

LUCIANO BATTIA

---

## CURVE E SUPERFICI

*Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design  
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone*

---

[www.batmath.it](http://www.batmath.it)

## Curve e superfici

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design  
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 24 gennaio 2018

Quest'opera è soggetta alla Creative Commons Public License versione 4.0 o posteriore. L'enunciato integrale della Licenza in versione 4.0 è reperibile all'indirizzo internet <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.it>.

- Si è liberi di riprodurre, distribuire, comunicare al pubblico, esporre in pubblico, rappresentare, eseguire e recitare quest'opera alle seguenti condizioni:

**Attribuzione** Devi attribuire adeguatamente la paternità sul materiale, fornire un link alla licenza e indicare se sono state effettuate modifiche. Puoi realizzare questi termini in qualsiasi maniera ragionevolmente possibile, ma non in modo tale da suggerire che il licenziante avalli te o il modo in cui usi il materiale.

**Non commerciale** Non puoi usare il materiale per scopi commerciali.

**Non opere derivate** Se remixi, trasformi il materiale o ti basi su di esso, non puoi distribuire il materiale così modificato.

- Ogni volta che si usa o si distribuisce quest'opera, lo si deve fare secondo i termini di questa licenza, che va comunicata con chiarezza.
- In ogni caso si possono concordare con il titolare dei diritti d'autore usi di quest'opera in deroga da questa licenza.

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

*Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904*

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

*Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 novembre 2013*



# Indice

Premessa [vii](#)

- 1 Ancora un po' di matematica [1](#)
  - 1.1 Grafici di funzioni di una variabile [1](#)
  - 1.2 Equazioni in due incognite [2](#)
  - 1.3 Equazioni parametriche [3](#)
  - 1.4 Grafici polari [3](#)
  - 1.5 Codici Mathematica e Geogebra [6](#)
- 2 Le coniche [9](#)
  - 2.1 Le coniche come sezioni [9](#)
  - 2.2 Proprietà focali delle coniche [14](#)
  - 2.3 Costruzione delle coniche per tangenti [17](#)
  - 2.4 Il centro di curvatura di una curva [19](#)
  - 2.5 Proprietà di riflessione delle coniche [21](#)
  - 2.6 Equazioni delle coniche [24](#)
  - 2.7 Proprietà di similitudine delle parabole [26](#)
- 3 Altre curve famose [29](#)
  - 3.1 Caustiche di riflessione [29](#)
  - 3.2 Evolute [32](#)
  - 3.3 Rullette [35](#)
- 4 La matematica delle tre dimensioni [41](#)
- 5 Esempi di superfici [45](#)
- 6 Qualche intersezione con la sfera [51](#)
- 7 Poliedri iperbolizzati [55](#)
- 8 Da Möbius alla quarta dimensione [59](#)
  - 8.1 Il nastro di Möbius [59](#)
  - 8.2 Oltre la terza dimensione [62](#)
  - 8.3 La bottiglia di Klein [64](#)



## Premessa

Questo fascicoletto contiene solo alcune integrazioni al testo in uso<sup>(1)</sup> presso il corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. È da intendersi ad uso esclusivo degli studenti iscritti al corso citato.

---

<sup>1</sup>Nicoletta Sala e Gabriele Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli Editore, Milano, 2003.



# 1 Ancora un po' di matematica

## 1.1 Grafici di funzioni di una variabile

Abbiamo già parlato di grafici di funzioni di una variabile nel fascicolo sulle spirali. Ritorniamo brevemente sull'argomento con ulteriori informazioni.

