reali, il predicato “ $x^2 = 1$ ”). Questo risultato andrebbe, più correttamente, espresso nella forma

$$x = 1 \vee x = -1.$$

Consideriamo ora la scrittura

$$x^2 \neq 1$$

la cui “soluzione” è usualmente scritta nella forma

$$x \neq \pm 1.$$

Ebbene, questa scrittura *non* deve essere tradotta in  $x \neq 1 \vee x \neq -1$ , che porterebbe alla conclusione che  $x^2 \neq 1$  è verificata da ogni numero reale; la traduzione logica corretta è, invece,

$$x \neq 1 \wedge x \neq -1$$

in quanto quello che si intende scrivendo  $x \neq \pm 1$  è proprio il *contemporaneo* verificarsi delle due condizioni su  $x$ .

Si può notare che  $x^2 \neq 1$  equivale a  $\neg(x^2 = 1)$  che porta a  $\neg(x = 1 \vee x = -1)$  ovvero a  $\neg(x = 1) \wedge \neg(x = -1)$ , che viene abitualmente scritta  $x \neq 1 \wedge x \neq -1$ .

### 1.3. Il simbolo di sommatoria

Tra i molti simboli che si usano nella pratica matematica ne richiamiamo qui uno, per la sua importanza in numerose questioni.

Se dobbiamo scrivere la somma dei numeri 1, 2, 3, possiamo tranquillamente scrivere  $1 + 2 + 3$ , ma se dobbiamo scrivere la somma dei numeri da 1 a 100<sup>(3)</sup>, la scrittura esplicita diventa oltremodo pesante. Si potrebbe pensare di ovviare con l’uso dei puntini di sospensione:

$$1 + 2 + \dots + 99 + 100.$$

<sup>3</sup>Un aneddoto, abbastanza verosimile, relativo al grande matematico tedesco Carl Friedrich Gauss (1777-1855), racconta che all’età di otto-nove anni il maestro, per metterlo a tacere per un bel po’, gli ordinò di sommare i numeri da 1 a 100: in brevissimo tempo Gauss fornì la risposta  $50 \times 101 = 5050$ , sorprendendo anche il maestro che aveva sottovalutato l’intelligenza del suo allievo...

La cosa però non è esente da critiche e, soprattutto, non è sempre praticabile. Per questo si introduce il cosiddetto *simbolo di sommatoria*, col quale la somma precedente si scrive

$$\sum_{i=1}^{100} i,$$

che traduce in forma compatta esattamente quello che si deve fare: sommare i numeri naturali, rappresentati genericamente dalla “variabile”  $i$ , partendo dal numero 1 e arrivando fino al numero 100.

In generale gli addendi di una somma possono essere più complessi, per esempio:

- i reciproci dei numeri naturali:  $1/i$ ,
- i quadrati dei numeri naturali:  $i^2$ ,
- un’espressione qualunque coinvolgente i numeri naturali, come il rapporto tra un naturale e il suo successivo:  $i/(i+1)$ ,
- ecc.

Se indichiamo con  $a(i)$ , o  $a_i$ , l’espressione coinvolgente il numero naturale  $i$ , la scrittura

$$(1.1) \quad \sum_{i=m}^n a_i$$

indicherà la somma di tante “copie” di quell’espressione, dove al posto di  $i$  si devono mettere, successivamente, tutti i numeri naturali dal valore iniziale  $m$  al valore finale  $n$ . Proponiamo alcuni esempi per chiarire ancora meglio il senso di quanto detto<sup>(4)</sup>.

$$\begin{aligned} - \sum_{i=5}^{10} \frac{1}{i^2} &= \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2}; \\ - \sum_{i=2}^{100} \frac{i}{i-1} &= \frac{2}{2-1} + \frac{3}{3-1} + \dots + \frac{99}{99-1} + \frac{100}{100-1}; \\ - \sum_{i=0}^5 (-1)^i &= (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + (-1)^3 + (-1)^4 + (-1)^5 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 (= 0) \end{aligned}$$

È opportuno osservare che al posto di  $i$  (che si chiama *indice della sommatoria*) si può usare una qualunque altra lettera: le scritture

$$\sum_{i=m}^n a_i \quad , \quad \sum_{j=m}^n a_j \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^n a_k$$

<sup>4</sup>Alcuni scrivono lo stesso simbolo disponendo soprattutto gli estremi in maniera leggermente diversa:

$$\sum_n^m a_i;$$

si tratta praticamente solo di una questione di gusto, e nulla cambia ovviamente per quanto riguarda il significato.

sono del tutto equivalenti (naturalmente purché i valori iniziale e finale restino gli stessi e le espressioni che coinvolgono numeri naturali siano identiche): per questo motivo l'indice  $i$  è spesso detto una *variabile muta*.

Giova anche ricordare che, trattandosi di somme, si possono applicare le usuali proprietà, in particolare ci interessa segnalare quella associativa. Si vedano gli esempi che seguono.

Esempi.

$$\begin{aligned} - \sum_{i=2}^{100} \frac{2i+4}{i-1} &= 2 \sum_{i=2}^{100} \frac{i+2}{i-1}; \\ - \sum_{i=0}^{20} \frac{(-1)^i}{i} &= (-1) \sum_{i=0}^{20} \frac{(-1)^{i-1}}{i}. \end{aligned}$$

#### 1.4. Insiemi

Assumiamo la nozione di *insieme* come primitiva, fidandoci della nostra intuizione. Volendo si potrebbero usare delle circonlocuzioni, del tipo “un insieme è una *collezione* di oggetti, detti *elementi*”, ma in realtà non avremmo detto nulla di significativo: è come dire “un insieme è un insieme”. Abituamente, ma non sempre, indicheremo gli insiemi con le lettere maiuscole corsive:  $A, B, \dots$

La scrittura

$$(1.2) \quad x \in A$$

sta ad indicare che l'oggetto  $x$  è un elemento dell'insieme  $A$  e si legge “ $x$  appartiene ad  $A$ ”. La (1.2) si può scrivere anche  $A \ni x$ . La negazione della (1.2) si scrive

$$(1.3) \quad x \notin A,$$

che si legge, naturalmente, “ $x$  non appartiene ad  $A$ ”. La (1.3) si può scrivere anche  $A \not\ni x$ .

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Questo si può scrivere, usando il simbolo  $\forall$  (“per ogni”),

$$(1.4) \quad A = B \Leftrightarrow (\forall x \ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

dove la doppia freccia “ $\Leftrightarrow$ ” si legge “se e solo se”.

È conveniente introdurre uno speciale insieme, detto *insieme vuoto* e indicato con  $\emptyset$ , privo di elementi. Poiché due insiemi possono essere diversi se e solo differiscono per qualche loro elemento, dovremo ritenere che di insiemi vuoti ce ne sia uno solo.

Per assegnare un insieme possiamo usare due metodi.

1. Rappresentazione estensiva: consiste nell'elencare dettagliatamente tutti gli elementi dell'insieme, per esempio  $A = \{0, \pi, \sqrt{2}, \text{Pordenone}\}$ .
2. Rappresentazione intensiva: consiste nell'assegnare gli elementi indicando una proprietà che li contraddistingue, per esempio  $A = \{x \mid x \text{ è un numero naturale pari}\}$ .



La seconda possibilità è soprattutto indicata per insiemi che contengano infiniti elementi e in particolare per sottoinsiemi di altri insiemi. Anche gli insiemi infiniti però potranno, se non sono possibili equivoci, essere descritti per elencazione. Potremo, a volte, scrivere  $A = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$  per indicare l'insieme dei numeri naturali multipli di 3, ma occorre prestare la massima attenzione. Per esempio se scrivessimo

$$A = \{2, 3, \dots\}$$

non sarebbe assolutamente possibile dedurre se intendiamo riferirci ai numeri naturali maggiori o uguali a 2, oppure ai numeri primi.

È da segnalare il fatto che, se per assegnare un insieme dobbiamo necessariamente avere un criterio per decidere quali sono i suoi elementi, a volte la verifica esplicita se un elemento sta o no in un insieme può essere estremamente complessa. L'esempio classico di questa situazione è quello dell'insieme,  $P$ , dei numeri primi. Mentre è immediato che, per esempio  $31 \in P$ , è molto più difficile verificare che anche  $15485863 \in P$ , e per verificare che  $2^{57885161} - 1 \in P$  (uno dei più grandi<sup>(5)</sup> primi conosciuti alla fine del 2013, con ben 17 425 170 cifre<sup>(6)</sup>) ci vogliono lunghissimi tempi di calcolo anche su un elaboratore molto potente.

Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , se ogni elemento di  $A$  è anche elemento di  $B$ , diremo che  $A$  è un *sottoinsieme* di  $B$ , o che è *contenuto* in  $B$ , o anche che  $B$  è un *soprainsieme* di  $A$ , o che *contiene*  $A$ , e scriveremo

$$(1.5) \quad A \subseteq B \quad , \quad B \supseteq A.$$

Osserviamo esplicitamente che, con questa notazione, per ogni insieme  $A$  si ha  $A \subseteq A$ , cioè ogni insieme è contenuto in se stesso. Per indicare che  $A \subseteq B$ , ma che esiste qualche elemento di  $B$  che non è contenuto in  $A$  useremo la scrittura

$$(1.6) \quad A \subset B, \text{ oppure } B \supset A$$

e parleremo di sottoinsieme (o soprainsieme) *proprio*.

Tra i vari sottoinsiemi di un insieme possiamo sempre annoverare anche l'insieme vuoto:  $\emptyset \subseteq A, \forall A$ . Ci potranno interessare anche sottoinsiemi costituiti da un solo elemento: se  $a \in A$ , allora  $\{a\} \subseteq A$ . Si noti la radicale differenza che c'è tra i due simboli  $\in$  e  $\subset$  (o  $\subseteq$ ): il primo mette in relazione oggetti diversi (elementi e insiemi), il secondo mette in relazione oggetti dello stesso tipo (insiemi).

Dato un insieme  $A$  ammettiamo di poter considerare l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, detto *insieme delle parti* e indicato con  $\mathcal{P}(A)$ . Per esempio, se  $A = \{a, b\}$ , allora

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}.$$

<sup>5</sup>A coloro che si chiedono quale possa essere l'interesse concreto a scoprire numeri primi sempre più grandi, segnaliamo che tutti gli algoritmi crittografici oggi usati, in particolare nel web, sono basati sull'uso di numeri primi con parecchie centinaia di cifre.

<sup>6</sup>Volendo scrivere questo numero occupando circa 2 millimetri per ogni cifra, si otterrebbe una fila di cifre lunga circa 35 chilometri.

## 1.5. Operazioni tra insiemi

Definizione 1.3 (Unione di insiemi). *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro unione, e si indica con  $A \cup B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad  $A$ , a  $B$  o a entrambi<sup>(7)</sup>.*

$$(1.7) \quad A \cup B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}.$$

Esempio 1.1. Se  $A = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ , allora  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ .

Definizione 1.4 (Intersezione di insiemi). *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro intersezione, e si indica con  $A \cap B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono contemporaneamente ad  $A$  e a  $B$ .*

$$(1.8) \quad A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}.$$

Esempio 1.2. Se  $A$  e  $B$  sono come nell'esempio precedente, allora  $A \cap B = \{2, 3\}$ .

Due insiemi la cui intersezione sia vuota si dicono *disgiunti*. L'insieme vuoto è sempre disgiunto da ogni altro insieme.

Le operazioni di unione e intersezione sono ovviamente associative e dunque si potrà scrivere l'unione o intersezione di più insiemi senza usare alcuna parentesi:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C, \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C.$$

Le seguenti sono alcune proprietà di uso comune dell'unione e dell'intersezione e si possono verificare per utile esercizio.

$$\begin{aligned} A \cup A &= A; & A \cap A &= A; \\ A \cup B &= B \cup A; & A \cap B &= B \cap A; \\ A \cup \emptyset &= A; & A \cap \emptyset &= \emptyset; \\ A \cup B &\supseteq A; & A \cap B &\subseteq A; \\ A \cup B &= A \Leftrightarrow A \supseteq B; & A \cap B &= A \Leftrightarrow A \subseteq B. \end{aligned}$$

Valgono anche le proprietà distributive di un'operazione rispetto all'altra:

$$(1.9) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad , \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Si noti che le proprietà distributive sono due: dell'unione rispetto all'intersezione e dell'intersezione rispetto all'unione. Nel caso della somma e prodotto tra numeri vale solo la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma:  $a(b + c) = ab + ac$ .

Definizione 1.5 (Differenza di insiemi). *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si chiama loro differenza, e si indica con  $A \setminus B$ , o anche con  $A - B$ , l'insieme formato dagli elementi che appartengono ad  $A$  ma non a  $B$ .*

$$(1.10) \quad A \setminus B \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \}.$$

<sup>7</sup>I simboli  $\vee$ , *vel*, ed  $\wedge$ , *et*, sono normalmente usati in logica e nella teoria degli insiemi. Significano, rispettivamente, “o, oppure” ed “e contemporaneamente”.

Esempio 1.3. Se  $A$  e  $B$  sono come nell'esempio già considerato per l'unione, allora  $A \setminus B = \{0, 1\}$ .

Nel caso che  $B \subseteq A$ , l'insieme  $A \setminus B$  si chiama anche *complementare di  $B$  rispetto ad  $A$*  e si indica con  $\complement_A B$ , o semplicemente con  $\complement B$  se l'insieme  $A$  è precisato una volta per tutte. Useremo anche la notazione  $A^c$ , particolarmente diffusa nei testi di probabilità, dove un sottoinsieme  $A$  di un insieme opportuno costituisce un evento e  $A^c$  indica l'evento contrario. In molte situazioni<sup>(8)</sup> si conviene di fissare un insieme, detto *universo*, di cui tutti gli insiemi della teoria sono sottoinsiemi. In questo caso quando si parla di complementare senza ulteriori precisazioni si intende sempre il complementare rispetto all'universo.

Segnaliamo che la teoria degli insiemi che qui stiamo presentando è la cosiddetta *teoria ingenua*, più che sufficiente per tutti i nostri scopi ma non esente da problemi: tra gli altri ricordiamo il fatto che essa può creare dei paradossi come quello famoso<sup>(9)</sup> del barbiere.

Assumiamo anche un altro concetto primitivo, che utilizzeremo continuamente, e precisamente quello di *coppia ordinata*, che indicheremo con  $(x, y)$ , dove è importante il posto occupato dagli elementi  $x$  e  $y$ :

$$(x, y) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x = x_1 \wedge y = y_1.$$

Conviene osservare esplicitamente che, in generale,

$$\{a, b\} = \{b, a\} \quad \text{mentre} \quad (a, b) \neq (b, a).$$

Definizione 1.6 (Prodotto cartesiano). *Dati due insiemi  $A$  e  $B$  si chiama loro prodotto cartesiano, o semplicemente prodotto, l'insieme, indicato con  $A \times B$ , delle coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad  $A$  e il secondo a  $B$ :*

$$A \times B \stackrel{\text{def}}{=} \{(a, b) \mid (a \in A) \wedge (b \in B)\}.$$

È una conseguenza immediata della definizione che  $A \times B \neq B \times A$ . Nel caso particolare che  $A = B$  si scrive anche  $A^2$  in luogo di  $A \times A$ .

Si possono considerare anche prodotti cartesiani di più di due insiemi (attenzione all'ordine!) e, nel caso del prodotto cartesiano di un insieme per se stesso  $n$  volte, si scriverà  $A^n$  in luogo di  $A \times A \times \dots \times A$ .

## 1.6. Diagrammi di Eulero-Venn

In molte situazioni è utile servirsi dei cosiddetti *diagrammi di Eulero-Venn* per rappresentare gli insiemi e verificare le proprietà delle operazioni tra insiemi. In questo tipo di diagrammi gli insiemi sono individuati da regioni del piano delimitate da una curva chiusa. In certi casi si conviene di evidenziare esplicitamente alcuni elementi di un insieme mediante punti: la cosa è particolarmente utile nel caso di insiemi finiti, quando si possono anche evidenziare tutti gli elementi degli insiemi stessi. Pur essendo questo tipo di rappresentazione grafica molto significativa, non bisogna abusarne ed è opportuno prestare la massima attenzione.

Nella figura 1.1 è rappresentato un insieme  $A$  con evidenziati tre elementi,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  che gli appartengono e due elementi  $e$ ,  $f$ , che non gli appartengono.

<sup>8</sup>Questo sarà particolarmente importante nel calcolo delle probabilità.

<sup>9</sup>Questo paradosso, formulato da Bertrand Russell agli inizi del 1900, è uno dei più importanti della storia della logica. Si può sintetizzare come segue: *In un villaggio vi è un solo barbiere, un uomo ben sbarbato, che rade tutti e soli gli uomini del villaggio che non si radono da soli. La domanda che ci poniamo è: il barbiere rade se stesso?*

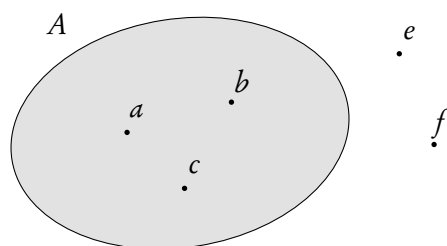


Figura 1.1.: Un insieme con alcuni elementi che gli appartengono ed altri che non gli appartengono

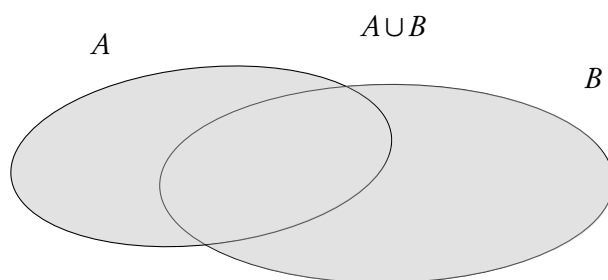


Figura 1.2.: Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro unione

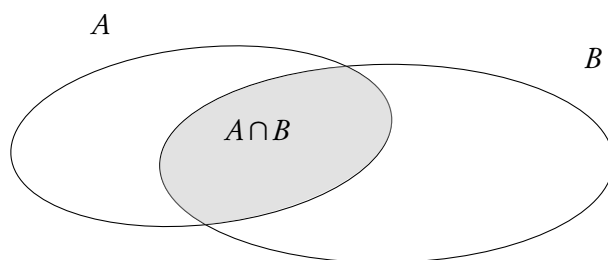


Figura 1.3.: Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro intersezione

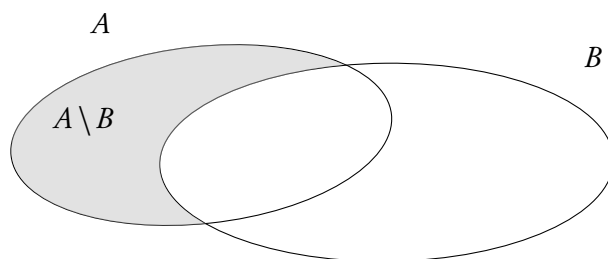


Figura 1.4.: Due insiemi  $A$  e  $B$  e la differenza  $A \setminus B$

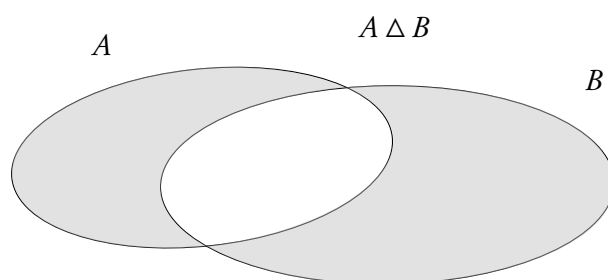


Figura 1.5.: Due insiemi  $A$  e  $B$  e la loro differenza simmetrica

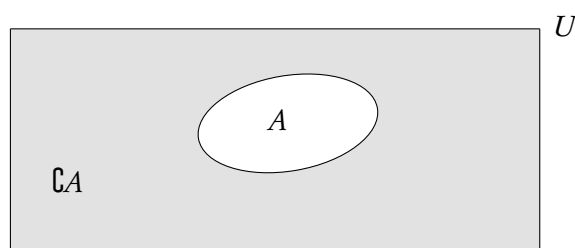


Figura 1.6.: Complementare di un insieme rispetto all'universo  $U$

## 1.7. Partizioni di un insieme

Se  $E$  è un insieme, saremo interessati a considerare una famiglia  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  di sottoinsiemi di  $E$  con le seguenti caratteristiche.

1. Ciascun sottoinsieme è non vuoto:  $A_i \neq \emptyset$ , qualunque sia  $i$ .
2. I sottoinsiemi sono a due a due disgiunti:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ , per ogni  $i$  e  $j$  tali che  $i \neq j$ .
3. L'unione di tutti i sottoinsiemi coincide con tutto l'insieme  $E$ :  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$ .

In sostanza è come dire che l'insieme  $E$  è *suddiviso*, *ripartito*, in sottoinsiemi non vuoti in modo che ogni suo elemento appartenga a uno e uno solo di quei sottoinsiemi. Una tale famiglia di sottoinsiemi di un insieme la chiameremo una *ripartizione* o una *partizione* di  $E$ .