Una prima utile osservazione è il fatto che cambiamenti molto limitati nel testo della funzione possono portare a cambiamenti radicali nel risultato. Un esempio è dato dalle due funzioni

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2} + \sqrt{9-x^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[3]{3x^2} - \sqrt{9-x^2},$$

i cui grafici sono proposti nella figura 1.1

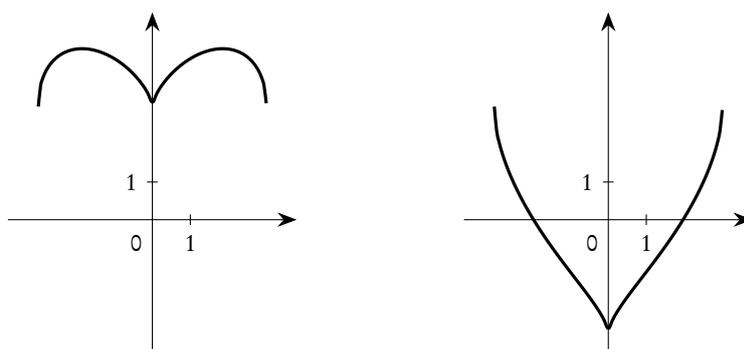


Figura 1.1: *Grafici di  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2} + \sqrt{9-x^2}$  e  $\sqrt[3]{3x^2} - \sqrt{9-x^2}$*

L'unione dei due grafici produce l'interessante immagine della figura 1.2

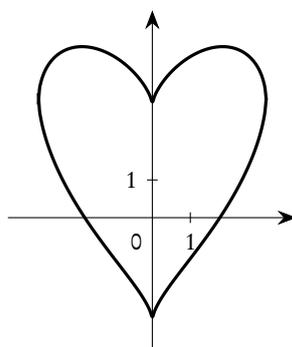


Figura 1.2: *Grafico simultaneo delle due funzioni della figura 1.1*

L'idea di questo grafico è presa da <https://www.geogebra.org/ivandewinne>. Ivan De Winne è un attivo contributore allo sviluppo di materiali prodotti con Geogebra e al link citato potete trovare molte altre interessanti realizzazioni.

## 1.2 Equazioni in due incognite

Un'equazione in due incognite  $x$  e  $y$  ha, di solito, infinite soluzioni, costituite da coppie di numeri reali che dunque possono essere rappresentate nel piano cartesiano. Consideriamo per esempio l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Le coppie  $(1,0)$ ,  $(-1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(0,-1)$  sono soluzioni, come si può verificare per sostituzione diretta, ma ce ne sono infinite altre. Nelle situazioni comuni tutte queste soluzioni si distribuiscono su opportune curve del piano cartesiano; nell'esempio in considerazione esse esauriscono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, come mostrato nella figura 1.3. Questa curva si chiama *grafico dell'equazione*.

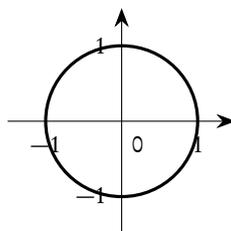


Figura 1.3: Grafico dell'equazione  $x^2 + y^2 = 1$

Equazioni più complesse hanno naturalmente grafici più elaborati e, quindi, più interessanti. Si veda l'esempio proposto nella figura 1.4.

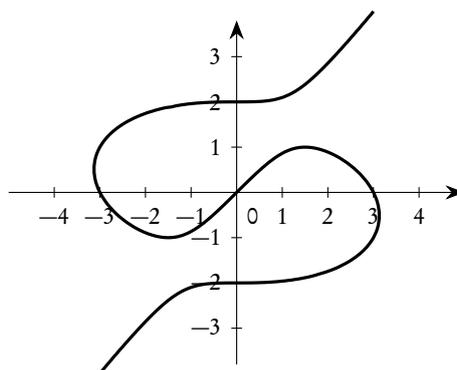


Figura 1.4: Grafico dell'equazione  $4x^3 + 9xy^2 - 9y^3 - 36x + 36y = 0$

Vedremo in seguito le equazioni e i grafici di alcune curve interessanti per il design.

### 1.3 Equazioni parametriche

Una ulteriore strategia per tracciare curve nel piano cartesiano è costituita dalle equazioni parametriche. L'idea è quella di considerare punti, cioè coppie di numeri reali  $(x, y)$  in cui le due coordinate si ottengono a partire dai valori di un *parametro*, abitualmente indicato con  $t$ . Per chiarire il concetto consideriamo un esempio. Supponiamo di considerare i punti le cui coordinate cartesiane sono date dalle leggi

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Per esempio per  $t = 0$  si ottiene il punto  $(1, 0)$ , per  $t = 1$  il punto  $(0, 1)$ , per  $t = 2$  il punto  $(-3/5, 4/5)$ , ecc. Se si considerano tutti i possibili valori di  $t$  si ottengono tutti i punti della circonferenza di centro l'origine e raggio 1, con esclusione del punto  $(-1, 0)$ . Per valori positivi di  $t$  si ottiene la semicirconferenza sopra l'asse delle ascissa, per valori di  $t$  negativi, la semicirconferenza di sotto.

Le formule che esprimono la  $x$  e la  $y$  in funzione del parametro  $t$  si chiamano *equazioni parametriche* della curva.

Proponiamo un ulteriore interessante esempio, segnalando che utilizzeremo ancora questa tecnica nel seguito.

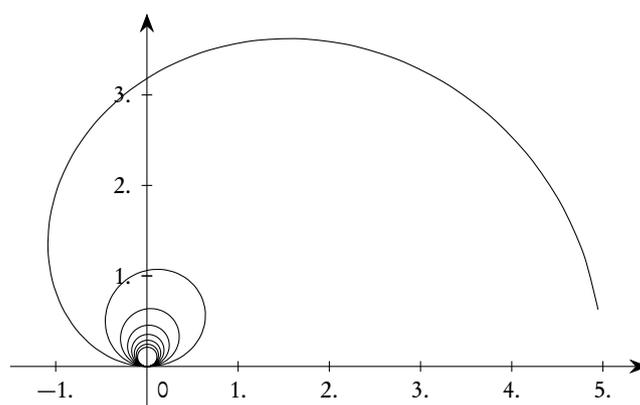


Figura 1.5: Grafico della curva parametrica  $x = 5 \sin(t) \cos(t)/t$ ,  $y = 5 \sin^2(t)/t$ , detta cocleide

### 1.4 Grafici polari

Abbiamo già trattato i grafici polari nel fascicolo sulle spirali. Consideriamo qui solo qualche approfondimento.

In base alla definizione di coordinate polari  $(r, \vartheta)$  di un punto del piano, è chiaro che  $r$  deve essere positivo e può essere 0 solo per il polo, nel qual caso il valore di  $\vartheta$  non è definito. Gli angoli (misurati sempre in radianti!) possono anche essere negativi: basta immaginare di percorrerli in senso orario anziché antiorario). Per il tracciamento di grafici polari è però utile una convenzione, adatta a trattare anche il caso di valori di  $r < 0$ . La convenzione è la seguente: il punto di coordinate  $(r, \vartheta)$ , con  $r < 0$ , è il punto  $(-r, \vartheta + \pi)$ , cioè ha distanza dall'origine uguale a  $|r|$  e angolo aumentato di un angolo piatto.

La figura 1.6 mostra due punti P di coordinate  $(2, \pi/6)$  e Q di coordinate  $(-2, \pi/6)$ : essi sono situati in posizioni simmetriche rispetto al polo.