**Esempio 1.4.** Se  $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri naturali e  $A$  e  $B$  sono, rispettivamente, l'insieme dei pari e dei dispari, la famiglia  $\{A, B\}$  è una partizione di  $\mathbb{N}$ .

**Esempio 1.5.** Se  $\mathbb{N}$  è ancora l'insieme dei numeri naturali e  $A$  l'insieme dei naturali pari,  $B$  l'insieme dei primi,  $C$  l'insieme dei dispari non primi, la famiglia  $\{A, B, C\}$  non è una partizione di  $\mathbb{N}$ , nonostante  $A \cup B \cup C = \mathbb{N}$ , in quanto il numero 2 appartiene sia ad  $A$  che a  $B$ .

Nel calcolo delle probabilità ci interesserà un particolare modo di costruire una partizione di un insieme, a partire da alcuni sottoinsiemi generici. Invece di dare una definizione formale, procederemo presentando un esempio che poi si potrà generalizzare. Utilizzeremo i diagrammi di Venn per questioni di semplicità.

Consideriamo un insieme “universo”  $\Omega$  e tre suoi sottoinsiemi  $A, B, C$ , come mostrati nella figura 1.7.

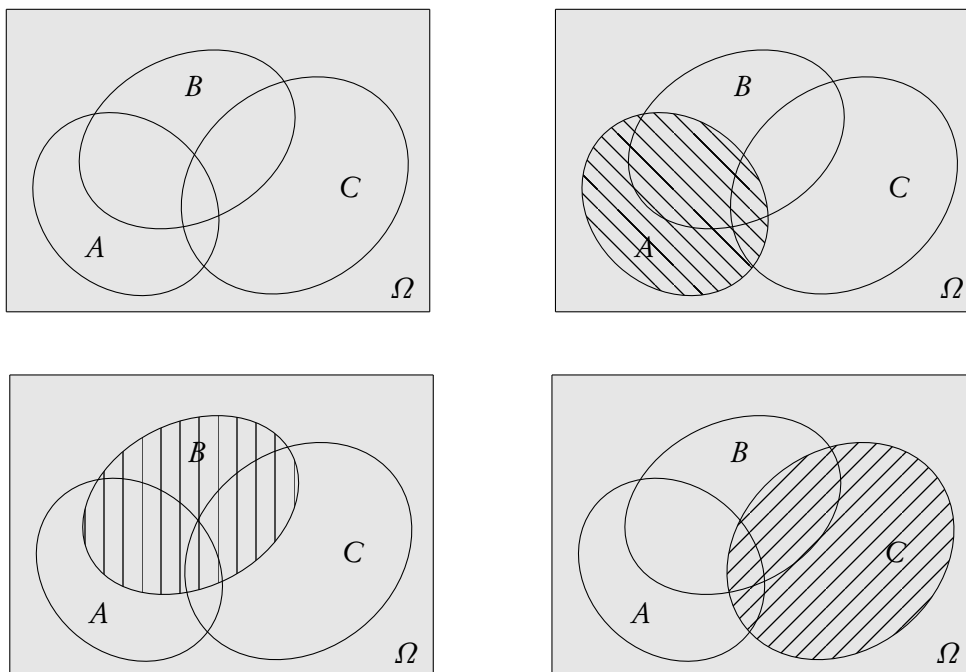


Figura 1.7.: Un insieme universo  $\Omega$  e tre suoi sottoinsiemi:  $A, B, C$

A partire da questi tre sottoinsiemi consideriamo i seguenti sottoinsiemi, che indicheremo con  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$ .

1. L'insieme dei punti comuni ad  $A, B$  e  $C$ :  $A \cap B \cap C = I_1$ .
2. L'insieme dei punti comuni ad  $A$  e  $B$ , ma esterni a  $C$ :  $A \cap B \cap C^c = I_2$ .
3. L'insieme dei punti comuni a  $B$  e  $C$ , ma esterni ad  $A$ :  $A^c \cap B \cap C = I_3$ .
4. L'insieme dei punti comuni ad  $A$  e  $C$ , ma esterni a  $B$ :  $A \cap B^c \cap C = I_4$ .
5. L'insieme dei punti di  $A$  esterni sia a  $B$  che a  $C$ :  $A \cap B^c \cap C^c = I_5$ .
6. L'insieme dei punti di  $B$  esterni sia ad  $A$  che a  $C$ :  $A^c \cap B \cap C^c = I_6$ .
7. L'insieme dei punti di  $C$  esterni sia ad  $A$  che a  $B$ :  $A^c \cap B^c \cap C = I_7$ .
8. L'insieme dei punti esterni a tutti tre i sottoinsiemi dati:  $A^c \cap B^c \cap C^c = I_8$ .

Questi insiemi sono rappresentati, nell'ordine indicato, nelle figure 1.8, 1.9, 1.10, 1.11.

In questo esempio questa tecnica ci ha permesso di costruire 8 diversi sottoinsiemi di  $\Omega$ , non vuoti, a due a due disgiunti e la cui riunione fornisce tutto  $\Omega$ : si tratta dunque di una partizione di  $\Omega$ , ottenuta utilizzando i sottoinsiemi  $A, B$  e  $C$  considerati.

A partire da questi 8 insiemi possiamo sia ricostruire l'insieme universo  $\Omega$ , facendo la riunione di tutti 8, sia ricostruire i tre insiemi di partenza, come di seguito indicato.

$$- A = I_1 \cup I_2 \cup I_5.$$

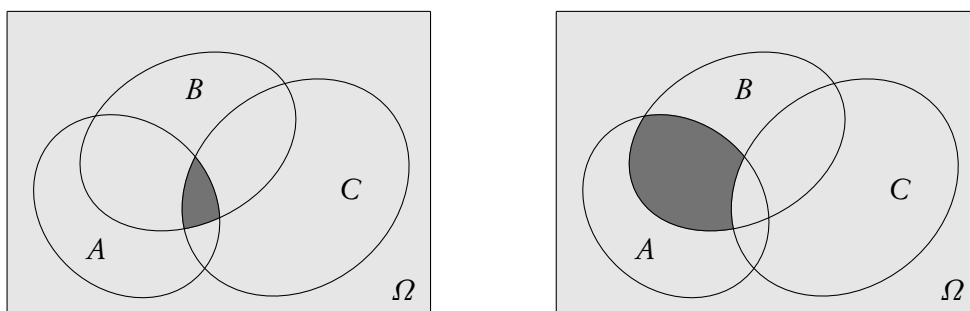


Figura 1.8.:  $A \cap B \cap C = I_1$  e  $A \cap B \cap C^c = I_2$ , con riferimento alla figura 1.7

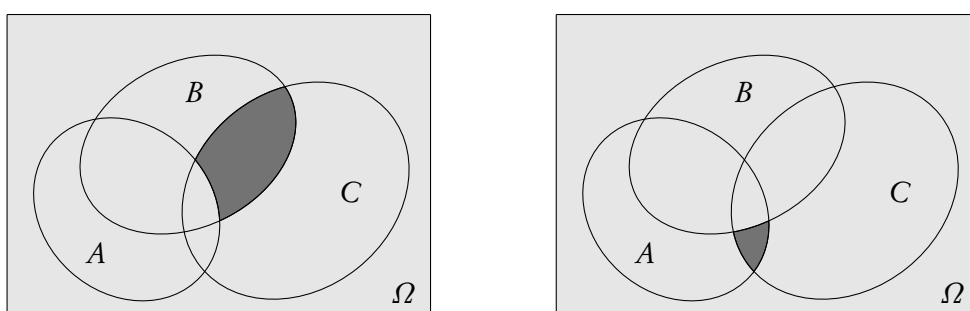


Figura 1.9.:  $A^c \cap B \cap C = I_3$  e  $A \cap B^c \cap C = I_4$ , con riferimento alla figura 1.7

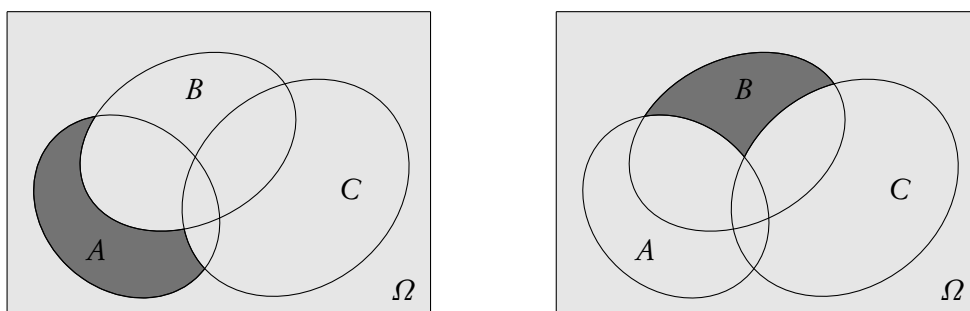


Figura 1.10.:  $A \cap B^c \cap C^c = I_5$  e  $A^c \cap B \cap C^c = I_6$ , con riferimento alla figura 1.7

- $B = I_1 \cup I_3 \cup I_6$ .
- $C = I_1 \cup I_4 \cup I_7$ .

Per questo motivo gli insiemi  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7$  e  $I_8$  si chiamano insiemi *costituenti*<sup>(10)</sup> dei tre

<sup>10</sup>In alcuni testi sono chiamati anche *atomi*.

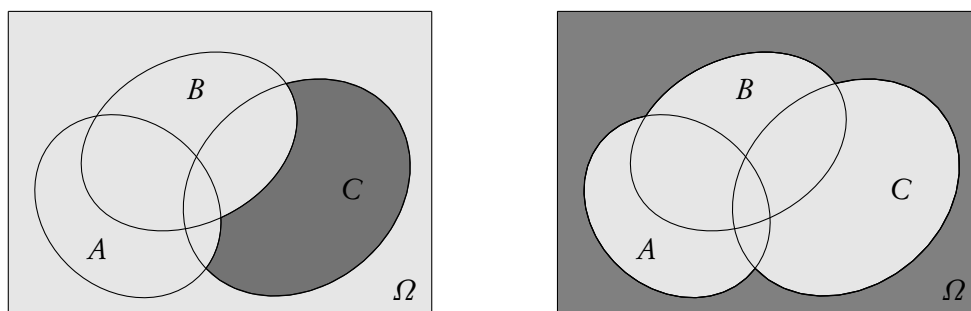


Figura 1.11.:  $A^c \cap B^c \cap C = I_7$  e  $A^c \cap B^c \cap C^c = I_8$ , con riferimento alla figura 1.7

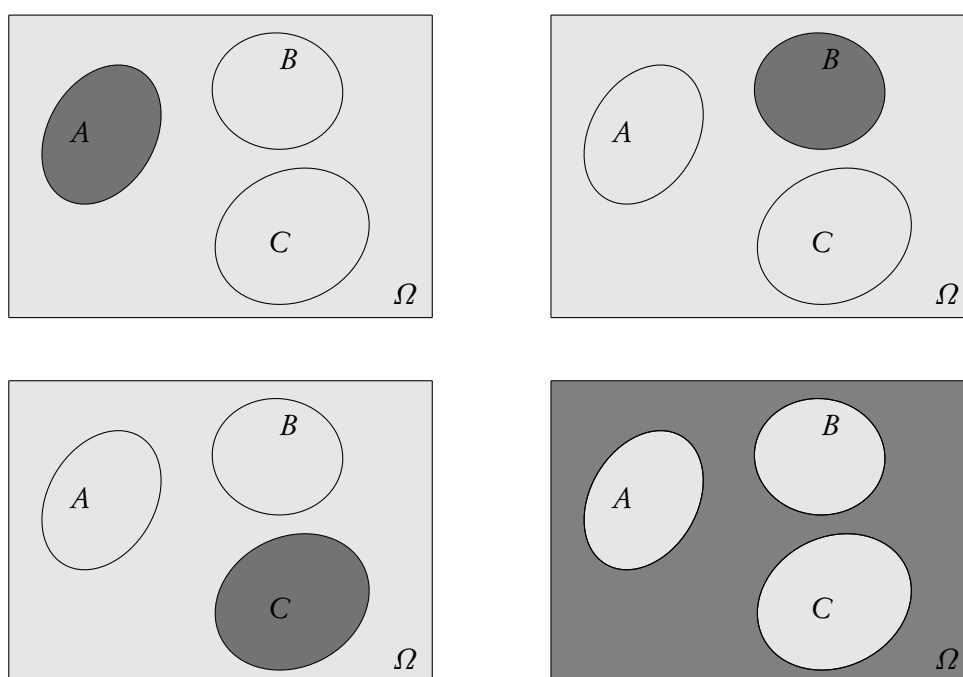


Figura 1.12.: *Costituenti in caso di tre sottoinsiemi disgiunti*

sottoinsiemi dati.

Per un ulteriore esempio consideriamo la situazione costituita da tre sottoinsiemi  $A$ ,  $B$  e  $C$ , che siano a due a due disgiunti. In questo caso tutte le intersezioni che coinvolgono due o tutti tre i sottoinsiemi producono l'insieme vuoto (facendo riferimento all'esempio discusso a pagina 12 si tratta degli insiemi che abbiamo indicato con  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$ ). Delle otto possibilità ne rimangono quindi soltanto quattro, cioè i tre insiemi dati e la parte esterna a tutti tre. Si veda la figura 1.12.

Come utile esercizio si provi a considerare anche altre situazioni, per esempio quella in cui si hanno



sempre tre sottoinsiemi, due dei quali hanno una parte comune, mentre il terzo è esterno agli altri due.

## 1.8. Funzioni

Il concetto di funzione, o applicazione, tra due insiemi è uno dei più fecondi della matematica. Per quanto attiene al nostro corso siamo interessati solo ad alcuni aspetti essenziali.

**Definizione 1.7.** *Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , si dice funzione di  $A$  in  $B$  una qualunque legge che faccia corrispondere a ogni elemento di  $A$  uno ed un solo elemento di  $B$ .*

*L'insieme  $A$  è detto dominio della funzione, l'insieme  $B$  è detto codominio. Se  $x$  è un elemento dell'insieme  $A$  e  $y$  è l'unico elemento di  $B$  che corrisponde ad  $x$ , si dice che  $y$  è funzione di  $x$  e si scrive  $y = f(x)$  (leggi: “ $y$  uguale a effe di  $x$ ”).*

È molto importante ricordare che per assegnare una funzione occorre assegnare

- il dominio
- il codominio
- una legge o regola che indichi, per ogni  $x$  del dominio, quale sia l'unico  $y$  corrispondente del codominio.

Per visualizzare le funzioni si usano spesso dei diagrammi a frecce, come quello della figura 1.13.

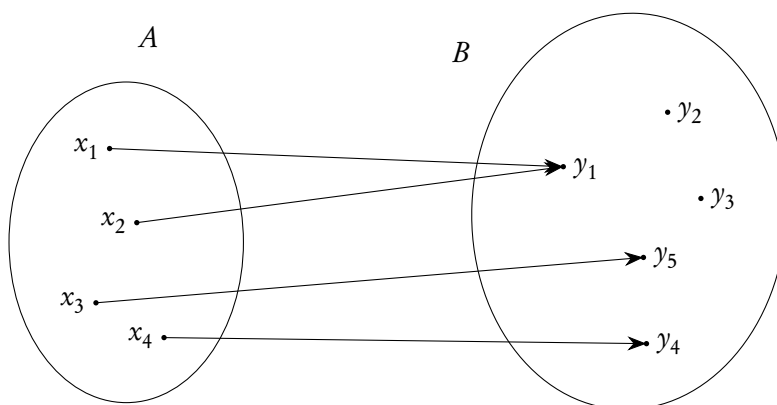


Figura 1.13.: Diagramma “a frecce” per visualizzare una funzione (tra insiemi finiti)

Si noti che è *obbligatorio* che da ogni punto (elemento dell'insieme)  $A$  parta *esattamente* una freccia, mentre sui punti dell'insieme  $B$  possono anche arrivare *più* frecce, oppure *nessuna* freccia. Si potrebbe dire, usando un linguaggio figurato, che  $A$  è l'insieme degli arcieri,  $B$  l'insieme dei bersagli e che ogni arciere ha a disposizione nella propria faretra solo una freccia che è costretto a lanciare, mentre non ci sono limitazioni sui bersagli da colpire: ci possono essere bersagli colpiti da più frecce, e anche bersagli non colpiti da alcuna freccia.

I casi particolari seguenti interessano le applicazioni.

1. Il caso in cui “tutti i bersagli sono colpiti”: in questo caso la funzione si dice *suriettiva*.

2. Il caso in cui “ciascun bersaglio è colpito al massimo una volta”: in questo caso la funzione si dice *iniettiva*; è come dire che arcieri diversi colpiscono bersagli diversi.
3. Il caso in cui si verificano contemporaneamente le due situazioni precedenti, cioè “ogni bersaglio è colpito esattamente una volta”: in questo caso la funzione si dice *biunivoca* o *biiettiva*. Dunque biunivoca significa iniettiva e contemporaneamente suriettiva.

Non sarà sempre possibile avere funzioni con una delle tre proprietà considerate. Se per esempio  $A$  ha tre elementi (tre arcieri) e  $B$  ne ha quattro (quattro bersagli), non sarà mai possibile avere una funzione suriettiva; viceversa se  $A$  ha quattro elementi e  $B$  ne ha tre non sarà mai possibile avere una funzione iniettiva.

Se, dati due insiemi  $A$  e  $B$ , esiste una funzione biunivoca tra i due, allora si dice che i due insiemi sono in corrispondenza biunivoca.

## 1.9. Cardinalità

Per trattare alcuni concetti di probabilità abbiamo bisogno di introdurre il concetto di *cardinalità* di un insieme: si tratta in sostanza di valutare la *quantità di elementi* dell'insieme. Ne faremo solo un breve cenno.

**Definizione 1.8.** *Se due insiemi  $A$  e  $B$  sono in corrispondenza biunivoca si dice che hanno la stessa cardinalità. Se un insieme  $A$  è in corrispondenza biunivoca con un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$  del tipo  $\{1, 2, \dots, n\}$ , dove  $n$  è un numero naturale maggiore o uguale a 1, allora si dice che l'insieme  $A$  è finito e il numero  $n$  si chiama cardinalità di  $A$ . Se ciò non è possibile l'insieme  $A$  si dice infinito o che ha cardinalità infinita.*

La cardinalità di un insieme  $A$  si indica con il simbolo

$$(1.11) \quad |A| \quad \text{oppure} \quad \text{card}(A).$$

Per quanto riguarda gli insiemi finiti il concetto di cardinalità è abbastanza semplice e anzi possiamo osservare che è in questo modo che, alle scuole elementari, ci è stato introdotto il concetto di numero: il numero 2, per esempio, ci è stato introdotto proprio come quello che identifica la quantità di oggetti negli insiemi rappresentati nella figura 1.14.

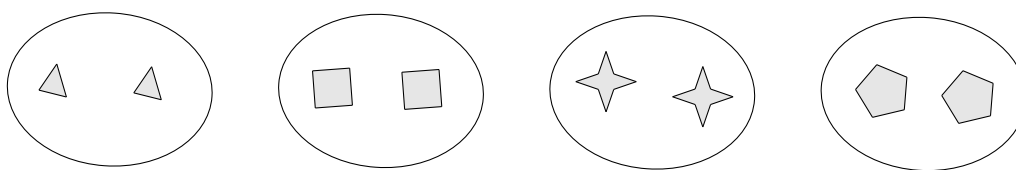
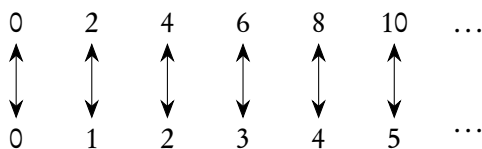


Figura 1.14.: *Insiemi di cardinalità 2*

La situazione è più complessa quando si ha a che fare con insiemi infiniti. Senza entrare troppo nei dettagli faremo alcune considerazioni di base (anche perché sono interessanti e, in un certo senso, sorprendenti).

Intanto osserviamo che il primo esempio di insieme infinito è quello dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ : è ovvio che non si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri naturali e un insieme del

tipo  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Anche l'insieme, diciamolo  $\mathbb{P}$ , dei numeri naturali pari (che è un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$ ) è infinito, come è evidente: la cosa sorprendente è che tra  $\mathbb{P}$  ed  $\mathbb{N}$  è possibile stabilire una corrispondenza biunivoca, come mostra l'immagine che segue.



Potremo dire che gli insiemi  $\mathbb{P}$  ed  $\mathbb{N}$  hanno la stessa “quantità di elementi”, oppure la stessa “numero-sità”, nonostante  $\mathbb{P}$  sia un sottoinsieme di  $\mathbb{N}$ , anzi un sottoinsieme che dovrebbe avere, a livello intuitivo, la metà degli elementi di  $\mathbb{N}$ .