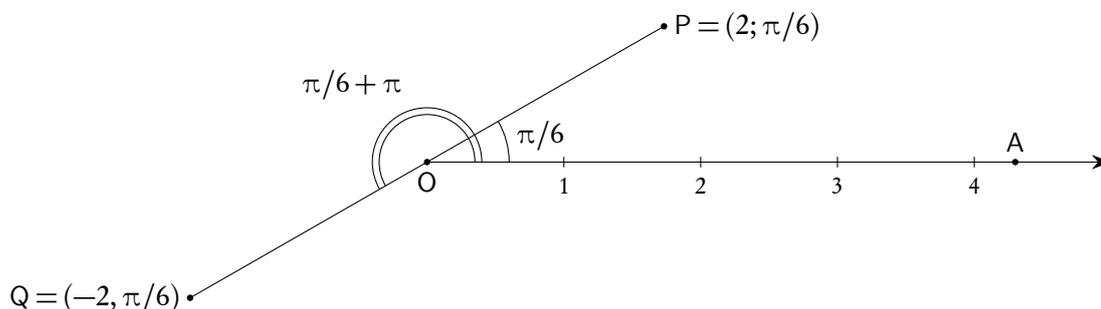


Figura 1.6: *Punto con coordinata r negativa*

Ci interessa poi segnalare che se vogliamo rappresentare graficamente una legge come, per esempio,  $A = l^2$  (legge di proporzionalità quadratica tra il lato e l'area di un quadrato), non possiamo concludere nulla senza precisare il tipo di sistema di coordinate scelto. Se usiamo un sistema cartesiano (nel qual caso scriveremmo di solito  $y = x^2$ ) otteniamo una parabola, se invece usiamo un sistema polare (nel qual caso scriveremmo di solito  $r = \vartheta^2$ ), otteniamo una spirale, anche se qui abbiamo anche considerato angoli negativi, ottenendo quindi un raddoppio della già nota spirale, come mostrato nella figura 1.7.

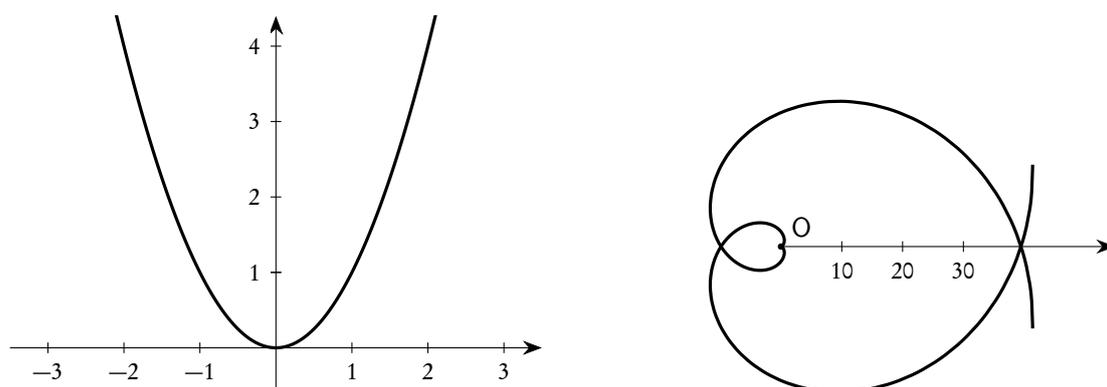


Figura 1.7: *Grafici cartesiano e polare della legge di proporzionalità quadratica*

Dal punto di vista matematico il contenuto dei due grafici è identico: la variabile dipendente si ottiene sempre facendo il quadrato della variabile indipendente, e quindi se costruiamo una tabella di valori non noteremo alcuna differenza.

$x, \vartheta$	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$y, r$	9	4	1	0	1	4	9	...

La differenza grafica è però significativa e, in considerazione del fatto che queste note sono per un corso di *Matematica per il design*, addirittura cruciale.

A titolo di curiosità (ma non solo!), proponiamo alcuni esempi, cominciando da due situazioni particolarmente significative.