A questo punto potrebbe venire il sospetto che tra due insiemi infiniti qualunque si possa stabilire sempre una corrispondenza biunivoca, ovvero che due insiemi infiniti qualunque abbiano la stessa cardinalità. Purtroppo la cosa non è vera e l'esempio più famoso<sup>(11)</sup> è dato dagli insiemi dei numeri naturali e dei numeri reali: non è possibile stabilire alcuna corrispondenza biunivoca tra questi due insiemi. Se ne può concludere (visto anche che  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ) che l'insieme dei numeri reali ha più elementi, ovvero è più numeroso, dell'insieme dei numeri naturali: si dice che la cardinalità di  $\mathbb{R}$  è più grande della cardinalità di  $\mathbb{N}$ . Per la cardinalità di  $\mathbb{N}$  si usa il simbolo  $\aleph_0$  (leggi “alef-zero”), per la cardinalità<sup>(12)</sup> di  $\mathbb{R}$  si usa il simbolo  $\aleph_1$  (leggi “alef-uno”): dunque

$$\aleph_0 < \aleph_1.$$

Gli insiemi che hanno la cardinalità  $\aleph_0$  si dicono *numerabili*, la cardinalità di  $\mathbb{R}$  si chiama anche *cardinalità del continuo*: quest'ultima denominazione sta, in un certo senso, a ricordare che l'insieme dei numeri reali si può rappresentare sulla retta, che è un “continuo”, senza alcuna interruzione o “lacuna”.

## 1.10. Numeri

Gli “oggetti base” su cui opera la matematica sono i numeri. Gli insiemi numerici che useremo sono i seguenti:

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}.$$

La natura di questo corso non ci consente una trattazione dettagliata delle proprietà di questi insiemi, che riterremo sostanzialmente noti dalla scuola media superiore. Richiameremo solo alcune delle nozioni più significative, cominciando con il “presentare” questi insiemi.

<sup>11</sup>Questa scoperta è dovuto al grande matematico Georg Cantor (1845-1918), che la provò con un famoso procedimento detto “procedimento diagonale”. È interessante quello che David Hilbert (1862-1943), uno dei più eminenti matematici a cavallo tra l'800 e il 900, disse a proposito di Cantor: “Nessuno riuscirà a cacciarci dal Paradiso che Cantor ha creato per noi.”

<sup>12</sup>In alcuni testi si usa anche il simbolo  $c$ .

- $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri *naturali* che, come diceva Leopold Kronecker (1823-1891), possono essere considerati un dono di Dio: “Dio fece i numeri naturali; tutto il resto è opera dell'uomo”. Per noi l'insieme dei numeri naturali è:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

L'insieme dei numeri naturali ha un minimo elemento (lo 0) e non ha un massimo elemento. Anche un qualunque sottoinsieme dei numeri naturali ha un minimo elemento.

- $\mathbb{Z}$  (il simbolo usato è legato alla parola tedesca *zahl*, cioè *numero*, *cifra*) è l'insieme dei numeri *interi*, ovvero, almeno a livello molto intuitivo, dei “numeri naturali con segno” (attenzione però al fatto che  $+0 = -0 = 0$ , ovvero al fatto che 0 non ha segno!):

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Proprietà comune ai naturali e agli interi è che ogni numero ha un *successivo*.

- $\mathbb{Q}$  (il simbolo usato è dovuto al fatto che si tratta, sostanzialmente, di quozienti, o rapporti, *ratio* in latino) è l'insieme dei numeri *razionali*, ovvero delle *frazioni* con numeratore e denominatore interi, e denominatore diverso da zero. Per essere precisi, occorre tenere conto che due frazioni che, ridotte ai minimi termini, sono uguali, rappresentano lo stesso numero. Si può anche pensare di attribuire il segno solo al numeratore, ritenendo che il denominatore sia un numero naturale (diverso da zero):

$$\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}.$$

I numeri razionali si possono anche scrivere come *numeri decimali*, finiti o periodici. Una delle novità sostanziali dell'insieme dei razionali rispetto a quello degli interi è il fatto che non si può più parlare di *successivo* di un numero, anzi, tra due razionali qualsiasi esiste sempre (almeno) un altro razionale (e quindi infiniti):

$$\text{se } a = \frac{m}{n} \text{ e } b = \frac{p}{q}, \text{ allora il numero } c = \frac{a+b}{2} \text{ è razionale ed è compreso tra } a \text{ e } b.$$

- $\mathbb{R}$  è l'insieme dei numeri *reali*. Un'introduzione rigorosa di questo insieme di numeri esula dagli scopi di questo corso. Possiamo, almeno a livello elementare, pensare a questi numeri come all'insieme di tutti gli interi, le frazioni, i radicali, i numeri come  $\pi$ , ecc. Potremmo anche pensarli come l'insieme di tutti gli allineamenti decimali, finiti, illimitati periodici e illimitati non periodici, anche se questo modo di introdurre i reali si scontra con grosse difficoltà quando si devono eseguire le operazioni (come si possono sommare, o peggio ancora moltiplicare, due allineamenti illimitati, se devo cominciare “all'estrema destra”, e tenere conto di tutti i riporti?).

A partire dall'insieme dei naturali, questi insiemi numerici, nell'ordine in cui sono stati presentati, sono via via sempre più grandi, nel senso che

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Comune a tutti questi insiemi è la possibilità di eseguire le operazioni di addizione e moltiplicazione, con proprietà via via sempre più soddisfacenti, come per esempio il fatto che in  $\mathbb{N}$  non si può sempre

fare la sottrazione, mentre in  $\mathbb{Z}$  e successivi si, in  $\mathbb{Z}$  non si può sempre fare la divisione, mentre in  $\mathbb{Q}$  e  $\mathbb{R}$  si (tranne per zero, ovviamente!).

In matematica si utilizza estesamente anche un altro insieme numerico, l'insieme dei numeri complessi, che si indica con  $\mathbb{C}$  e che è un soprainsieme dell'insieme dei numeri reali:  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Il vantaggio principale di questo insieme numerico è che in esso si può sempre estrarre la radice quadrata, anche dei numeri negativi. Non avremo comunque occasione di occuparcene.

## 1.11. Intervalli di numeri reali

Alcuni sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali sono particolarmente importanti nelle applicazioni. Ne consideriamo la definizione e le proprietà in questo paragrafo.

**Definizione 1.9.** *Dati due numeri reali  $a$  e  $b$ , con  $a < b$ , si chiamano intervalli, con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di  $\mathbb{R}$ .*

$]a, a[$	$\emptyset$	<i>intervallo vuoto</i>
$]a, b[$	$\{x \mid a < x < b\}$	<i>intervallo limitato aperto</i>
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	<i>intervallo limitato chiuso</i>
$[a, b[$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	<i>intervallo limitato chiuso a sinistra e aperto a destra</i>
$]a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	<i>intervallo limitato aperto a sinistra e chiuso a destra</i>
$]a, +\infty[$	$\{x \mid x > a\}$	<i>intervallo superiormente illimitato aperto</i>
$[a, +\infty[$	$\{x \mid x \geq a\}$	<i>intervallo superiormente illimitato chiuso</i>
$] -\infty, a[$	$\{x \mid x < a\}$	<i>intervallo inferiormente illimitato aperto</i>
$] -\infty, a]$	$\{x \mid x \leq a\}$	<i>intervallo inferiormente illimitato chiuso</i>

*I numeri reali  $a$  e  $b$ , oppure soltanto  $a$  o soltanto  $b$ , si chiamano estremi dell'intervallo.*

*Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, quelli illimitati anche semirette.*

In sostanza gli intervalli sono caratterizzati dalla proprietà che, se contengono due numeri reali, contengono tutti i numeri compresi tra quei due.

Anche per l'intero insieme  $\mathbb{R}$  si usa la scrittura  $] -\infty, +\infty[$  e questo intervallo si dice semplicemente illimitato e si considera sia aperto che chiuso.

Nel caso che  $a = b$  l'intervallo chiuso  $[a, a]$  si riduce solo a un punto e si può chiamare intervallo degenere. A volte anche l'insieme vuoto si considera come un intervallo a cui si dà il nome di *intervallo nullo*.

Per gli intervalli limitati, al punto

$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

si dà il nome di *centro* e al numero

$$\delta = b - x_0 = x_0 - a$$

si dà il nome di *raggio* o *semiampiezza*. L'intervallo (aperto) di centro  $x_0$  e raggio  $\delta$  è allora

$$]x_0 - \delta, x_0 + \delta[.$$

Ogni punto di un intervallo che non coincida con gli (eventuali) estremi si dice *interno* all'intervallo.

## 1.12. Esercizi

Esercizio 1.1. Se  $A = \{1, 2, 3\}$ , scrivere l'insieme  $\mathcal{P}(A)$ .

*Risoluzione.* Si ha

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}. \quad \square$$

Esercizio 1.2. Se  $A = \{1, 2, 3\}$ , dire quali delle seguenti scritte sono corrette e quali errate.

- $\{1\} \in A$ .
- $\{1\} \subset A$ .
- $\{1\} \subseteq A$ .
- $1 \in A$ .
- $\emptyset \subseteq A$ .
- $\emptyset \subset A$ .
- $\emptyset \in A$ .
- $|A| = 3$ .
- $|\mathcal{P}(A)| = 8$ .
- $A \subset A$ .
- $A \subseteq A$ .

*Risoluzione.*  $\{1\} \in A$  è falsa perché  $\{1\}$  è un sottoinsieme, non un elemento di  $A$ .  $\{1\} \subset A$  e  $\{1\} \subseteq A$  sono entrambe vere (si ricordi che  $\{1\} \subseteq A$  significa  $\{1\} \subset A \vee \{1\} = A$ : la prima è vera, la seconda è falsa, dunque la proposizione ottenuta con “Vel” è vera).  $1 \in A$  è vera: 1 è un elemento di  $A$ .  $\emptyset \subseteq A$  e  $\emptyset \subset A$  sono vere (si ricordi quanto appena osservato per il significato di  $\subseteq$ ).  $\emptyset \in A$  è falsa:  $\emptyset$  è un sottoinsieme, non un elemento di  $A$ .  $|A| = 3$  e  $|\mathcal{P}(A)| = 8$  sono banalmente vere.  $A \subset A$  è falsa, in quanto  $A = A$ .  $A \subseteq A$  è vera, per quanto già osservato sul senso di  $\subseteq$ .  $\square$

Esercizio 1.3. Siano dati gli insiemi  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11\}$ ,  $B = \{2, 3, 7, 15, 16, 17\}$ ,  $C = \{1, 3, 7, 17, 18, 20\}$  e  $D = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ . Trovare i seguenti insiemi.

- $A \cup B$ .
- $A \cap B$ .
- $(A \cup B) \cap (C \cup D)$ .
- $(A \cap B) \cup (C \cap D)$ .
- $(A \setminus B) \cup (C \setminus D)$ .
- $A \setminus (B \cap C)$ .
- $(D \setminus C) \cup (C \setminus D)$ .

*Risoluzione.* Si ha:

- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 15, 16, 17\}$ .
- $A \cap B = \{2, 3, 7\}$ .
- $(A \cup B) \cap (C \cup D) = \{1, 3, 7, 9, 11, 17\}$ .

- $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \{2, 3, 7\}$ .
- $(A \setminus B) \cup (C \setminus D) = \{1, 3, 4, 5, 9, 11, 17, 18, 20\}$ .
- $A \setminus (B \cap C) = \{1, 2, 4, 5, 9, 11\}$ .
- $(D \setminus C) \cup (C \setminus D) = \{1, 3, 6, 8, 9, 10, 11, 17, 18, 20\}$ . □

Esercizio 1.4. Con riferimento agli stessi insiemi dell'esercizio 1.3, dire se valgono o no le seguenti uguaglianze.

- $A \cup B = B \cup A$ .
- $A \cap B = B \cap A$ .
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ .
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .
- $A = A \cup (A \cap B)$ .

*Risoluzione.* Le uguaglianze indicate valgono per tutti gli insiemi: le prime due esprimono le proprietà commutative, la terza e la quarta la doppia proprietà distributiva, la quinta e la sesta le proprietà associative, l'ultima si può leggere dicendo che un insieme è l'unione dell'insieme stesso con un suo sottoinsieme. □

Esercizio 1.5. Calcolare

$$\sum_{i=3}^6 \left( \frac{i}{i+1} + i \right)^2.$$

*Risoluzione.* La somma indicata si può scrivere, in maniera esplicita, come

$$\left( \frac{3}{4} + 3 \right)^2 + \left( \frac{4}{5} + 4 \right)^2 + \left( \frac{5}{6} + 5 \right)^2 + \left( \frac{6}{7} + 3 \right)^2.$$

Il calcolo richiede una buona dose di pazienza: dopo un bel po' di fatica si ottiene

$$\frac{20841781}{176400}.$$

Quello che ci interessa qui segnalare è come un simbolo così compatto possa in realtà racchiudere un numero così complesso. □

Esercizio 1.6. Calcolare

$$\sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=2}^4 (i^2 + j) \right).$$

*Risoluzione.* In questo caso si tratta di fare prima la somma interna, ponendo  $j$  successivamente uguale a 2, 3, 4 e solo dopo fare la somma esterna, ponendo  $i$  successivamente uguale a 1, 2, 3. In termini espliciti si ha, al primo passo,

$$\sum_{i=1}^3 ((i^2 + 2) + (i^2 + 3) + (i^2 + 4)) = \sum_{i=1}^3 (3i^2 + 9).$$

Al secondo passo si ottiene

$$(3 \cdot 1^2 + 9) + (3 \cdot 2^2 + 9) + (3 \cdot 3^2 + 9) = 69. \quad \square$$

Esercizio 1.7. Siano  $\Omega$  l'insieme dei naturali da 1 a 8,  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$ ,  $C = \{5, 6, 7\}$ . Scrivere una partizione di  $\Omega$  mediante costituenti.

*Risoluzione.* Scriviamo intanto gli insiemi  $A^c$ ,  $B^c$  e  $C^c$ . Si ha

$$A^c = \{2, 4, 6, 7, 8\}, \quad B^c = \{1, 3, 5, 7, 8\}, \quad C^c = \{1, 2, 3, 4, 8\}.$$

Se ne deduce che gli insiemi ottenuti intersecando fra di loro questi insiemi come descritto nella pagina 12 sono i seguenti.

- $A \cap B \cap C = \emptyset$ .
- $A \cap B \cap C^c = \emptyset$ .
- $A \cap B^c \cap C = \{5\}$ .
- $A^c \cap B \cap C = \{6\}$ .
- $A \cap B^c \cap C^c = \{1, 3\}$ .
- $A^c \cap B^c \cap C = \{7\}$ .
- $A^c \cap B \cap C^c = \{2, 4\}$ .
- $A^c \cap B^c \cap C^c = \{8\}$ .

I primi due insiemi sono vuoti, gli altri 6 costituiscono una partizione, come richiesto. □

Esercizio 1.8. Per ognuna delle uguaglianze seguenti dire, giustificando le risposte, quando vale ( $A$  e  $B$  sono insiemi).

1.  $A \cup B = A$ ;
2.  $A \cap B = A$ ;
3.  $A \setminus B = A$ ;
4.  $A \setminus B = \emptyset$ ;
5.  $A \cap B = \emptyset$ ;
6.  $A \cup B = \emptyset$ .

*Risoluzione.* Si possono fare le considerazioni seguenti.

1.  $A \cup B = A$ : è valida se  $A$  è un soprainsieme di  $B$ , in particolare, ma non solo, se  $B$  è vuoto.
2.  $A \cap B = A$ : è valida se  $A$  è un sottoinsieme di  $B$ , in particolare anche se  $A$  è vuoto.
3.  $A \setminus B = A$ : è valida quando  $A$  e  $B$  sono disgiunti, ovvero non hanno elementi comuni.
4.  $A \setminus B = \emptyset$ : è valida quando  $B$  è un soprainsieme di  $A$ .
5.  $A \cap B = \emptyset$ : è valida se  $A$  e  $B$  sono disgiunti, in particolare, ma non solo se uno o entrambi sono vuoti.
6.  $A \cup B = \emptyset$ : è valida solo se  $A$  e  $B$  sono entrambi vuoti. □



## 2. Cenni di calcolo combinatorio

In matematica non si capiscono le cose. Semplicemente ci si abitua ad esse.  
*John von Neumann*

In questo capitolo è proposta una introduzione ai fondamenti del calcolo combinatorio, limitatamente ai suoi aspetti più elementari.

In tutto questo capitolo, salvo quando diversamente specificato, i numeri  $m, n, k$  sono sempre naturali.

### 2.1. Introduzione

Il calcolo combinatorio si occupa della determinazione della cardinalità di certi insiemi finiti, assegnati mediante proprietà caratteristica. Il problema è usualmente molto complesso e, soprattutto, non esistono metodi standard per risolverlo: forse per questo è ritenuto argomento ostico e difficile. Oltre ad essere una premessa molto importante per lo studio del calcolo delle probabilità, questo argomento entra anche nei rapporti tra matematica, arte e design.

In questo capitolo descriveremo le tecniche fondamentali e proporremo alcuni esempi risolti: l'esame di un buon numero di casi concreti è l'unico modo per acquisire dimestichezza nella risoluzione di questo tipo di problemi, anche se in questo corso saremo interessati solo alle questioni essenziali.

E' opportuno segnalare fin da subito che esistono situazioni in cui l'unica strategia che è possibile utilizzare è quella di scrivere l'insieme in questione e numerare, uno alla volta, i suoi elementi. L'esempio più classico è costituito dal seguente problema: *Dato un numero naturale  $n$ , determinare la cardinalità dell'insieme dei numeri primi minori di  $n$ .* Non resta altro da fare che scrivere pazientemente tutti i numeri richiesti e contarli.

Prima di entrare nei dettagli è utile una definizione.

**Definizione 2.1.** *Dato un naturale  $n > 0$ , si chiama fattoriale di  $n$  e si indica con  $n!$  ( $n$  fattoriale) il prodotto di tutti i naturali da 1 a  $n$ :*

$$(2.1) \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n.$$

Si pone poi  $0! = 1$ .

Quasi certamente il motivo per cui nel simbolo è presente il punto esclamativo è legato allo stupore per la rapidità con cui il risultato dell'operazione cresce, al crescere del numero  $n$ . Si ha, per esempio,

$$10! = 3628800,$$

numero che non è ancora molto grande, mentre

$$\begin{aligned} 100! &= 9332621544394415268169923885626670049071596826438162146859296389521759999 \\ &\quad 322991560894146397615651828625369792082722375825118521091686400000000 \\ &\quad 0000000000000000 \simeq 10^{158}, \end{aligned}$$

e questo si che è drammaticamente grande. Per rendersi ancora meglio conto di questo fatto si può osservare che la maggior parte delle calcolatrici tascabili, anche scientifiche, non riescono a calcolare nemmeno  $70!$ , in quanto è un numero superiore a  $10^{100}$ , che è il massimo intero ammesso nelle comuni calcolatrici.

È utile in molte questioni tenere conto delle seguenti formule, immediata conseguenza della definizione di fattoriale.

$$(2.2) \quad n! = n \cdot (n-1)!, \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!, \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!, \quad \dots$$

## 2.2. Disposizioni

Il primo problema base del calcolo combinatorio può essere espresso come segue: dato un insieme  $A$  di  $n$  elementi in quanti modi è possibile costruire allineamenti ordinati di  $k$  di questi elementi?

Esempio 2.1. Dati i simboli 1, 2, X, quante colonne di 13 simboli siffatti si possono costruire? (Gioco del totocalcio).

Esempio 2.2. Dato un alfabeto di 26 simboli, quante sono le parole di tre simboli tutti distinti che si possono costruire (prescindendo dal significato!)?

Esempio 2.3. In una gara di Formula 1 con 20 piloti, quante sono le possibili terne candidate a salire sul podio?

Si noti che nel primo esempio gli allineamenti richiesti comportano la possibilità di ripetizioni, negli altri due no.

Utilizzando uno schema a celle il problema può essere visualizzato così: dati  $n$  simboli e  $k$  caselle numerate progressivamente, in quanti modi è possibile riempire le  $k$  caselle con gli  $n$  simboli? È chiaro che, se non sono consentite ripetizioni dei simboli,  $k$  non deve superare  $n$ , altrimenti non ci sono condizioni. Si veda la figura 2.1.

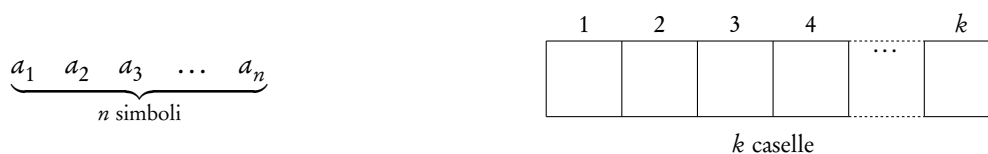


Figura 2.1.: Disposizioni di “ $n$ ” oggetti distinti in “ $k$ ” caselle numerate

Diamo ora due definizioni più formali.

**Definizione 2.2 (Disposizioni semplici).** *Dati  $n$  oggetti distinti e detto  $k$  un numero positivo non superiore a  $n$ , si chiamano disposizioni semplici di questi  $n$  oggetti presi  $k$  alla volta, ovvero di classe  $k$ , tutti gli allineamenti che si possono formare con gli  $n$  oggetti dati in modo che ciascuno sia preso al massimo una volta, che due allineamenti differiscano per l'ordine in cui i  $k$  oggetti sono presi o per almeno uno degli oggetti contenuti.*

Definizione 2.3 (Disposizioni con ripetizione). *Dati  $n$  oggetti distinti e detto  $k$  un numero positivo qualunque, si chiamano disposizioni con ripetizione di questi  $n$  oggetti presi  $k$  alla volta, ovvero di classe  $k$ , tutti gli allineamenti che si possono formare con gli  $n$  oggetti dati in modo che ciascuno sia preso al massimo  $k$  volte, che due allineamenti differiscano per l'ordine in cui gli oggetti sono presi o per almeno uno degli oggetti contenuti o per il numero di ripetizioni di un oggetto.*

Il numero delle disposizioni semplici di  $n$  oggetti di classe  $k$  si indica<sup>(1)</sup> con  $V_n^k$ , quello delle disposizioni con ripetizione con  ${}^R V_n^k$ . Valgono le seguenti formule.

$$(2.3) \quad V_n^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-(k-1))}_{k \text{ fattori}} = \underbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}_{k \text{ fattori}} = \frac{n!}{(n-k)!};$$

$$(2.4) \quad {}^R V_n^k = n^k.$$

Esempio 2.4. Dato  $A = \{a, b, c, d\}$ , le disposizioni semplici di classe 2 sono in numero  $V_4^2 = 12$  e sono:  $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$ . Le disposizioni con ripetizione della stessa classe sono invece  ${}^R V_4^2 = 16$  e sono le 12 precedenti con l'aggiunta di  $aa, bb, cc, dd$ .

Per comprendere ancora meglio il concetto di disposizione si può pensare che gli  $n$  oggetti siano lettere di un alfabeto e che gli allineamenti siano le parole che si possono formare con queste lettere: disposizioni semplici se nessuna lettera può essere ripetuta, con ripetizione se qualche lettera può essere ripetuta.

## 2.3. Permutazioni

Permutare significa “cambiare l'ordine” in cui certi oggetti sono scritti. Interessa sia il caso in cui gli oggetti sono tutti distinti, sia quello in cui ci sono ripetizioni.

### 2.3.1. Permutazioni fra elementi distinti

Il caso in cui le disposizioni semplici di  $n$  oggetti siano di classe  $n$  ha una particolare importanza, tanto da meritare un capitolo a sé nello studio del calcolo combinatorio.

Si dà la seguente definizione.

Definizione 2.4. *Si chiama permutazione di un insieme  $A$  di  $n$  elementi una disposizione semplice degli elementi, di classe  $n$ .*

Il numero  $V_n^n$  si indica con  $P_n$  e si ha

$$(2.5) \quad P_n = n!$$

<sup>1</sup>Qui, come del resto in tutto questo testo, abbiamo preferito usare, quando presente, la notazione UNI CEI ISO 80000-2:2013. In questo caso il simbolo  $V$  sta per “variazioni”. Un altro simbolo molto comune utilizza la lettera  $D$ , al posto di  $V$ .

Gli anagrammi di parole con lettere tutte distinte sono il più comune esempio di permutazioni. Naturalmente in questo problema si prescinde dal significato delle parole. Per esempio gli anagrammi di *cane* sono in numero di  $4! = 24$  e sono: *cane*, *caen*, *cean*, *cena*, *cnae*, *cnea*, *aecn*, *aenc*, *anec*, *ance*, *acne*, *acen*, *each*, *eanc*, *ecan*, *ecna*, *enac*, *enca*, *nace*, *naec*, *neac*, *neca*, *ncae*, *ncea*. Di questi solo quelli in corsivo hanno un significato nel vocabolario italiano.

### 2.3.2. Permutazioni fra elementi non tutti distinti

Se riprendiamo in considerazione gli anagrammi, sappiamo che hanno interesse anche quelli di parole formate da lettere non tutte distinte (come “mamma”). È chiaro che in questo caso il numero di anagrammi è notevolmente inferiore rispetto a quello di parole con lo stesso numero di lettere tutte distinte: per esempio nel citato caso di “mamma”, uno scambio tra le tre *m* o tra le due *a* non provoca cambiamenti nella parola. In questa e altre situazioni ha dunque interesse anche il calcolo del numero delle permutazioni, o allineamenti, su un insieme di oggetti non tutti distinti.

Consideriamo allora un allineamento di  $n$  oggetti, di cui  $n_1$  uguali ad un oggetto  $a_1$ ,  $n_2$  uguali ad un oggetto  $a_2$ , ...,  $n_k$  uguali ad un oggetto  $a_k$ , con  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ , e non essendo escluso che qualcuno degli  $n_i$  (o magari anche tutti) sia 1. La determinazione del possibile numero di allineamenti è immediata se si suppone inizialmente che gli oggetti siano tutti distinti, si calcola il numero delle loro possibili permutazioni (che sono in numero di  $n!$ ) e si tiene conto che le  $n_i!$  permutazioni degli oggetti uguali ad  $a_i$  non danno luogo a situazioni distinte. Questo numero si indica con il simbolo

$$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$$

e si ha

$$(2.6) \quad P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}.$$

Questa formula comprende la (2.5) come caso particolare: la (2.5) si ottiene dalla (2.6) ponendo tutti gli  $n_i$  uguali a 1.

Per esempio gli anagrammi della parola *mamma* sono *mamma*, *mmmaa*, *mmaam*, *mmama*, *mamam*, *ammaa*, *amamm*, *aammm*, *ammam*, *amamm*. Di questi solo l'originale ha un significato nel vocabolario italiano (del resto, come tutti sappiamo, “di mamma ce n'è una sola!”).

## 2.4. Combinazioni

“Combinare” significa prendere un certo numero di oggetti da un insieme, senza tenere conto dell'ordine con cui sono presi. Anche qui ha interesse sia il caso in cui sono consentite ripetizioni, sia quello in cui le ripetizioni non sono consentite.

Il terzo problema base del calcolo combinatorio è quello del computo del numero di sottoinsiemi di un dato insieme finito. È immediato che un sottoinsieme di  $k$  elementi, presi da un insieme di  $n$  elementi, può essere pensato come una collezione di  $k$  oggetti su un totale di  $n$ , in cui non conti l'ordine. Questo distingue il problema qui trattato da quello del calcolo delle disposizioni (semplici). Si dà in proposito la seguente definizione.

Definizione 2.5. Dato un insieme  $A$  di  $n$  elementi, un suo sottoinsieme contenente  $k$  ( $k \leq n$ ) elementi si chiama una combinazione semplice degli  $n$  elementi di classe  $k$  oppure a  $k$  a  $k$ .

Il numero delle combinazioni (semplici) di  $n$  elementi di classe  $k$  si indica con

$$C_n^k \quad \text{oppure con} \quad \binom{n}{k}.$$

È evidente che, se si considera una qualunque combinazione di  $n$  elementi di classe  $k$  e si permutano in tutti i modi possibili, cioè in  $k!$  modi, i suoi elementi, si ottengono le disposizioni di  $n$  elementi di classe  $k$ . Questo ci permette di concludere (tenendo presente, se  $n = k$ , che  $0! = 1$ ) che, per le combinazioni in oggetto, vale la formula (2.7).

$$(2.7) \quad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{V_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

I numeri  $C_n^k$  si chiamano anche, perché legati allo sviluppo della potenza di un binomio, *coefficienti binomiali*; tuttavia non avremo necessità di occuparci di questo problema. Se  $k = 0$  il numero dei possibili sottoinsiemi è 1 (solo l'insieme vuoto) e perciò si pone

$$(2.8) \quad \binom{n}{0} = 1,$$

in accordo con la formula (2.7).

Esempio 2.5. Dato  $A = \{a, b, c, d\}$ , le combinazioni semplici di classe 2 sono in numero di  $C_4^2 = 6$  e sono  $ab, ac, ad, bc, bd, cd$ .

Definizione 2.6. Dato un insieme  $A$  di  $n$  elementi, si chiama combinazione con ripetizione, di classe  $k$ , ogni gruppo di  $k$  elementi, anche non distinti, presi tra gli  $n$  elementi dell'insieme, nell'ipotesi che l'ordine sia ininfluenza.

Si può dimostrare che il numero di combinazioni con ripetizione di  $n$  elementi, di classe  $k$  è dato da

$$(2.9) \quad {}_R C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Esempio 2.6. Consideriamo un'urna contenente 4 palline, contrassegnate con le lettere  $a, b, c, d$ , e supponiamo di estrarre una pallina e, dopo averne segnato il contrassegno, di reimpastare la pallina ed effettuare una nuova estrazione. Le possibili estrazioni diverse in cui non si tenga conto dell'ordine di estrazione sono  $ab, ac, ad, bc, bd, cd, aa, bb, cc, dd$  e sono in numero di 10. Si ha infatti

$${}_R C_4^2 = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

## 2.5. Esercizi

Esercizio 2.1. *Quanti sono gli anagrammi della parola Battaia che comincino con la lettera “B”?*

*Risoluzione.* Basta pensare che delle sette caselle che compongono la parola *Battaia*, la prima è fissa; per le altre sei si tratta di calcolare il numero degli anagrammi di una parola di 6 lettere di cui 3 “a”, due “t” e una “i”, ovvero

$$P_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60.$$

La “i” compare una sola volta, si poteva anche trascurare il calcolo del numero delle sue ripetizioni ( $1! = 1$ ). □

Esercizio 2.2. *Quanti sono gli anagrammi della parola Battaia che abbiano le due “t” una di seguito all’altra?*

*Risoluzione.* Si può pensare al gruppo delle due “t” come un unico oggetto e calcolare gli anagrammi di una parola di 6 lettere, di cui 3 “a”, una “doppia t”, una “i” e una “b”, ovvero

$$P_6^{3,1,1,1} = \frac{6!}{3!1!1!1!} = 120. \quad \square$$

Esercizio 2.3. *Uno studente deve sostenere 7 esami per ognuno dei suoi tre anni di corso, senza poter rimandare esami all’anno successivo, ma nell’ordine da lui scelto. In quanti modi lo può fare?*

*Risoluzione.* Per ogni anno ha 7! possibilità di scelta dell’ordine in cui sostenere gli esami, dunque in totale ha

$$3 \cdot 7! = 15120.$$

Si noti come, anche in un problema apparentemente così elementare, ci siano moltissime possibilità di scelta. □

Esercizio 2.4. *In quanti modi un giocatore di bridge può ricevere le sue 13 carte dal mazzo di 52?*

*Risoluzione.* Si tratta delle combinazioni di 52 oggetti a 13 a 13 senza ripetizione:

$$C_{52}^{13} = \frac{52!}{13!39!} = 635013559600 > 635 \text{ miliardi.}$$

□

Esercizio 2.5. *In quanti modi un giocatore di bridge può ricevere le sue 13 carte in modo che siano tutte di valore diverso?*

*Risoluzione.* Poiché ci sono 4 possibilità per ciascun valore, in totale ci saranno

$$4^{13} = 67108864$$

modi. □

Esercizio 2.6. *Quante bandiere tricolori si possono formare con i sette colori fondamentali?*

*Risoluzione.* Questo problema, per come è formulato, richiede alcune precisazioni, in quanto non è chiaro per esempio se una bandiera con i colori bianco rosso e verde a strisce verticali o a strisce orizzontali siano da considerare diverse o no. Supporremo che le bandiere in esame siano a strisce verticali. Ma anche così rimane un dubbio: si deve tenere conto anche del verso nella disposizione dei colori? La bandiera italiana è a strisce verticali verde-bianco-rosso o rosso-bianco-verde? La cosa non è così ovvia, tanto che nelle regole di esposizione è prescritto che, “da sinistra a destra” l’ordine sia verde-bianco-rosso: per esempio se la bandiera è attaccata al pennone il verde deve stare vicino al pennone. Questo tipo di problemi si manifestano spesso in questioni che riguardano il calcolo combinatorio ed è proprio per avere modo di discuterne che abbiamo lasciato la formulazione dell’esercizio nella maniera, abbastanza ambigua, con cui di solito è proposto negli eserciziari. Avendo dunque deciso che le bandiere che ci interessano sono a strisce verticali di uguale grandezza e che conta anche il verso, il numero di bandiere tricolori coincide con le disposizioni semplici di 7 oggetti a 3 a 3:

$$V_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \quad \square$$

Esercizio 2.7. *Quanti numeri di tre cifre diverse si possono formare con le cifre 1, 2, 3, 4, 5, ma che comincino per 4?*

*Risoluzione.* La prima cifra deve essere 4, abbiamo quindi altre due caselline da riempire con le restanti 4 cifre, senza ripetizione:

$$V_4^2 = 12. \quad \square$$

Esercizio 2.8. *Quanti numeri di tre cifre si possono formare con le cifre pari (0, 2, 4, 6, 8), che non comincino per 0?*

*Risoluzione.* Possiamo osservare che al primo posto abbiamo 4 possibili scelte, negli altri due dobbiamo calcolare le disposizioni con ripetizione di 5 oggetti a 2 a 2; in totale

$$4 \cdot V_5^2 = 4 \cdot 20 = 80. \quad \square$$

Esercizio 2.9. *Quanti ambi e quante terne si possono formare avendo a disposizione 5 numeri distinti?*

*Risoluzione.* In questo caso non conta l’ordine quindi si tratta di un problema di combinazioni, senza ripetizione:

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = 10, \quad C_5^3 = \binom{5}{3} = 10. \quad \square$$

Esercizio 2.10. *Quante quaterne si possono formare con i 90 numeri del lotto, se uno dei numeri è prefissato?*

*Risoluzione.* Si tratta di calcolare le quaterne che si possono formare con 89 numeri, ovvero con i numeri restanti dopo aver tolto il numero che è prefissato. Poiché l’ordine non conta si ha

$$C_{89}^4 = \binom{89}{4} = \frac{89!}{85!4!} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdots 1}{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdots 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 2441626.$$

Si noti che abbiamo indicato esplicitamente i calcoli da eseguire con i fattoriali, in quanto le comuni calcolatrici tascabili (anche scientifiche) non accettano calcoli comprendenti fattoriali maggiori o uguali a 70!, in quanto 70! supera  $10^{100}$ , che è il massimo intero gestibile dalle comuni calcolatrici tascabili. Nessun problema invece se si esegue il calcolo con un software tipo Mathematica™ o Geogebra.  $\square$

Esercizio 2.11. *In quanti modi distinti si possono sistemare 6 persone in una fila di 10 poltrone?*

*Risoluzione.* Posso pensare agli anagrammi formati da 10 simboli: 6 simboli diversi (le 6 persone) e 4 simboli identici (le quattro sedie vuote). Si ottiene

$$P_{10}^{4,1,1,1,1,1} = \frac{10!}{4!} = 151200. \quad \square$$

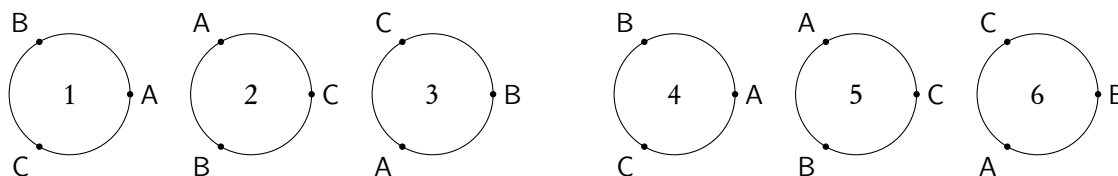
Esercizio 2.12. *Quante sono le cinquine del lotto che contengono una determinata terna?*

*Risoluzione.* Si tratta di calcolare gli ambi che si possono formare con 87 numeri, ovvero i 90 numeri del lotto meno i 3 numeri della terna prefissata.

$$C_{87}^2 = \binom{87}{2} = 3741. \quad \square$$

Esercizio 2.13. *In quanti modi si possono sedere 10 persone attorno a un tavolo tondo con 10 sedie?*

*Risoluzione.* Se il tavolo è tondo bisogna tenere conto che una rotazione delle persone non modifica la distribuzione. Esaminiamo per esempio la situazione in cui le persone che si devono sedere, indicate con A, B e C, siano solo 3, sempre su tre sedie.



È chiaro che le prime tre configurazioni si possono considerare identiche e così pure le ultime tre. Possiamo pensare di tenere fissa una delle tre persone e di far ruotare solo le altre due, ovvero invece di 3! permutazioni, ne restano solo 2!. In generale saranno  $(n - 1)!$ . In situazioni come questa si parla anche di *permutazioni circolari*. Nel caso del problema avremo dunque

$$(10 - 1)! = 9! = 362880$$

possibilità: sempre un bel numero! □

Esercizio 2.14. *In quanti modi si possono sedere, in una fila di 12 sedie, 3 italiani, 5 francesi e 4 tedeschi se quelli della stessa nazionalità devono sedere vicini?*

*Risoluzione.* Occorre prima permutare le tre nazionalità in  $3! = 6$  modi, e poi, all'interno di ciascuna nazionalità, permutare le persone in  $3!$ ,  $5!$  e  $4!$  modi rispettivamente.

$$3! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 103680. \quad \square$$

Esercizio 2.15. *In quanti modi si possono sedere, attorno a un tavolo tondo con 12 sedie, 3 italiani, 5 francesi e 4 tedeschi se quelli della stessa nazionalità devono sedere vicini?*



*Risoluzione.* Tenendo conto che per le tre nazionalità si tratta di una permutazione circolare (vedi l'esercizio 2.13) avremo, in analogia con l'esercizio 2.14,

$$2! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 4! = 34560. \quad \square$$

Esercizio 2.16. *Verificare che*

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2.$$

*Risoluzione.* Si ha

$$\begin{aligned} \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} + 2\frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n!}{(n-1) \cdot (n-2)!} + \frac{n!}{(n-2)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-2)!} \left( \frac{1}{n-1} + 1 \right) = \frac{n!}{(n-2)!} \frac{n}{n-1} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1)} \cdot \cancel{(n-2)!} \cdot n}{\cancel{(n-2)!} \cdot \cancel{(n-1)}} = n^2. \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 2.17. *In quanti modi si possono mischiare le 52 carte di un mazzo?*

*Risoluzione.* Anche in questo, come in altri problemi di combinatoria, andrebbe precisato meglio cosa si intende per “mazzi diversamente mischiati”. Per esempio se, una volta mischiato il mazzo, debbo distribuire le carte a 4 giocatori, 13 carte a testa e le distribuisco dando le prime 13 al primo giocatore e così via successivamente, è chiaro che una diversa permutazione delle prime 13 carte non conta, e così via per i successivi gruppi di 13. Noi qui supponiamo, più semplicemente che con “modi di mischiare le carte” si intenda diverse permutazioni delle 52 carte. In questo caso il risultato è semplice

$$P_{52} = 52! \simeq 8 \cdot 10^{67}.$$

Questo numero non è molto diverso dal numero stimato di atomi presenti nell'universo! Il problema dei mescolamenti<sup>(2)</sup> di carte non è assolutamente banale.  $\square$

Esercizio 2.18. *Verificare che*

$$P_6 = 12 \cdot V_5^3.$$

*Risoluzione.* Si tratta di un semplice calcolo. Si ha

$$P_6 = 6!, \quad 12 \cdot V_5^3 = 12 \frac{5!}{(5-3)!} = 12 \frac{5!}{2!} = 6 \cdot 5! = 6! \quad \square$$

<sup>2</sup>Chi è interessato può trovare informazioni su questo problema, oltre che in testi specialistici, in una tesi di laurea discussa alla Facoltà di Ingegneria dell'Università Tor Vergata di Roma nel 2013 e dal titolo *Come, quando e quanto un mazzo di carte è stato ben mischiato?*, laureando Benjamin Isac Fargion, relatore Prof. Benedetto Scoppola.



## 3. Introduzione alla probabilità

### 3.1. Incertezza e sua valutazione

Nel trattare la logica proposizionale abbiamo introdotto, vedi la definizione 1.1, il concetto di proposizione o enunciato come una affermazione che assume uno ed un solo valore di verità: vero o falso. Nello studio del calcolo delle probabilità dobbiamo invece trattare affermazioni delle quali non si sa se a priori se siano vere o false: ci troviamo di fronte a uno stato di conoscenza parziale e non completa del fenomeno in esame e possiamo solo pensare ad una valutazione che misuri il nostro grado di fiducia nel verificarsi o meno di un certo evento. Esempi tipici, alcuni dei quali già citati parlando di logica proposizionale, sono le frasi: “*Se lancio una moneta esce testa*”, “*Se lancio un dado esce il sei*”, “*Domani pioverà*”, “*Il primo nato a Pordenone nell’anno 2016 sarà un maschio*”, “*Alle prossime olimpiadi in Brasile l’Italia vincerà 10 medaglie*”. Parleremo anche di fenomeni *casuali* o *incerti*. Abitualmente si pensa a situazioni di incertezza solo per fenomeni futuri, in quanto è tipicamente per tali eventi che non si sa dire se sono veri o falsi. In realtà ciò che conta è solo la mancanza di informazioni su un evento: è sicuramente casuale il risultato del prossimo incontro di calcio tra la Roma e la Lazio, ma il fenomeno rimane casuale anche dopo che si è verificato, se non ne siamo venuti a conoscenza.

Prestare la massima attenzione a quanto abbiamo detto: l’evento è comunque un fatto che è vero o falso cioè è, in linea di principio una “proposizione” nel senso della logica proposizionale di cui abbiamo parlato, solo che noi non disponiamo dell’informazione adeguata per decidere sul valore di verità della stessa. In sostanza vogliamo studiare situazioni in cui l’informazione necessaria per valutare la verità o falsità di una proposizione non ci è nota, per un qualche motivo (evento che deve ancora accadere, evento già accaduto ma di cui non conosciamo l’esito).

Una osservazione importante sul ragionamento probabilistico: esso è, essenzialmente, un ragionamento induttivo e non deduttivo come la maggior parte delle “tradizionali” teorie matematiche, e questo risulterà evidente man mano che ci addenteremo nello studio. Per ora cerchiamo di far capire che cosa intendiamo con questa affermazione proponendo un esempio, preso da un testo di Romano Scozzafava [vedi 14]. Supponiamo di avere una scatola contenente dieci monete di cui nove normali, cioè con una faccia testa e una croce, e una truccata, cioè con due facce entrambe testa. Se estraiamo una moneta da questa scatola è del tutto ragionevole pensare, prima di effettuare l’estrazione, che la probabilità di estrarre quella truccata è  $1/10$ , anche senza avere ancora un’idea chiara di che cosa voglia dire probabilità. Se a posteriori controlliamo la moneta possiamo subito scoprire se si tratta o no di quella truccata. Supponiamo però di voler fare un ulteriore esperimento su questa moneta estratta, senza esaminarla: la lanciamo in aria sei volte e controlliamo quale faccia mostra la moneta una volta caduta sul pavimento. Se si ottiene sei volte testa è chiaro che dovremo ragionevolmente pensare che la probabilità che la moneta sia quella truccata è maggiore di  $1/10$ , anche se ancora non ne abbiamo la certezza<sup>(1)</sup>. E’ possibile

<sup>1</sup>Anche se può sembrare paradossale, potrebbe benissimo succedere che anche con centinaia di lanci l’esito sia sempre testa, senza che si possa avere la certezza che la moneta sia quella truccata.

calcolare questo “incremento di probabilità”. Qui osserviamo solo che questo modo di procedere è chiaramente induttivo: abbiamo migliorato le nostre conoscenze facendo degli esperimenti, ovvero abbiamo “appreso dall’esperienza”, come dice sempre Romano Scozzafava nel libro citato.

Prima di concludere questa introduzione al calcolo delle probabilità ci preme segnalare un fatto molto importante: lo studio del calcolo delle probabilità non porta *mai* ad eliminare l’incertezza, ma semplicemente a *gestire l’incertezza*. In molte situazioni se dovessimo attendere di avere l’informazione che ci manca prima del verificarsi di un evento, o perché sull’evento non abbiamo sufficienti conoscenze, non potremmo compiere alcuna azione.

Esempi classici sono quelli della valutazione sul tipo di guasto meccanico di un mezzo, oppure quello della diagnosi medica di una malattia: se un medico giudica che un paziente, sulla base dei sintomi descritti, potrebbe avere tre malattie diverse, valuterà la diversa probabilità di ciascuna e si muoverà di conseguenza. Naturalmente farà fare al paziente ulteriori test i cui risultati potranno modificare la valutazione precedente di probabilità. In ogni caso non rimane escluso il fatto che il paziente abbia la malattia che il medico ha giudicato la meno probabile, e non potremo addebitare al medico un errore di valutazione: se tutte e tre le malattie richiedessero l’assunzione di farmaci molto debilitanti, nessun dottore ci prescriverebbe l’assunzione contemporanea dei farmaci per le tre malattie, con il rischio che il cocktail di farmaci ci porti alla morte. Parimenti nessun medico aspetterebbe di avere la certezza assoluta sulla malattia, ancora una volta con il rischio di aggravamento e, magari, di impossibilità di cura.

### 3.2. Approccio classico e frequentista

Per iniziare l’argomento del calcolo delle probabilità cominciamo con il proporre una veloce trattazione dei due approcci più comuni al problema: l’approccio classico o combinatorio e l’approccio frequentista, segnalando fin da subito che la stragrande maggioranza dei casi concreti non si lascia inquadrare in nessuno dei due.

Per poter parlare di probabilità dobbiamo innanzitutto precisare che la probabilità si riferisce a un *evento*, concetto che ora introduciamo solo a livello intuitivo. Evento è “qualcosa che accade”, come risultato di un “esperimento” (e anche la parola esperimento ha un significato molto generico): il risultato del lancio di un dado, il fatto che una squadra vinca una partita, che il terzo estratto su una ruota del lotto in una certa data sia il 27, che la percentuale di polveri sottili nell’aria di Pordenone un determinato giorno superi o no il limite di legge, ecc. Sostanzialmente possiamo dire che *evento* è un concetto primitivo e che a noi interessa sapere che cosa si può fare con gli eventi. Torneremo un po’ più in dettaglio su questo concetto in seguito. Per ora ci interessa il fatto che la probabilità opera sugli eventi, associando a ogni evento di una certa famiglia un numero: potremo dire che la probabilità è una *funzione* a valori reali definita su una famiglia di eventi e scrivere  $P(E)$  se  $E$  è un evento e la funzione viene denominata, come è abitudine, con  $P$ . Una definizione rigorosa richiederà naturalmente una più precisa definizione di evento e una indagine su quali debbano essere le caratteristiche di questa funzione.

Esaminiamo ora un po’ più da vicino l’esperimento del lancio di un dado (non truccato). In questo caso possiamo concordare abbastanza facilmente sul fatto di chiamare evento “semplice” o “elementare” l’uscita di un numero compreso tra 1 e 6, ovvero il possibile risultato di un lancio; potremo poi chiamare evento anche, per esempio, l’uscita di un numero pari, o di un numero dispari, o di un numero appartenente all’insieme  $\{2, 5\}$ . In sostanza potremo considerare l’insieme dei numeri da 1 a 6 come l’insieme dei casi possibili e chiamare evento un qualunque suo sottoinsieme, contenente  $h$  di questi 6

numeri. In questo caso i diversi casi possibili sono a due a due *incompatibili*, nel senso che se si presenta uno di essi è escluso che si possa presentare uno qualunque degli altri. Potremo anche ritenere, se il dado non è truccato, che tutti questi casi siano *equiprobabili*, nel senso intuitivo<sup>(2)</sup> del termine. Il fatto che tutti i casi possibili siano equiprobabili ci fa ritenere abbastanza logico che la probabilità di ciascuno sia  $1/6$  e che quindi la probabilità di un generico evento  $E$  sia data da  $h/6$ , dove  $h$  è il numero di casi possibili che costituiscono  $E$ .

Il numero di tutti i casi possibili varia a seconda dell'esperimento: è 2 nel caso del lancio di una moneta (Testa o Croce), 90 in un'estrazione al gioco del lotto. Detto  $n$  il numero dei casi possibili (che riteniamo equiprobabili e a due a due incompatibili) e  $h$  il numero degli elementi che costituiscono un evento  $E$  (casi favorevoli), potremo dire che la probabilità di  $E$  può essere *valutata* dal seguente numero:

$$(3.1) \quad P(E) = \frac{h}{n}.$$

Abbiamo volutamente usato la parola *valutata*, in quanto non può trattarsi di una definizione di probabilità: questo schema non si applica sicuramente a tutti i casi di interesse e poi richiede il concetto di equiprobabilità che, a questo punto, non può essere definito senza ambiguità e deve essere solo accettato a livello intuitivo.

Questo approccio<sup>(3)</sup> alla probabilità si chiama *approccio combinatorio* o *classico* e si usa brevemente richiamare parlando di rapporto fra i casi favorevoli e i casi possibili di un evento.

È chiaro che l'ipotesi di equiprobabilità non sarà sempre soddisfatta: un esempio elementare è il lancio di una puntina da disegno. Qui ci sono due casi possibili, come nel lancio di una moneta, ovvero la puntina cade con la "punta in su" o con la "punta in giù", ma i due casi non sono equiprobabili e anzi potremo avere risultati diversi a seconda del tipo di puntina in esame.

**Esempio 3.1.** Consideriamo il lancio contemporaneo di due dadi non truccati. Si chiede di valutare la probabilità che la somma delle due facce sia 5.

È abbastanza facile rendersi conto che il numero dei casi possibili in questo esperimento è 36, corrispondente a quante sono le coppie ordinate che si costruiscono con i numeri da 1 a 6. La somma 5 si ottiene con le coppie (1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2), cioè i casi favorevoli sono 4. La probabilità richiesta è dunque

$$P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

Si noti che, sulla base della formula (3.1), il numero  $P(E)$  è sicuramente un numero reale che soddisfa la condizione

$$(3.2) \quad 0 \leq P(E) \leq 1.$$

Tra tutti gli eventi relativi ad un certo esperimento ce ne interessano in particolare due, l'evento *certo* e l'evento *impossibile*. Il primo si ha quando i casi favorevoli coincidono con i casi possibili, il secondo

<sup>2</sup>Si noti che non abbiamo ancora definito che cosa sia la probabilità, e quindi parlare, a questo punto, di equiprobabilità sarebbe, a rigore, scorretto: è per questo che il concetto di equiprobabilità è introdotto solo a livello intuitivo.

<sup>3</sup>Questa "definizione" di probabilità è dovuta a Pierre Simon Laplace (1749-1827), grande fisico matematico francese del periodo napoleonico. Autore tra l'altro dell'importantissimo trattato *Mécanique Céleste*, che pose i fondamenti dei moderni studi di meccanica. Per quanto riguarda la probabilità il suo contributo principale è l'*Essai philosophique sur les probabilités*, dove si ritrova formalmente la definizione classica di probabilità.

quando non si ha alcun caso favorevole. Essi si indicano tradizionalmente con  $\Omega$  e con  $\emptyset$ . In particolare il secondo simbolo è lo stesso usato per l'insieme vuoto e sta proprio a significare che ci sono 0 casi favorevoli.

Esempio 3.2. Nel lancio di un dado la frase “esce un numero compreso tra 1 e 6” esprime l'evento certo, la frase “esce il numero 7” esprime l'evento impossibile. Si noti che l'evento certo può essere espresso anche da molte altre frasi, come per esempio “esce un numero minore di 10”, e ciò vale anche per l'evento impossibile, espresso per esempio anche dalla frase “esce un numero irrazionale”.

Per un classico esempio preso dal gioco del lotto, la frase “esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è maggiore di 10” esprime l'evento certo, la frase “esce una cinquina tale che la somma dei suoi numeri è minore di 15” esprime l'evento impossibile.

Si noti che davanti a “evento certo” e “evento impossibile” abbiamo usato l'articolo determinativo: per ogni esperimento possiamo ritenere che ci sia un solo evento certo e un solo evento impossibile (come già per l'unicità dell'insieme vuoto nella teoria degli insiemi): anche se l'evento certo e l'evento impossibile, come ogni evento, possono essere espressi da più proposizioni, sia l'evento certo che l'evento impossibile sono unici.

Per concludere questa sommaria trattazione dell'approccio classico alla probabilità facciamo alcune osservazioni riassuntive che ci saranno utili in seguito.

In tutti gli esempi che possiamo considerare facciamo un “esperimento” (lancio di una moneta, lancio di un dado, estrazione dei numeri al lotto, ecc.) che può presentare diversi esiti.

- Nel lancio di una moneta si possono avere due esiti, che possiamo chiamare T (Testa) o C (Croce), ovvero gli esiti costituiscono un insieme di cardinalità 2:  $\{T, C\}$ .
- Nel lancio contemporaneo di due monete l'insieme degli esiti ha cardinalità 4:  $\{TT, TC, CT, CC\}$ .
- Nel caso del lancio di un dado l'insieme degli esiti ha cardinalità 6:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .
- Nel caso dell'estrazione dei numeri al lotto l'insieme degli esiti ha cardinalità 90, tanti quanti sono i possibili estratti.

Possiamo chiamare questi insiemi *spazi campionari* o *spazi dei risultati*. In casi come questi possiamo dire che gli eventi non sono in realtà che sottoinsiemi di questi spazi campionari: l'evento “testa o croce” nel lancio simultaneo di due monete è il sottoinsieme  $\{TC, CT\}$  dell'insieme sopra descritto. La valutazione di probabilità che abbiamo dato con la formula (3.1) può essere riscritta dicendo che  $P(E)$  è il rapporto tra la cardinalità dell'insieme che rappresenta l'evento  $E$  e la cardinalità dello spazio campionario. Lo spazio campionario stesso è l'evento certo, il suo sottoinsieme vuoto è l'evento impossibile. Gli elementi dello spazio dei campioni, cioè gli esiti possibili dell'esperimento, sono essi stessi degli eventi, che possiamo chiamare *eventi elementari*.

Cambiamo ora le carte in tavola e consideriamo un esperimento in cui l'approccio combinatorio della probabilità non ci porta da nessuna parte, ovvero in sostanza non ci permette di valutare la probabilità di un evento a partire dallo spazio campionario e dal sottoinsieme che individua l'evento stesso nello spazio campionario. Precisamente esaminiamo l'esperimento di lancio di una puntina da disegno, considerando la possibilità che una volta giunta al suolo la puntina si presenti “a punta in su” o “a punta in giù”. Se ripetessimo quanto già detto con il lancio di una moneta dovremmo concludere che, essendo due i casi possibili (che chiameremo, per semplicità  $G=Giù$  e  $S=Su$ ), sia il caso G che il caso S dovrebbero avere una probabilità di  $1/2$  (un caso favorevole su due possibili), ma nessuno di noi sarebbe disposto a

scommettere su questo: il “grado di fiducia” sull’uscita di G è sicuramente diverso da quello sull’uscita di S. Come potremmo, in un caso come questo, riuscire a *valutare* la probabilità che in un lancio della puntina esca il caso G o il caso S? In genere in una situazione come questa si procede ad effettuare un numero di prove *abbastanza grande*<sup>(4)</sup>, supponiamo 1000. Se in queste è uscito, supponiamo, 600 volte il caso G e 400 volte il caso S, potremo ragionevolmente assumere come probabilità che in un nuovo lancio la probabilità di G sia 600/1000, ovvero 3/5, mentre la probabilità di S sia 400/1000, ovvero 2/5.

Si noti una profonda differenza con il caso combinatorio: non stiamo più contemplando *a priori* un insieme di casi possibili e di casi favorevoli, calcolando la cardinalità di due insiemi, ma stiamo facendo una serie di prove ripetute, per giungere, *a posteriori*, a una valutazione di probabilità. Naturalmente le 1000 prove che abbiamo effettuato devono essere fatte in *identiche condizioni*: si dice che le prove devono essere *ripetibili*.

Se, facendo un certo esperimento, stiamo esaminando uno dei possibili esiti di quell’esperimento o un evento (insieme di esiti) ed eseguiamo delle prove ripetute diremo che abbiamo avuto un *successo* se si è ottenuto quell’esito o quell’evento, un *insuccesso* nel caso contrario.

Con questa nomenclatura, potremo dire che in una situazione in cui abbiamo fatto una successione di  $n$  prove ripetibili, o analoghe, di un esperimento, e se abbiamo ottenuto  $k$  successi per un esito o per un evento, la probabilità che un nuovo evento  $E$  dello stesso tipo sia anche lui un successo è valutata dal numero

$$(3.3) \quad P(E) = \frac{k}{n},$$

ovvero è data dal numero di successi sul numero totale di prove effettuate. Chiameremo questo numero *frequenza relativa*.

Per essere più precisi, in questa definizione occorrerebbe fare il limite di questo rapporto, quando il numero di prove tende all’infinito: nella pratica ci accontentiamo di un numero di prove “molto grande”, espressione che accettiamo come intuitivamente evidente.

Questo tipo di valutazione della probabilità si chiama *approccio frequentista* o *statistico* e si usa richiamare parlando brevemente di rapporto tra successi e totale delle prove.

Alcune situazioni tipiche in cui si può usare questo approccio sono le seguenti.

- Se in un’urna ci sono 20 palline, di cui un certo numero non noto sono bianche e le restanti nere, per valutare la probabilità che estraendo una pallina essa sia bianca (*bianca* è il successo), possiamo fare un centinaio di estrazioni (con reimmissione della pallina estratta nell’urna) e contare il numero di successi, valutando poi la probabilità di successo con la (3.3).
- Se vogliamo valutare la probabilità che il primo nato a Pordenone il 1 gennaio 2016 sia un maschio (*maschio* è il successo), possiamo consultare i registri comunali delle nascite, contare il numero di successi su un totale, per esempio, di 1000 nascite e usare ancora la (3.3).

Dunque condizione indispensabile perché questo approccio si possa usare è che si possano eseguire quante prove si vogliano su un evento, o che siano disponibili tavole statistiche relative ad un certo fenomeno. Importanti applicazioni si hanno in medicina, in psicologia, in economia, nella meccanica quantistica, e in generale in tutte le scienze nelle quali si possono utilizzare metodi statistici.

<sup>4</sup>E, in questa fase, non precisiamo che cosa voglia dire “abbastanza grande”.

Notiamo che anche in questo caso si può parlare di evento certo e evento impossibile, con le stesse parole e le stesse proprietà già viste nel caso combinatorio. Inoltre anche in questo caso vale la (3.2), cioè la probabilità è un numero compreso tra 0 ed 1 (0 solo per l'evento impossibile, 1 solo per l'evento certo).

### 3.3. Approccio soggettivo

Esaminiamo ora alcuni problemi in cui si richiede di calcolare una probabilità, valutando l'applicabilità dei due approcci proposti.

- Qual è la probabilità per un dato studente del corso ISIA di superare l'esame di matematica al prossimo appello?
- Qual è la probabilità che domenica prossima la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma?
- Qual è la probabilità che un nuovo modello di moto abbia successo?

Risulta immediatamente evidente che l'approccio classico non è applicabile. Nel primo caso infatti ci porterebbe a concludere che la probabilità è  $1/2$  (1 caso favorevole su 2 casi possibili), cosa che non tiene assolutamente conto di altri fattori, come per esempio il livello di preparazione dello studente stesso. Parimenti non è applicabile il metodo frequentista: non ha nessun senso far ripetere allo studente molte volte lo stesso esame per vedere qual è la probabilità di superamento (anche perché, appena superato l'esame lo studente si guarderebbe bene dal ripeterlo solo per fare una valutazione di probabilità!). Discorsi analoghi si possono fare negli altri due casi.

In casi come questi è abbastanza logico (e lo si fa intuitivamente senza pensarci) *stimare* la probabilità in base allo stato d'informazione che si possiede del problema in esame. Ebbene si può assumere proprio questa idea come definizione, per ora solo qualitativa, di probabilità.

**Definizione 3.1.** *La probabilità di un evento è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente, in base alle proprie opinioni e alle informazioni di cui dispone, attribuisce al verificarsi dell'evento.*

È chiaro che questa stima è sostanzialmente *soggettiva* in quanto sia le opinioni che le informazioni possedute possono differire grandemente da individuo a individuo. Per questo motivo questo approccio alla probabilità si chiama approccio *soggettivo* o *soggettivista*. È importante segnalare fin da subito che l'aggettivo "soggettivo" non deve far pensare alla totale arbitrarietà nella valutazione della probabilità di un evento, come vedremo tra poco: è per questo che, nella definizione 3.1, si fa riferimento a un individuo *coerente*.

È opportuna una ulteriore precisazione sull'aggettivo *soggettivo* che abbiamo utilizzato (e che, formalmente, è il contrario di *oggettivo*). Con il termine "soggettivo" intendiamo innanzitutto sottolineare il fatto che la valutazione di probabilità è fatta dall'individuo (il soggetto che esprime la valutazione) e non è propria dell'"oggetto", cioè dell'evento che stiamo esaminando. Per esempio lanciando un dado non truccato il soggetto valuta ad  $1/6$  la probabilità di uscita del 5; la probabilità di questo evento rimane sempre di  $1/6$  se, dopo il lancio, copriamo con un panno il dado senza potere vedere l'esito dello stesso: il numero  $1/6$  dipende dal soggetto che valuta, non dall'oggetto della valutazione (la faccia del dado che uscirà o che è uscita).



Storicamente poi l'aggettivo *soggettivo* è stato applicato all'approccio alla probabilità che stiamo ora introducendo: tuttavia, in termini formali, anche gli approcci combinatorio e frequentista, sono *soggettivi* e anzi, come avremo modo di rimarcare, possono essere considerati casi particolari di questo. Sarebbe meglio usare, per questo approccio alla probabilità, un denominazione come *probabilità generalizzata*; tuttavia, in omaggio alla tradizione, continueremo ad usare la denominazione *probabilità soggettiva*.

Cerchiamo ora di formalizzare in termini quantitativi o operativi la definizione precedente. Che cosa significa che io stimo all'80% la probabilità che la mia squadra favorita vinca la partita di calcio in programma domenica prossima? L'idea base, dovuta a Bruno de Finetti (1906-1985), è basata sul concetto di scommessa (scommessa ipotetica naturalmente): stimare una probabilità dell'80% significa essere disposti a pagare 80 (euro, dollari, sterline, ecc.) per ricevere 100 nel caso la squadra vinca, ovvero in caso di esito positivo dell'evento, o anche, equivalentemente, essere disposti a pagare una quota  $p = 0.8$  per ricevere una somma 1 in caso di esito positivo dell'evento. Possiamo riformulare la definizione precedente nel seguente modo.

*Definizione 3.2. La probabilità di un evento  $E$  è la somma  $p$  che un individuo coerente ritiene corretto pagare per ricevere la somma 1 al verificarsi dell'evento.*

### 3.4. Eventi e probabilità

Una definizione di *evento* che ben riassume i vari casi considerati su può formulare come segue.

*Definizione 3.3. Un evento è una proposizione ben definita, ovvero non ambigua, che può risultare vera o falsa, senza che sia possibile stabilire a priori quale delle due situazioni si verifica, ovvero in cui è presente incertezza su quale sia il valore di verità.*

Nella sostanza il concetto di evento può essere considerato come un concetto primitivo: quello che conta è che l'evento può risultare vero o falso. È una situazione simile a quella del concetto di insieme: quello che conta è poter stabilire se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Chiameremo *indicatore di un evento  $E$* , e lo indicheremo con  $|E|$  il numero 1 se  $E$  è vero, il numero 0 se  $E$  è falso:

$$(3.4) \quad |E| = \begin{cases} 1, & \text{se } E \text{ è vero;} \\ 0, & \text{se } E \text{ è falso,} \end{cases}$$

non essendo noto a priori quale dei due valori  $|E|$  assume.

Attenzione: il simbolo usato per l'indicatore di un evento è identico a quello del valore assoluto di un numero, anche se qui il valore assoluto non centra per nulla!

Esempi.

- Se lancio una moneta esce testa.
- Estraendo due palline da un'urna contenente palline bianche e nere, escono due palline nere.
- Il prossimo nato a Pordenone sarà una femmina.
- Il candidato X vince le prossime elezioni a sindaco di Pordenone.
- La nuova vettura prodotta da FCA sarà un successo commerciale.
- Il logo che un dato studio di design ha prodotto per un'azienda sarà effettivamente adottato dal committente.

- Il risultato dell'ultima partita di calcio giocata tra due squadre  $A$  e  $B$  dello stato di Mirabilandia è stato 3 a 0 a favore di  $A$ .

Come casi limite di evento, si chiama evento *certo* un evento il cui indicatore è solamente 1, evento *impossibile* un evento il cui indicatore è solamente 0. Nella pratica, anche con riferimento agli esempi considerati, possiamo pensare agli eventi come sottoinsiemi dell'evento "universale" o evento certo, che indichiamo con  $\Omega$ , come già detto. Useremo tutta la simbologia già usata per gli insiemi, in particolare quella basata sui diagrammi di Venn.

Potremo parlare di "evento  $A$  contenuto nell'evento  $B$ ", intendendo che la verità di  $A$  implica la verità di  $B$ . Per esempio in un lancio di dadi l'evento "Esce il 2" implica l'evento "Esce un numero pari". Si scrive  $A \subseteq B$ , o, se  $A$  è sicuramente diverso da  $B$ ,  $A \subset B$ .

Analogamente potremo parlare di unione o intersezione di eventi, di evento contrario (o complementare), e così via.

La probabilità, come già accennato, è una funzione definita sugli eventi e a valori nell'insieme dei numeri reali: nel caso combinatorio la si può costruire con calcoli basati sui casi favorevoli e casi possibili, nel caso frequentista facendo molte prove ripetute di uno stesso esperimento, in casi più complessi tenendo conto di tutte le possibili informazioni che l'individua che valuta la probabilità possiede. Perché la probabilità sia coerentemente definita occorre che siano verificate le seguenti proprietà:

$$(3.5) \quad 0 \leq P(E) \leq 1, \quad \forall E \in \mathcal{F}.$$

$$(3.6) \quad P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0.$$

$$(3.7) \quad P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = P(E_1) + \dots + P(E_n), \text{ se } E_1, \dots, E_n \text{ sono a due a due incompatibili.}$$

Le prime due proprietà le abbiamo già viste nell'approccio combinatorio e frequentista, la terza può essere dedotta dal principio di coerenza e comunque noi la assumiamo.

Una immediata conseguenza del teorema delle probabilità totali si ha nel caso di eventi che costituiscono una partizione dell'evento certo, cosa che succede in molti casi di interesse. In questo caso gli eventi  $E_i$ , oltre ad essere a due a due incompatibili (e ciascuno diverso dall'evento impossibile) godono anche della proprietà che la loro unione è l'evento certo, con probabilità 1. Si conclude subito con il seguente teorema.

**Teorema 3.4** (probabilità in una partizione dell'evento certo). *Se un insieme di eventi  $E_i$  costituisce una partizione dell'evento certo  $\Omega$  si ha*

$$(3.8) \quad P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = 1.$$

### 3.5. Valutazione della coerenza nelle assegnazioni di probabilità

Abbiamo detto che una assegnazione coerente di probabilità su una famiglia  $\mathcal{F}$  di eventi deve soddisfare le regole espresse dalle (3.5), (3.6) e (3.7). In particolare la più stringente di queste condizioni è la terza, ovvero la proprietà additiva della probabilità per eventi incompatibili. Tuttavia nella maggior parte dei casi noi non ci troviamo in situazioni in cui siamo ricondotti a trattare solo eventi incompatibili e dobbiamo comunque valutare la coerenza delle assegnazioni di probabilità che possiamo dare a ciascun evento sulla base delle informazioni in nostro possesso (e, naturalmente, della nostra valutazione su queste informazioni). Vediamo qualche esempio concreto per capire la situazione.

Esempio 3.3. In un lancio di dadi consideriamo gli eventi “ $A =$  esce un numero dispari” e “ $B =$  esce un numero pari”. Se non sappiamo che il dado è truccato, possiamo metterci a valutare le probabilità di ciascuno degli eventi esaminando, per esempio, un gran numero di lanci. Se giungiamo alla conclusione che ciascuno dei due eventi ha probabilità di 0.6, possiamo subito affermare che si tratta di una conclusione incoerente, in quanto  $0.6 + 0.6 = 1.2 > 1$  e questo è in contrasto con il teorema delle probabilità totali, che si può leggere anche, brevemente, dicendo che la somma delle probabilità di eventi incompatibili deve essere essa stessa una probabilità, cioè deve essere non superiore a 1.

Esempio 3.4. Riprendendo in esame l’esempio precedente, se riconsideriamo l’evento “ $A =$  esce un numero dispari” e modifichiamo l’evento  $B$  in “esce un multiplo di 3”, allora l’assegnazione di probabilità 0.6 a ciascuno dei 2 eventi non è, di per sè, incoerente: possiamo solo, in questo momento, concludere che non abbiamo implementato un metodo per valutarne la coerenza.

Per risolvere problemi come quello proposto nell’esempio 3.4, riprendiamo in esame il concetto di partizione di un insieme costruita mediante i costituenti relativi ad un certo numero di sottoinsiemi dati. Poiché abbiamo, nella sostanza, identificato gli eventi con sottoinsiemi dell’evento certo  $\Omega$ , tutto quanto detto a proposito degli insiemi vale, con le stesse parole, per gli eventi. Se, dati  $n$  eventi  $E_1, E_2, \dots, E_n$ , riusciamo ad assegnare la probabilità, rispettando le ormai note regole, ai singoli costituenti, è chiaro che, usando il teorema delle probabilità totali riusciremo anche ad assegnare la probabilità, in maniera coerente, ai casi di nostro interesse.

Riesaminiamo, alla luce di questa osservazione, l’esempio 3.4. Tenendo conto che  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , troviamo che  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{3, 6\}$ .

1.  $I_1 = A \cap B = \{3\}$ ;
2.  $I_2 = A \cap B^c = \{1, 5\}$ ;
3.  $I_3 = A^c \cap B = \{6\}$ ;
4.  $I_4 = A^c \cap B^c = \{2, 4\}$ .

Se assegnamo

$$P(I_1) = 0.4, \quad P(I_2) = 0.2, \quad P(I_3) = 0.2, \quad P(I_4) = 0.2,$$

otteniamo

$$P(A) = P(I_1 \cup I_2) = 0.4 + 0.2 = 0.6, \quad P(B) = P(I_1 \cup I_3) = 0.4 + 0.2 = 0.6,$$

concludendo che la scelta era perfettamente legittima. Notiamo che una assegnazione di probabilità di questo tipo non è assolutamente spropositata. Essa può per esempio corrispondere ad un dado truccato in modo tale che la faccia 3 compaia il 40% delle volte, la faccia 6 il 20% e le altre 4 facce il 10%: per ottenere<sup>(5)</sup> questo basta mettere pesetti opportuni dietro le facce con il 3 e con il 6.

Anche se questo metodo non è+ generalmente applicabile nella semplice maniera qui descritta, è sempre possibile valutare matematicamente se una certa assegnazione di probabilità è o no coerente e questo consente di fare previsioni in tutti i casi di interesse

### 3.6. Due esempi apparentemente paradossali

Per chiudere questa brevissima introduzione al calcolo delle probabilità, proponiamo due esempi che mostrano come spesso il calcolo delle probabilità può dare risultati in contrasto con l’opinione comune.

<sup>5</sup>Naturalmente questo esempio non vuole essere un incentivo a truccare i dadi in un eventuale gioco!

## 3.6.1. Il problema del compleanno

Il problema si può così formulare: *In una classe di  $n$  studenti, di cui nessuno nato il 29 febbraio, qual è la probabilità che due studenti siano nati lo stesso giorno dell'anno?*

Supponiamo naturalmente che  $n \leq 365$ , altrimenti la risposta è certamente 1. Indichiamo con  $p_n$  la probabilità cercata e calcoliamola usando il calcolo combinatorio. In questo, come in molti altri problemi di probabilità, è più agevole calcolare la probabilità contraria, ovvero la probabilità che non ci siano due studenti nati lo stesso giorno.

Cominciamo a considerare il caso di  $n = 2$ : ci sono 365 giorni in cui può essere nato il primo studente e 364 giorni diversi in cui può essere nato il secondo. In totale ci sono  $365^2$  coppie di giorni e dunque la probabilità contraria risulta (casi favorevoli su casi possibili)

$$\frac{365 \times 364}{365^2} = \frac{364}{365} = \frac{364 \cdot 363!}{365 \cdot 363!} = \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!} \Rightarrow p_2 = 1 - \frac{364!}{365^{2-1} \cdot (365-2)!}.$$

Con  $n = 3$  si ha, in modo sostanzialmente identico,

$$\frac{365 \times 364 \times 363}{365^3} = \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!} \Rightarrow p_3 = 1 - \frac{364!}{365^{3-1} \cdot (365-3)!}.$$

In generale avremo

$$p_n = 1 - \frac{364!}{365^{n-1} \cdot (365-n)!}.$$

Usando un software di calcolo (potente, perché deve trattare fattoriali molto grandi!) si può provare a fare il calcolo con diversi valori di  $n$ . Si ottiene quanto segue.

$n$	$p_n$	$n$	$p_n$
2	0.00274	19	0.37912
3	0.00820	20	0.41144
4	0.01636	21	0.44369
5	0.02714	22	0.47570
6	0.04046	23	0.50730
7	0.05624	24	0.53834
8	0.07434	25	0.56870
9	0.09462	26	0.59824
10	0.11695	27	0.62686
11	0.14114	28	0.65446
12	0.16702	29	0.68097
13	0.19441	30	0.70632
14	0.22310	40	0.89123
15	0.25290	50	0.97037
16	0.28360	60	0.99412
17	0.31501	70	0.99916
18	0.34691	80	0.99991

Come si può notare, già con una classe di 23 studenti si supera il 50% di probabilità, con 80 si ha la quasi certezza. Qualche esempio concreto può verificare la bontà statistica di questo calcolo.

- Nella squadra del Brasile ai mondiali 2014 Jose' Paulo Bezerra Junior Paulinho e Givanildo Vieira de Souza, noto come Hulk, sono entrambi nati il 25/07, proprio su 23 convocati.
- Nella squadra della Sud Corea ai mondiali 2014, Kwak Tae-Hwi e Son Heung-Min sono nati entrambi l'8 luglio, ancora su 23 convocati.
- Nella squadra dell'Argentina ai mondiali 2014, Fernando Rubén Gago e Augusto Matías Fernández sono nati entrambi il 10 aprile, inoltre Sergio Germán Romero e Enzo Nicolás Pérez sono nati entrambi il 22 febbraio, ancora una volta su 23 convocati.

### 3.6.2. Il paradosso del secondo figlio

Il quesito, proposto nella sua formulazione iniziale da Martin Gardner su *Scientific American*, è: *Il signor Smith ha due bambini. Almeno uno dei due è un maschio. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi?*

Intuitivamente la risposta sembra essere la seguente: se, poniamo, il primo bambino è maschio, la probabilità che anche il secondo lo sia è del 50%.

Il fatto è che, come lo stesso Gardner riconobbe, la domanda è posta in modo ambiguo: è facile pensare che con “almeno uno” si intenda “sicuramente uno che ho chiaramente individuato, ed eventualmente anche l'altro”. Una possibile riformulazione equivalente, meno ambigua, è la seguente: “Il signor Smith ha due bambini. Non sono due femmine. Qual è la probabilità che entrambi i bambini siano maschi”? Con questa formulazione si capisce subito che la probabilità è  $1/3$ , ovvero il 33.3%. Infatti i casi possibili sono  $MM$ ,  $MF$ ,  $FM$ , di cui è favorevole solo il caso  $MM$ .

Questo problema è stato proposto, con una leggera variante, anche nel tema d'esame di maturità scientifica del giugno 2010, [vedi 3], suscitando numerose discussioni sulla stampa specializzata e sui siti web, dove molti autori hanno proposto proprio la soluzione del 50% che abbiamo indicato all'inizio.

Attenzione dunque a controllare bene la formulazione di un problema di probabilità!

## 3.7. Cenno all'inferenza probabilistica

La forma di ragionamento<sup>(6)</sup> valida nella cosiddetta *logica del certo*, ovvero la logica propriamente detta, è quella del *ragionamento deduttivo*. In sostanza con il ragionamento non si può giungere a conclusioni certe, se non provando che sono contenute in fatti già noti: il particolare deve discendere dal generale. Almeno in linea di principio in questo modo non si può giungere ad ampliare effettivamente il campo delle conoscenze: è solo possibile esplicitare qualche proprietà già implicitamente acquisita, ma non ancora evidente. In una teoria matematica, per esempio, tutti i teoremi dimostrati non sono altro che esplicitazione di proprietà già contenute negli assiomi. Il *ragionamento induttivo*, invece, basato sulla *logica dell'incerto*, ovvero sul Calcolo delle probabilità, permette di ampliare realmente le conoscenze e di raggiungere conclusioni generali, ma incerte, a partire da osservazioni particolari.

Un esempio, banale, per illustrare la differenza tra i due tipi di ragionamento potrebbe essere il seguente.

### *Ragionamento deduttivo*

<sup>6</sup>Alcuni dei concetti esposti in questo paragrafo sono desunti dal paragrafo 10.1 di [12].

1. Nella pasticceria XX i dolci venduti sono tutti ottimi.
2. Sono andato a comprare dolci nella pasticceria XX.

Quindi

3. Ho comprato dolci ottimi.

*Ragionamento induttivo*

1. Mercoledì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
2. Giovedì scorso nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
3. Ieri, venerdì, nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.
4. Oggi nella pasticceria XX ho comprato dolci ottimi.

Quindi

5. Domani, quando andrò nella pasticceria XX mi venderanno dolci ottimi.

È chiaro che la prima conclusione è *certa*, date le premesse, la seconda è *incerta*: c'è una probabilità che sia vera, alta secondo il grado di fiducia che posso avere acquisito in base alla mia esperienza, ma non uguale a uno. Inoltre, se per caso oggi mi servissero dolci scadenti il mio grado di fiducia e quindi la mia valutazione di probabilità sulla “bontà dei dolci”, cambierebbe sicuramente.

Proponiamo un secondo esempio, preso dalla geometria, la “regina” delle teorie deduttive: “la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto”.

Nella geometria di Euclide si ragiona sostanzialmente nel modo seguente: introduco i concetti di punto, retta, piano, ipotizzando che tra di essi valgano certe relazioni (assiomi). A questo punto posso *definire* un triangolo e, solo sulla base di quelle relazioni e senza riferimento ad alcuna situazione concreta, posso concludere che la somma degli angoli interni deve essere un angolo piatto. In sostanza il fatto che la somma degli angoli interni sia un angolo piatto è già contenuta negli assiomi, solo che la cosa non era esplicitamente evidenziata.

Un ragionamento induttivo potrebbe invece essere il seguente. Consideriamo un triangolo equilatero e utilizziamo piastrelle con questa forma per ricoprire un pavimento, costruendo con esse esagoni regolari (un classico ed elementare problema di tassellazione): siccome occorrono sei mattonelle triangolari per coprire un angolo giro, ciascuno degli angoli al centro deve essere un sesto dell'angolo giro: se ne deduce che la somma dei tre angoli del triangolo deve essere tre sestimi di angolo giro, cioè un angolo piatto. Si veda la figura 3.1.

In modo analogo si può ragionare su un triangolo rettangolo (che è la metà di un rettangolo, in cui la somma degli angoli è banalmente quattro retti) o in un triangolo isoscele (basta dividerlo a metà in due triangoli rettangoli mediante l'altezza e poi togliere l'angolo piatto che si viene a formare a destra e sinistra dell'altezza): si veda la figura 3.2. Procedendo su questa strada si può anche considerare un triangolo qualunque, dividendolo in due triangoli rettangoli mediante una delle altezze che è sicuramente interna al triangolo stesso, ma è chiaro che si tratta di un procedimento basato su considerazioni visive di triangoli che possono cadere sotto la nostra esperienza sensibile.

Se seguiamo questo procedimento induttivo e consideriamo un triangolo enorme che abbia come vertici, per esempio, tre stelle fisse, non potremo avere alcuna certezza sul fatto che la somma degli angoli interni sia ancora un angolo piatto, e potremo solo attribuire a questo fatto una probabilità che misuri, come al solito, il nostro grado di fiducia sulla verità di questa affermazione.

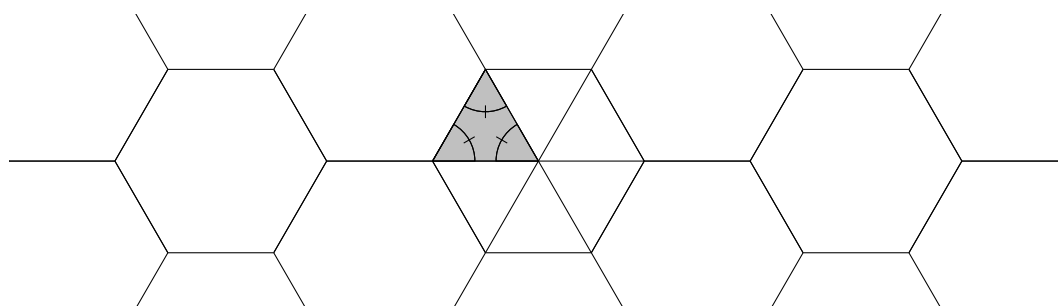


Figura 3.1.: *Somma degli angoli interni in un triangolo equilatero*

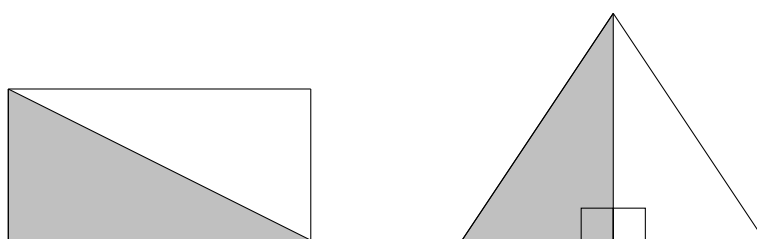


Figura 3.2.: *Somma degli angoli interni in triangoli rettangoli e isosceli*

Seguendo invece il ragionamento deduttivo non dovremo preoccuparci di questo fatto: se un oggetto è un triangolo (e dove abbia i tre vertici è del tutto ininfluenza), allora la somma degli angoli interni *deve* essere un angolo piatto. Si noti che oggi noi sappiamo che a questo tipo di triangoli “enormi” non si può applicare la geometria di Euclide, ma questo è un altro problema: nella teoria euclidea è corretto dedurre che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto, mentre il fatto che poi questo risultato possa essere applicato a oggetti del mondo reale è un problema di cui il geometra non si interessa affatto.

È anche opportuno segnalare il fatto che l'affermazione che, in una teoria deduttiva, i risultati via via ottenuti sono già contenuti negli assiomi, non implica affatto che non ci debba essere ricerca.

Infine è interessante notare che il concetto di *dimostrazione*, cardine delle teorie deduttive, è oggi soggetto a profonda revisione, e anche qui la logica dell'incerto ci mette lo zampino. Proponiamo due esempi per chiarire questo fatto.

Il teorema enorme

Si tratta di un famoso teorema di classificazione dei gruppi semplici. Non vogliamo entrare nei dettagli del suo contenuto, cosa che del resto sarebbe impossibile in questo contesto; quello che qui ci interessa segnalare è legato al nome con cui è spesso citato: il “teorema enorme”, appunto. Si tratta senza dubbio del più grande teorema che la matematica abbia mai conosciuto: la dimostrazione originale occupa circa 15000 (sì, proprio *quindicimila*) pagine sparse in oltre cinquecento articoli di riviste di matematica, e ha richiesto il contributo di un centinaio di matematici e quarant'anni circa di lavoro. Un gruppo di ricercatori sta oggi lavorando per ridurre questa sterminata mole di materiali

a dimensioni più ragionevoli, ma pare che non si potrà andare al di sotto delle cinquemila pagine. La dimostrazione di questo teorema soddisfa nella sostanza l'idea che noi abbiamo di dimostrazione, ma è altamente improbabile che possa essere rifatta da una sola persona, seguendo rigorosamente il metodo del ragionamento ipotetico-deduttivo (nemmeno, probabilmente, se uno volesse fare solo questo nella sua vita!).

È interessante, a proposito di questo teorema, quanto scrive Michael Aschbacher, l'uomo che contribuì in maniera decisiva alla dimostrazione (citazione presa da [6]):

Io sono scettico sulla possibilità che possa mai apparire in futuro una dimostrazione breve (di questo teorema) di qualsiasi tipo. Le dimostrazioni lunghe infastidiscono i matematici. Da un lato più la dimostrazione è lunga, maggiore è la probabilità di errore. La probabilità di errore nella dimostrazione del teorema della classificazione è praticamente uguale ad 1. D'altro canto la probabilità che non si riesca a correggere ogni singolo eventuale errore è praticamente zero, e poiché la dimostrazione è finita, la probabilità che il teorema sia sbagliato è prossima a zero. Con il passar del tempo e con la possibilità di assimilare la dimostrazione, il grado di affidabilità può solo aumentare. Forse è anche il caso di considerare la possibilità che esistano teoremi naturali fondamentali che possono essere formulati in modo conciso, ma che non ammettono una dimostrazione breve e semplice. Ho la sensazione che il teorema di classificazione sia uno di questi. Man mano che la matematica diventa più sofisticata, sarà sempre più probabile imbattersi in teoremi del genere.

Quello che ci interessa qui segnalare è il fatto che, in un contesto di stretta teoria deduttiva, si parli diffusamente di probabilità che una dimostrazione sia sbagliata, cosa che sarebbe stata impossibile nel testo di Euclide.

Per evitare che qualcuno pensi che un teorema del genere non ha alcun interesse pratico segnaliamo solo la sua importanza nella progettazione di sistemi di codici autocorrettori, cioè metodi per codificare le informazioni in grado di compensare le distorsioni e le perdite occasionali, argomento oggi di grandissima attualità.

Solo a titolo di curiosità, per chiarire almeno in parte una delle difficoltà della dimostrazione, rileviamo che nel corso dei lavori ci si è trovati a trattare un gruppo con

$$808017424794512875886459905961710757005754368000000000 \simeq 10^{53}$$

elementi!

Il teorema dei quattro colori

Questo teorema nasce da un problema squisitamente “grafico”: quanti sono, al minimo, i colori necessari per colorare una qualunque carta geografica in modo che due regioni adiacenti non abbiano lo stesso colore (tranne, ovviamente quando si toccano solo in un punto)? Questo problema nasce da un'osservazione quasi casuale di Francis Guthrie (il problema è, per questo, anche noto come problema di Guthrie) nel 1852 e diventa un problema “ufficiale” nel 1878, quando Arthur Cayley ne parla in una riunione della London Mathematical Society. La dimostrazione che quattro colori sono sempre sufficienti, dopo una lunga serie di insuccessi e di false<sup>(7)</sup> dimostrazioni (una delle più famose è quella di Alfred Bray Kempe, pubblicata nel 1879 e demolita da Percy John Heawood una decina d'anni dopo),

<sup>7</sup>Ancora una volta emerge il problema della probabilità che una dimostrazione matematica sia falsa!



avviene ad opera di due matematici dell'Università dell'Illinois, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, nel 1976.

La cosa interessante per noi non è la dimostrazione in sé, che non potremmo seguire, quanto il metodo utilizzato per arrivarci. Sorvolando sui dettagli e semplificando un po' (forse anche un po' troppo!), l'idea è questa: *mediante una serie di ragionamenti e deduzioni logiche si riduce la prova ad un numero finito (purtroppo enorme) di casi e si fanno fare i conti su questi casi ad un calcolatore.*

La cosa cruciale in questo modo di procedere è che il lavoro richiesto al calcolatore è tale che nessun essere umano potrà mai verificare a mano la correttezza del risultato: il concetto stesso di dimostrazione come noi lo abbiamo sempre pensato, viene a crollare. Come dice Keith Devlin, "La matematica, da quel momento, non è più la stessa. [...] L'intero concetto di dimostrazione matematica è improvvisamente cambiato e un'eventualità profilatasi minacciosamente fin dall'epoca dei primi sviluppi degli elaboratori elettronici, all'inizio degli anni cinquanta (del 1900), si è finalmente concretizzata: il calcolatore ha soppiantato il ricercatore nella costruzione di una parte di una dimostrazione matematica". È un po' come dire che la logica dell'incerto ha esteso le sue ramificazioni anche nella logica del certo!

Anche qui riteniamo giusto segnalare che questo teorema, che ha impegnato i matematici per oltre centovent'anni, è importante non solo per motivi teorici, ma anche per le sue numerose applicazioni, in particolare nella teoria dei grafi e in tutto quello che ne consegue nell'informatica.

Torniamo ora a considerare il ragionamento induttivo, osservando, anche sulla base degli esempi considerati, che un tale tipo di processo implica una gradualità, poiché le premesse riguardano un numero finito di casi e non la totalità dei casi: la conclusione che deriva dalle premesse è solo supposta e possiamo solo valutarne il grado di attendibilità, cioè la probabilità che essa sia vera.

Il campo dell'induzione si estende ad ogni ambito e ogni livello: dal vaglio di argomenti pro e contro l'attendibilità di diverse teorie scientifiche o pro e contro la colpevolezza di un indiziato di un crimine, ai metodi per ottenere valutazioni ragionevolmente precise di una grandezza mediante misure necessariamente imprecise.

Particolarmente istruttivo è pensare al processo con cui nuove concezioni o *ipotesi* scientifiche vengono formulate in base a intuizioni suggerite da qualche particolare fatto osservato e poi discusse in base a nuove risultanze che dovranno essere confrontate con le previsioni offerte dalla teoria.

A questo proposito si può fare riferimento al modo in cui la teoria della gravitazione universale è entrata nella teoria fisica moderna. In un libro<sup>(8)</sup> del 1752 William Stukeley, uno dei contemporanei di Newton, racconta la "storia della mela" riferendo di un colloquio avuto con Sir Isaac Newton ai piedi di un melo.

Mi raccontò che era nella stessa situazione quando gli venne l'idea della gravitazione. Osservando una mela cadere, si chiese: perché scende sempre perpendicolare al terreno? Era la Terra ad attrarla. Ci deve essere una forza di attrazione nella materia.

La storia fu poi arricchita di particolari curiosi, come per esempio il fatto che la mela cadde in testa a Newton, invece di cadergli a fianco.

L'osservazione della caduta della mela, assieme ad altre osservazioni, portò Newton alla formulazione dell'ipotesi della gravitazione universale. Sulla base di questa ipotesi furono fatte delle previsioni, per esempio sul moto parabolico di un proiettile, sul moto dei pianeti attorno al sole, ecc. e, successivamente, da tutti gli scienziati furono fatti numerosi esperimenti e calcoli per verificare queste previsioni,

<sup>8</sup>*Memoirs of Sir Isaac Newton's Life*, di cui recentemente (2010) la Royal Society ha messo a disposizione la versione digitale.

esperimenti che hanno modificato le valutazioni di probabilità sulla veridicità dell'ipotesi, aumentandole notevolmente fino ai tempi più recenti e indebolendole<sup>(9)</sup> solo per esempio dopo l'avvento della teoria della relatività generale.

Possiamo schematizzare questo processo con un paradigma logico induttivo che può essere sintetizzato come segue.

1. Sono stati osservati dei fatti (caduta della mela) che possiamo identificare con degli eventi.
2. Per spiegare tali fatti viene avanzata (o vengono avanzate) delle ipotesi (legge di gravitazione universale), che possiamo ancora identificare con eventi e alla cui veridicità attribuiamo una certa probabilità. Tali ipotesi implicano anche il verificarsi di altri eventi (moto dei proiettili, moto dei pianeti) con probabilità che possiamo valutare.
3. Effettuiamo degli esperimenti per osservare questi ultimi eventi, e aggiorniamo, di conseguenza, le valutazioni di probabilità delle ipotesi, esattamente come nel caso della moneta truccata con cui abbiamo iniziato questo capitolo. I teoremi del calcolo delle probabilità, che noi non abbiamo però visto in dettaglio, ci spiegano come fare questi "aggiornamenti" della probabilità sulla base dell'esperienza.

Il ragionamento induttivo dunque ci insegna come imparare dall'esperienza, senza creare dal nulla un'opinione, ma aggiornando opinioni precedentemente formulate. Naturalmente il risultato finale non ci permette di decidere definitivamente per un'ipotesi: non si può mai essere certi, nell'accettare una spiegazione plausibile, che non ce ne sia un'altra almeno altrettanto plausibile. Nel caso della gravitazione universale la teoria di Newton è plausibile per un gran numero di fenomeni, ma altrettanto lo è, per gli stessi fenomeni e molti altri, la teoria della relatività generale. Il fatto poi che la teoria della relatività generale sia compatibile con più fenomeni non ci induce affatto a ritenere completamente falsa la teoria di Newton.

---

<sup>9</sup>In realtà più che di indebolimenti della probabilità di veridicità, si tratta di precisazioni sull'ambito di validità dell'ipotesi stessa.

## A. Come è stata progettata questa dispensa

L'invenzione dell'arte tipografica è stata una gran brutta trovata! La natura aveva saggiamente disposto che le sciocchezze degli uomini fossero passeggiare, ed ecco che i libri le rendono immortali.  
*Montesquieu (1689-1755)*

Poiché questa dispensa è rivolta a studenti di un corso di Design, ci è parso utile fornire almeno alcune sommarie indicazioni su come è stata progettata e sulle scelte grafiche di realizzazione.

Il software utilizzato per il testo e per tutte le figure “matematiche” è  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , che ormai è diventato lo standard nella produzione di questo tipo di materiali.

$\text{\LaTeX}$  è un linguaggio utilizzato per la composizione di testi, in particolare, ma non solo, di testi scientifici, e permette di ottenere risultati professionali: impaginazione, tabelle, grafici, note, bibliografia e tutto quello che comunemente trovate su un testo può essere realizzato direttamente sul proprio computer, con un po' di fatica iniziale per apprendere i rudimenti, fatica decisamente compensata dalla qualità dei prodotti che si riescono ad ottenere.

La differenza fondamentale tra  $\text{\LaTeX}$  e gli altri software di videoscrittura è che questi ultimi si basano sul paradigma WYSIWYG (What You See Is What You Get: cioè che vedi è ciò che ottieni), mentre con  $\text{\LaTeX}$  il paradigma è WYSIWYM ((What You See Is What You Mean: cioè che vedi è ciò che tu intendi ottenere). Si tratta di un vero e proprio linguaggio di programmazione, orientato alla produzione di testi scritti, anche se il suo apprendimento non richiede certo le fatiche comunemente previste per studiare linguaggi come C, Java, Basic o simili.

La cosa importante di questo approccio è che, una volta progettata la struttura del testo che si vuole produrre, ci si può concentrare sui contenuti, lasciando al software il compito di fare il resto. La necessità di una accurata programmazione preliminare della struttura, lungi dall'essere una complicazione, garantisce invece uniformità di risultati e la possibilità di cambiare integralmente la struttura stessa senza intervenire sui contenuti.

Un esempio di quanto importante sia l'uniformità nella presentazione grafica di un testo è legata allo stile dei titoli, sottotitoli, ecc. La quasi totalità dei software di videoscrittura permette oggi la definizione di opportuni stili, cosa che dovrebbe risolvere alla radice il problema. Purtroppo però la facilità con cui si può “cambiare in corsa” uno stile, produce effetti spesso disastrosi dal punto di vista estetico. In un software come  $\text{\LaTeX}$ , invece, la modifica di stile di un titolo o sottotitolo, una volta impostato il valore di default per quel documento, non è praticamente possibile su un singolo caso, cosa che sconsiglia chiunque dal farlo. Per contro la modifica globale è invece sostanzialmente elementare.

C'è inoltre un'altra importante considerazione da fare. La quasi totalità delle persone che scrivono dispense e articoli in formato pdf da distribuire in rete *non* è costituita da tipografi professionisti e quindi non conosce le regole di base di una buona composizione tipografica.  $\text{\LaTeX}$ , a questo proposito, è di enorme aiuto, in quanto propone una vasta classe di modelli (detti *classi* di documento) predefiniti che soddisfano tutte le esigenze, anche quelle più sofisticate: scelto un modello e qualche semplice opzione all'interno del modello, tutto il resto sarà praticamente automatico. È abbastanza interessante quanto

scrive, a questo proposito, Peter Wilson, un esperto di  $\text{\LaTeX}$ , nonché di composizione tipografica, in *The Memoir Class for Configurable Typesetting*, un manuale d'uso per una categoria di classi di documento da produrre con  $\text{\LaTeX}$ .

L'essenza di un libro ben stampato è che non si fa notare al primo, o addirittura al secondo o successivo, sguardo di chiunque non abbia un occhio allenato. Se la vostra prima reazione nello sfogliare un libro è di fare un'esclamazione di meraviglia osservando il layout, allora il libro è molto probabilmente mal progettato, se mai è stato progettato. La stampa di qualità è raffinata, non stridente.

Con l'avvento del desktop publishing molti autori hanno la tentazione di progettare da soli i loro testi. Sembra molto facile farlo. Basta scegliere alcune delle migliaia di font disponibili, usarne uno per i titoli, uno per il testo principale, un altro per le didascalie, decidere le dimensioni dei caratteri, e la cosa è fatta.

Tuttavia, come scrivere è un'abilità che bisogna apprendere, anche comporre tipograficamente un testo è un'arte che si deve apprendere e su cui bisogna esercitarsi. Ci sono centinaia di anni di esperienza racchiusi nel buon design di un libro. Essi non possono essere trascurati con leggerezza e molti autori che progettano i loro libri non conoscono alcune delle conquiste più importanti, per non parlare del fatto che quello che fanno è esattamente in antitesi con esse. Un esperto può infrangere le regole, ma allora sa che ha delle buone ragioni per farlo.

...Se un libro grida 'guardami', questo è un avviso, e un pessimo avviso, per chi l'ha progettato.

In effetti se si controlla, in genere in seconda di copertina, l'elenco delle persone che hanno contribuito alla realizzazione di un testo, si può trovare una lunga serie di voci: l'autore o gli autori (che sono responsabili dei contenuti), gli esperti di progettazione grafica (in genere diversi per la copertina e le pagine interne), gli esperti di composizione tipografica e di impaginazione, i realizzatori dei disegni tecnici, i realizzatori delle altre immagini, una serie di revisori dei testi, di revisori linguistici, di correttori di bozze, ecc. Tutto questo testimonia i problemi che ci si trova ad affrontare nello scrivere un testo: è per questo che è meglio affidarsi ad un software professionale e non tentare di fare da sè. Non è quasi mai vero che "chi fa da sè per tre".

Di seguito alcune indicazioni più spicciole sui motivi che dovrebbero spingere a usare in particolare questo software.

- $\text{\LaTeX}$  è un software completamente gratuito, in continua evoluzione grazie al lavoro di migliaia di appassionati sparsi in tutto il mondo e, nel suo motore, è uno dei pochi software virtualmente "bug free".
- $\text{\LaTeX}$  è un software multiplatforma: poiché il sorgente è un semplice file di testo (che addirittura potrebbe limitarsi a usare i caratteri ASCII di base), esso può essere letto con qualunque sistema operativo. In tempi in cui i sistemi elettronici di archiviazione stanno prendendo sempre più piede, avere un prodotto i cui contenuti saranno sicuramente leggibili anche in un lontano futuro<sup>(1)</sup> è

<sup>1</sup>È noto a tutti che un documento digitale prodotto con un certo software non è in generale leggibile da un altro software e questo può creare notevoli problemi di "recupero dei contenuti di un file", problemi che sono sempre accuratamente trattati dalle varie normative: vedi ad esempio lo standard PDF/A (pdf Archiviabile), previsto dalla normativa ISO 19005-1 : 2005, proprio per garantire la futura leggibilità dei documenti pdf sostitutivi dei documenti cartacei.

una condizione di privilegio non secondaria. I documenti scritti in  $\text{\LaTeX}$  producono direttamente output in pdf e volendo addirittura in PDF/A.

- $\text{\LaTeX}$  può essere usato anche per disegnare, fare tabelle e grafici, fare presentazioni, produrre file pdf con animazioni, ecc.
- $\text{\LaTeX}$  rende estremamente facile il lavoro a più mani, ovvero il lavoro collaborativo per la produzione di documenti complessi: poiché ciascun collaboratore deve solo preoccuparsi dei contenuti, non ci saranno problemi di alcun genere nell’assemblare i vari file prodotti, e ci sarà l’assoluta certezza di uniformità di stile.

A proposito dell’uso di  $\text{\LaTeX}$  per disegnare e produrre grafici è opportuno segnalare che questo fatto ha degli enormi vantaggi rispetto alla produzione di disegni e grafici mediante appositi software dedicati. Anche se i software dedicati possono produrre output altamente professionali e con estrema rapidità, rimane il grosso problema dei font utilizzati. Come si può constatare sfogliando questa dispensa, per esempio nella pagina 13, tutti grafici di contenuto matematico contengono sempre del testo ed è opportuno che il tipo di font utilizzato e le dimensioni dello stesso siano identiche a quelle del testo. La cosa è automatica se il grafico è prodotto con  $\text{\LaTeX}$ , mentre risulta difficile o quasi sempre impossibile se il grafico è prodotto con un programma esterno. Inoltre, un eventuale cambio di font o di dimensioni dello stesso viene gestita automaticamente se il grafico è prodotto con  $\text{\LaTeX}$ , mentre richiede una nuova elaborazione se il grafico è prodotto con un programma esterno.

La questione del “cambio in corsa” di font è particolarmente importante per le formule matematiche. Se un software di videoscrittura si appoggia ad un’applicazione esterna per produrre le formule matematiche, un cambio di font nel testo non si rifletterà in un analogo cambio nelle formule; se invece, come accade in  $\text{\LaTeX}$ , la scrittura delle formule matematiche è incorporata nello stesso software, non ci saranno problemi.

Un’altra piccola, ma significativa, chicca che può fornire di default  $\text{\LaTeX}$ : il problema delle legature. Una spaziatura variabile più corretta tra i caratteri comporta alcuni inconvenienti. Ad esempio, per comporre in maniera corretta le due lettere “f” ed “i”, la “i” dovrebbe trovarsi strettamente legata alla “f”, ma il problema è che questo provocherebbe sia una collisione tra il punto sopra la “i” e la stessa “f”, sia una sovrapposizione (anche parziale) tra la grazia presente all’estremità superiore della “i” e il trattino situato a metà della “f”. Per ovviare a questo inconveniente si includono caratteri supplementari all’interno delle collezioni di fonts: le cosiddette *legature*. In questo modo la stringa “fi” composta da due caratteri viene sostituita all’occorrenza da un unico carattere (la legatura), disegnato appositamente, che evita sia la sovrapposizione, che la collisione maldestra tra le due lettere “f” ed “i”. Problema simile per “f” ed “l”. Oggigiorno la maggior parte dei font include i caratteri di legatura “fi”, “fl”, “ff”, “ffi”, “ffl”. Si veda la figura A.1.

fi	fl	ff	ffi	ffl
fi	fl	ff	ffi	ffl

Figura A.1.: *Legature*

E veniamo ad alcune indicazioni sulla struttura vera e propria che è stata scelta per questo documento e su alcune scelte di carattere personale.

Riportiamo qui di seguito con un certo dettaglio queste scelte, anche per mostrare quali sono i problemi che ci si trova a dover affrontare nel progettare con criterio un testo.

1. La classe di documento scelta (sostanzialmente il modello base del documento) si chiama *scrbook* e prevede alcune cose standard.
  - I capitoli hanno, quando serve, una numerazione progressiva, seguita dal titolo del capitolo, senza l'esplicita dicitura "Capitolo n."
  - I paragrafi hanno una numerazione costituita dal numero del capitolo seguito da un punto e poi dal numero progressivo del paragrafo. E così per i sottoparagrafi. Divisioni più fini non sono numerate.
  - Seguendo la prassi, alcuni capitoli non hanno una numerazione (Premessa, Notazioni utilizzate, Bibliografia). Le appendici, inoltre hanno una numerazione speciale con lettere dell'alfabeto, anziché numeri.
  - Le dimensioni e lo stile dei caratteri dei vari titoli (capitoli, paragrafi, ecc.) sono scelti in automatico una volta impostata la dimensione del font utilizzato.
  - Le pagine iniziali (il *frontmatter*) prima dell'inizio vero e proprio del testo, e cioè le pagine di copertina, gli indici, la premessa, hanno una numerazione separata dal testo vero e proprio in numeri romani minuscoli.
  - Gli indici (generale, analitico, delle figure) sono prodotti e formattati in automatico, con l'indicazione che il numero di pagina deve comparire accanto ad ogni voce, senza la presenza di puntini e non allineato a destra, come succede spesso.
2. Il modello di documento prevede poi la scelta di alcune opzioni.
  - La famiglia e la dimensione dei caratteri (*Garamond* e 11 pt).
  - Le dimensioni della pagina (A4).
  - Il fatto che il documento sarà stampato in fronte retro.
  - Il fatto che i capitoli si aprano sempre sulla pagina destra (cioè sulla pagina dispari).
  - Le dimensioni della pagina, che vengono scelte in modo semiautomatico, indicando solo quanto si vuole che la pagina sia riempita. In questa scelta si indica anche un eventuale margine per la rilegatura. Le dimensioni della pagina sono calcolate facendo in modo che, aprendo il testo ad un certo punto con una pagina stampata a sinistra e una a destra, i margini bianchi sinistro, centrale (che è doppio) e destro sia identici.
  - Il tipo di testatine e di pié di pagina e il fatto che esse siano separate dal testo mediante una linea di spessore 0.4 pt. Le testatine e i pié di pagina sono diversi per le pagine pari e per le pagine dispari (le pagine pari si aprono a sinistra, quelle dispari a destra). Le testatine contengono il titolo del capitolo (estrema sinistra), del paragrafo (estrema destra), del volume (al centro sia a sinistra che a destra); i pié di pagina contengono il numero di pagina (all'esterno sinistro e destro), un riferimento al sito web dell'autore (al centro sia della pagina pari che della pagina dispari), il nome dell'autore (al centro sia a sinistra che a destra). La pagina iniziale di ogni capitolo non contiene testatine.
  - La scelta del modo come sono scritte le didascalie delle figure e delle tabelle.
3. Si è poi provveduto ad alcune indicazioni sul modo di scrivere le formule matematiche, sulla posizione (a sinistra) del numero progressivo delle formule che hanno la necessità di numerazione.

4. Un'altra scelta riguarda lo stile degli elenchi puntati o numerati. In particolare per gli elenchi puntati si è scelto di sostituire il “punto elenco” con una linea “—”, secondo le regole dello stile italiano [vedi 9]. Per gli elenchi numerati il numero progressivo è scritto in carattere tondo e non corsivo.
5. Si è poi scelto uno stile per la redazione e composizione della bibliografia, in cui le varie voci compaiono con una numerazione progressiva tra parentesi quadre e le citazioni riportano, sempre tra parentesi quadre, questo numero.
6. Si è scelto che i riferimenti ipertestuali sia tra parti del testo che a link esterni siano evidenziati solo dal colore Royal Blue del testo. A proposito dei riferimenti ipertestuali essi sono generati in modo completamente automatico dal software. Analogo discorso per i riferimenti incrociati e i vari rimandi da una parte all'altra del testo.
7. Nel testo non si è mai fatto uso del grassetto, in accordo con quanto affermato da Peter Wilson e riportato più sopra: il corsivo è ampiamente sufficiente per evidenziare quello che serve.
8. Un'ultima scelta, consentita dal software in uso, è la *microgiustificazione*. In sostanza per ogni riga viene fatta una valutazione sulla possibilità di adattare gli spazi tra le parole e tra le lettere in modo da evitare, per quanto possibile, la divisione delle parole a fine riga.

Naturalmente a tutto questo va aggiunto il lavoro di redazione dei contenuti, di realizzazione di grafici e di immagini, di composizione grafica della copertina e dell'ultima di copertina, di ricerca e studio delle fonti bibliografiche, ma questo è un lavoro che nessun software può fare in automatico!

*Buona lettura di questa dispensa!*





## Notazioni utilizzate

Le notazioni utilizzate in questo testo sono quelle di default nel sistema tipografico  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ , notazioni che, nella maggior parte dei casi, concordano con quelle previste dalla normativa UNI CEI ISO 80000-2 : 2013. Nella tabella che segue abbiamo riportato, per ragioni di completezza, anche alcuni simboli che non sono stati esplicitamente utilizzati in questo testo.

Segnaliamo inoltre che, nella numerazione dei teoremi, definizioni, osservazioni, ecc., abbiamo scelto di usare una numerazione progressiva per capitolo. Altri testi usano invece numerazioni progressive separatamente per i teoremi, le definizioni, ecc. Si tratta naturalmente solo di una questione di gusto personale.

La scrittura di un testo contenente molta matematica è sempre un'impresa ardua e che richiede molto tempo e fatica. Un aiuto indispensabile è fornito da un sistema di composizione come quello che abbiamo adottato (e che costituisce ormai lo standard de facto per i testi scientifici). Per chi fosse interessato a conoscere  $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$  segnaliamo che si tratta di un sistema di composizione tipografica di livello professionale e assolutamente gratuito. Tutte le informazioni utili si possono trovare sul sito ufficiale della comunità degli sviluppatori, <http://www.ctan.org/> e, in lingua italiana, sul sito degli Utilizzatori italiani di  $\text{\TeX}$  e  $\text{\LaTeX}$ , <http://www.guitex.org>. Alcuni manuali introduttivi e consigli per iniziare si trovano anche sul sito personale dell'autore, <http://www.batmath.it>.

### Osservazioni

Come già detto, le notazioni usate in questo testo sono quelle previste dalla normativa ufficiale UNI CEI ISO 80000-2 : 2013. Questa normativa in realtà è obbligatoria per chi usa la matematica per motivi tecnici: fisici, ingegneri, ecc. Non esiste obbligo alcuno per i “matematici puri”. Riteniamo tuttavia opportuno adeguarsi, indipendentemente dagli obblighi ufficiali, per ragioni di uniformità: in tempi in cui i documenti possono circolare con estrema facilità e in cui i software di calcolo diventano sempre più diffusi, è opportuno evitare, per quanto possibile, ogni possibile ambiguità. Ancora più evidente l'importanza di adeguarsi agli standard in un testo rivolto agli studenti di un corso di design del prodotto.

### Elenco delle notazioni

“,” - “.”

Separatore decimale. Le regole prescrivono l'uso della virgola come separatore decimale nelle lingue diverse dall'inglese, dove invece si deve usare il punto. Tuttavia in questo testo abbiamo preferito fare uno strappo e usare il punto.

$p \wedge q$

$p$  “et”  $q$ , congiunzione logica.

$p \vee q$

$p$  “or”  $q$ , disgiunzione logica.

$\neg p$

“not”  $p$ , negazione.

$p \Rightarrow q$

$p$  implica  $q$ .

*Continua nella pagina successiva*

*Segue dalla pagina precedente*

$p \Leftrightarrow q$	$p$ è equivalente a $q$ .
$\forall$	Per ogni, quantificatore universale.
$\exists$	Esiste, quantificatore esistenziale.
$\exists!, \exists^1$	Esiste un solo.
$A, B,$	Simboli per gli insiemi o per gli eventi.
$x \in A, A \ni x$	$x$ appartiene ad $A$ .
$x \notin A, A \not\ni x$	$x$ non appartiene ad $A$ .
$\{x \in A \mid \mathcal{P}(x)\}$	Insieme degli $x$ di $A$ per cui vale la proprietà $\mathcal{P}(x)$ .
$\text{card}A,  A $	Cardinalità dell'insieme $A$ .
$B \subseteq A, A \supseteq B$	$B$ è un sottoinsieme di $A$ oppure $A$ è un soprainsieme di $B$ ; sono tollerate anche le scritture $B \subset A$ e $A \supset B$ , ma in questo caso per i sottoinsiemi propri si deve usare $B \subsetneq A$ oppure $B \supsetneq A$ . La scrittura $B \subseteq A$ nel caso di eventi si legge $B$ implica $A$ .
$B \subset A, A \supset B$	$B$ è un sottoinsieme proprio di $A$ .
$A \cup B$	Unione di insiemi oppure unione di eventi.
$A \cap B$	Intersezione di insiemi oppure intersezione di eventi.
$A \setminus B$	Differenza di insiemi.
$A \Delta B$	Differenza simmetrica di due insiemi.
$(a, b)$	Coppia ordinata; se si usa la virgola come separatore decimale, e se $a$ o $b$ sono numeri con la virgola, va usato il “;” al posto della virgola come separatore della coppia.
$A \times B$	Prodotto cartesiano di insiemi.
$\complement_U A$	Complementare dell'insieme $A$ rispetto all'insieme $U$ .
$A^c$	Simbolo alternativo per il complementare dell'insieme $A$ rispetto all'insieme universo che è sottinteso. Questo simbolo è usato in particolare per indicare l'evento contrario all'evento $A$ .
$a \stackrel{\text{def}}{=} b, a := b, a =_{\text{def}} b$	$a$ è uguale a $b$ per definizione.
$a \propto b$	$a$ è proporzionale a $b$ .
$a \approx b$	$a$ è circa uguale a $b$ .
$a \ll b$	$a$ è molto minore di $b$ .
$a \gg b$	$a$ è molto maggiore di $b$ .
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{P}$	Insieme dei naturali (compreso lo zero), degli interi, dei razionali, dei reali, dei complessi, dei primi; si possono usare anche i simboli $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}, \mathbf{P}$ , e noi in questo testo abbiamo sempre usato questi; $\mathbf{N}^*$ oppure $\mathbb{N}^*$ indica i naturali senza lo zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); $\mathbb{Z}^+$ indica gli interi maggiori o uguali a zero (scritture analoghe per gli altri insiemi); per indicare altre restrizioni si possono usare scritture del tipo $\mathbf{N}_{\geq 3}$ , con ovvio significato.

*Continua nella pagina successiva*

$[a, b], ]a, b], [a, b[, ]a, b[$	Intervallo di reali chiuso, aperto a sinistra, aperto a destra, aperto; la normativa prevede anche i simboli $(a, b]$ , $[a, b)$ , $(a, b)$ per gli intervalli aperti a sinistra, aperti a destra, aperti: ritengo che questi simboli vadano evitati, soprattutto l'ultimo per la confusione che può sorgere con il simbolo di coppia di reali.
$] - \infty, b], ] - \infty, b[$	Intervallo inferiormente illimitato chiuso, intervallo inferiormente illimitato aperto.
$]a, +\infty[, ]a, +\infty[$	Intervallo superiormente illimitato chiuso, intervallo superiormente illimitato aperto.
$a \cdot b, ab$	Simboli usati per la moltiplicazione con operandi letterali.
$3 \times 5$	Simbolo per la moltiplicazione con operandi numerici. Tuttavia a volte si usa anche il punto centrato come per gli operandi letterali.
A, B, ...	Simbolo per i punti.
$AB \parallel CD, r \parallel s$	La retta AB è parallela alla retta CD, la retta r è parallela alla retta s.
$AB \perp CD, r \perp s$	La retta AB è perpendicolare alla retta CD, la retta r è perpendicolare alla retta s.
$\overline{AB}$	Segmento di estremi A e B.
$d(A, B)$	Distanza tra A e B, lunghezza del segmento $\overline{AB}$ . Per la lunghezza del segmento $\overline{AB}$ si usa anche la notazione $ \overline{AB} $ , anche se non prevista nella normativa ISO.
$\widehat{AOB}$	Angolo di vertice O, individuato dalle semirette OA ed OB.
$A, \mathcal{A}(ABC\dots)$	Area, area della figura di vertici A, B, C, ...
$2p$	Perimetro di un poligono.
$n!$	Fattoriale di n.
$C_n^k = \binom{n}{k}$	Combinazioni (semplici) di n oggetti di classe k, ovvero coefficienti binomiali.
${}^R C_n^k$	Combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k.
$V_n^k$	Disposizioni ("variazioni") semplici di n oggetti di classe k.
${}^R V_n^k$	Disposizioni ("variazioni") con ripetizione di n oggetti di classe k.
$P_n$	Permutazioni di n oggetti distinti.
$P_n^{n_1, n_2, \dots, n_k}$	Permutazioni di n oggetti, di cui $n_1$ uguali tra di loro, $n_2$ uguali tra di loro, ... $n_k$ uguali tra di loro.
$ a , \text{abs } a$	Valore assoluto di a.
$\text{sgn } a$	Segno del numero reale a, definito come segue: $\text{sgn } a = -1$ per $a < 0$ , $\text{sgn } a = 0$ per $a = 0$ , $\text{sgn } a = 1$ per $a > 0$ .
$\min(a, b)$	Minimo di a e b.
$\max(a, b)$	Massimo di a e b.
$\sin x, \cos x$	Le funzioni seno e coseno.

Continua nella pagina successiva

*Segue dalla pagina precedente*

$\tan x$	La funzione tangente; evitare la scrittura $\text{tg } x$ .
$\cot x$	La funzione cotangente; evitare la scrittura $\text{ctg } x$ .
$\sec x$	La funzione secante.
$\csc x, \text{ cosec } x$	La funzione cosecante.
$\arcsin x$	La funzione arcoseno.
$\arccos x$	La funzione arcocoseno.
$\arctan x$	La funzione arcotangente; evitare la scrittura $\text{arctg } x$ .
$\text{arccot } x$	La funzione arcocotangente; evitare la scrittura $\text{arcctg } x$ .
$\text{arcsec } x$	La funzione arcsecante.
$\text{arccsc } x$	La funzione arccosecante; evitare la scrittura $\text{arccosec } x$ .
$\sinh x$	La funzione seno iperbolico.
$\cosh x$	La funzione coseno iperbolico.
$\tanh x$	La funzione tangente iperbolica.
$\text{arsinh } x$	La funzione inversa del seno iperbolico.
$\text{arcosh } x$	La funzione inversa del coseno iperbolico.
$\text{artanh } x$	La funzione inversa della tangente iperbolica.
$f: A \rightarrow B$	Funzione di dominio $A$ e codominio $B$ ( $B$ non è l'insieme delle immagini).
$f: x \mapsto f(x)$	La funzione $f$ manda $x \in A$ su $f(x) \in B$ ; $f(x)$ è un'espressione (di natura qualsiasi) che fornisce il valore della funzione $f$ su $x$ .
$e^x, \exp x$	Esponenziale di $x$ in base $e$ .
$a^x, \exp_a x$	Esponenziale di $x$ in base $a$ .
$\log x$	Logaritmo di $x$ , da usare quando non è necessario precisare la base; da notare che in molti testi (e spesso anche nelle calcolatrici e nei software) questa scrittura è usata per il logaritmo in base 10; purtroppo la stessa scrittura è usata anche in alcuni testi per il logaritmo naturale: è meglio attenersi alla norma ufficiale.
$\ln x, \log_e x$	Logaritmo di $x$ in base $e$ .
$\lg x, \log_{10} x$	Logaritmo di $x$ in base 10.
$\log_a x$	Logaritmo di $x$ in base $a$ .
$\text{lb } x, \log_2 x$	Logaritmo binario (in base 2).

## Alfabeto greco

Riportiamo, per l'importanza che ha nelle notazioni matematiche, l'alfabeto greco con la relativa pronuncia.

alfa	$\alpha$	$A$	nu (ni)	$\nu$	$N$
beta	$\beta$	$B$	csi	$\xi$	$\Xi$
gamma	$\gamma$	$\Gamma$	omicron	$o$	$O$
delta	$\delta$	$\Delta$	pi	$\pi$	$\Pi$
epsilon	$\varepsilon$	$E$	ro	$\varrho$	$R$
zeta	$\zeta$	$Z$	sigma	$\sigma$	$\Sigma$
eta	$\eta$	$H$	tau	$\tau$	$T$
theta	$\vartheta$	$\Theta$	upsilon	$\upsilon$	$\Upsilon$
iota	$\iota$	$I$	fi	$\varphi$	$\Phi$
cappa	$\kappa$	$K$	chi	$\chi$	$X$
lambda	$\lambda$	$\Lambda$	psi	$\psi$	$\Psi$
mu (mi)	$\mu$	$M$	omega	$\omega$	$\Omega$

Come si può notare, in molti casi le lettere greche maiuscole non differiscono nella grafia dalle lettere dell'alfabeto latino.

Segnaliamo anche una lettera dell'alfabeto ebraico di uso comune in matematica.

aleph     $\aleph$



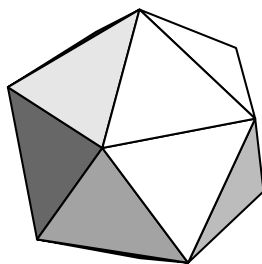
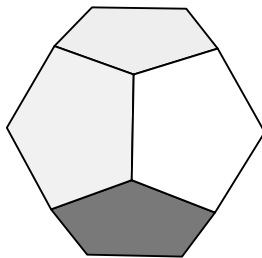
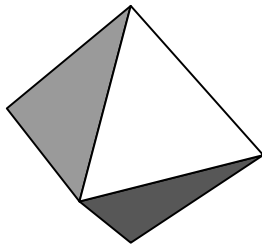
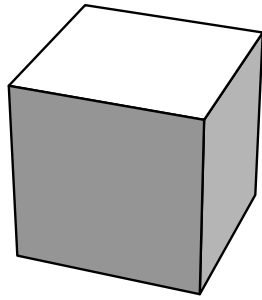
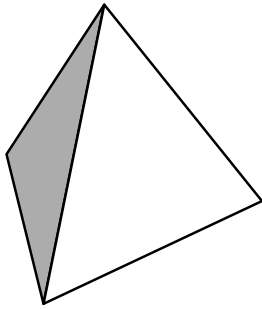
## Bibliografia

- [1] A. D. Aczel. *Chance. Dai giochi d'azzardo agli affari (di cuore)*. Milano: Raffaello Cortina, 2005.
- [2] G. Avondo-Bodino. *Elementi di calcolo delle probabilità*. Bologna: Zanichelli, 1974.
- [3] L. Battaia. «Esame di Stato 2010, seconda prova scritta per i Licei Scientifici a indirizzo sperimentale». In: *Archimede* 4 (2010) (cit. a p. 43).
- [4] M. Benzi. *Il ragionamento incerto*. Milano: Franco Angeli, 1997.
- [5] R. Courant e H. Robbins. *Che cos'è la matematica?* Torino: Boringhieri, 1971.
- [6] K. Devlin. *Dove va la matematica*. Torino: Bollati Boringhieri, 1994 (cit. a p. 46).
- [7] M. Emmer. *La perfezione visibile*. Roma-Napoli: Edizioni Theoria, 1991.
- [8] A. Fawer. *Improbable*. Bologna: Feltrinelli, 2006.
- [9] R. Lesina. *Il nuovo manuale di stile*. Bologna: Zanichelli, 1994 (cit. a p. 53).
- [10] L. Mari. *Inferenza statistico probabilistica*. 2015. URL: [http://www.liuc.it/person/lmari/adss/6.Inferenza\\_statistico\\_probabilistica.pdf](http://www.liuc.it/person/lmari/adss/6.Inferenza_statistico_probabilistica.pdf).
- [11] P. Negrini e M. Ragagni. *Probabilità*. Faenza RA: Edizioni C.E.L.I., 1991.
- [12] C. Rossi. «Inferenza statistica». In: *Probabilità e statistica nella scuola liceale*. A cura di Ministero della Pubblica Istruzione. Lugo di Romagna: Liceo Scientifico Statale “G. Ricci Curbastro”, 1999 (cit. a p. 43).
- [13] R. Scozzafava. *Incertezza e probabilità. Significato, valutazione, applicazioni della probabilità soggettiva*. Bologna: Zanichelli, 2001.
- [14] R. Scozzafava. *Primi passi in probabilità e statistica. Teoria ed esercizi*. Padova: Zanichelli/Decibel, 2000 (cit. a p. 33).
- [15] J. Toscano. *Training autoogeno in probabilità*. Padova: Zanichelli/Decibel, 2008.





In ultima di copertina: *I cinque solidi platonici.*



## Matematica per il Design 1

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design 1 per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 21 novembre 2019

Questi appunti sono rivolti agli studenti del primo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Contengono solo un sunto degli argomenti svolti a lezione a partire dall'Anno Accademico 2015-2016.

Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematrica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.