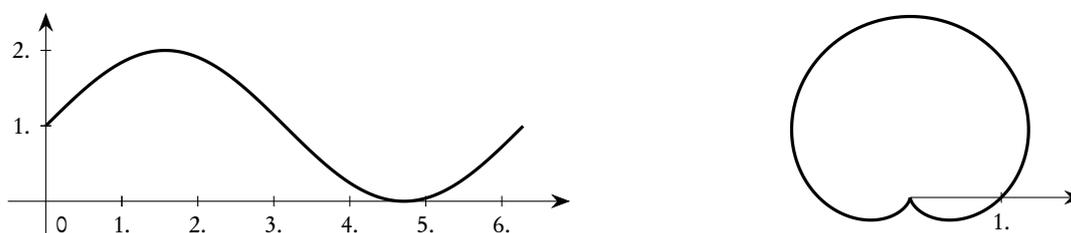


Figura 1.8: Il grafico di  $y = 1 + \sin(x)$  e di  $r = 1 + \sin(\vartheta)$

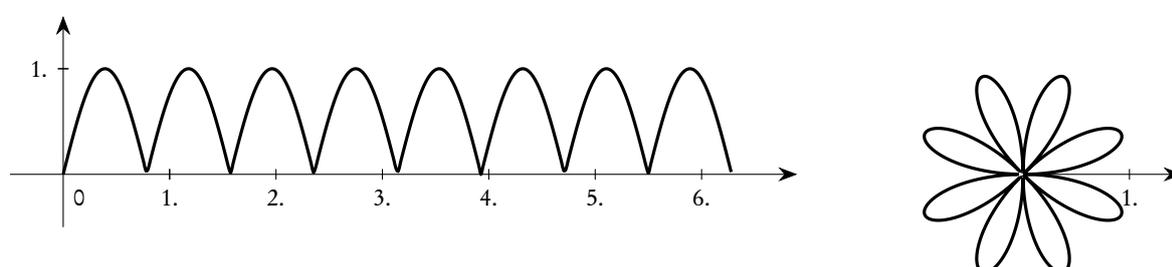


Figura 1.9: Il grafico di  $y = |\sin(4x)|$  e di  $r = |\sin(4\vartheta)|$

Una volta individuata la strategia possiamo sbizzarrirci con situazioni più complesse. Ne proponiamo solo un'altra, che ci pare particolarmente significativa: si vedano le figure 1.10 e 1.11.

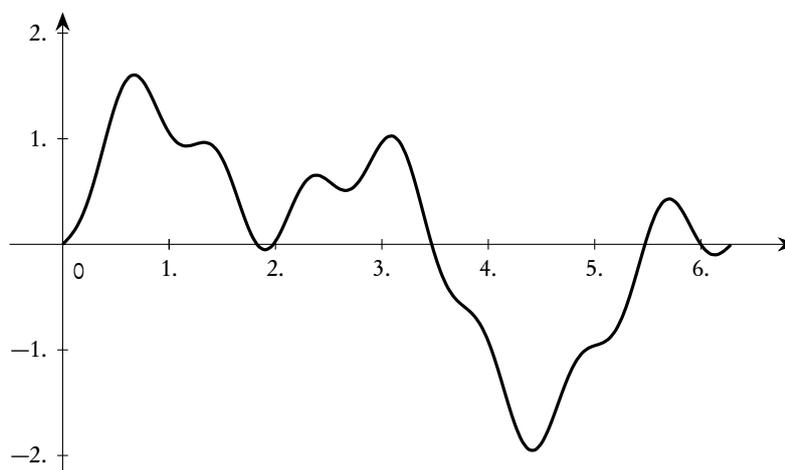


Figura 1.10: Il grafico cartesiano della funzione  $y = \sin(x) + \sin^3(5x/2)$

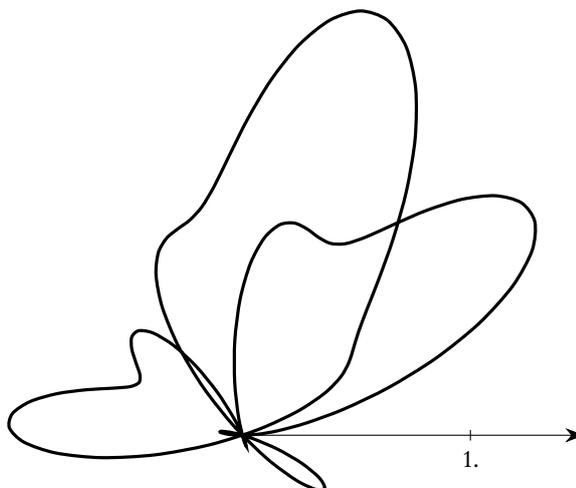


Figura 1.11: Il grafico polare della funzione  $r = \sin(\vartheta) + \sin^3(5\vartheta/2)$

## 1.5 Codici Mathematica e Geogebra

Per concludere questa introduzione matematica alle curve, indichiamo, molto schematicamente, i codici necessari per produrre i vari tipi di grafici considerati, utilizzando Geogebra oppure Mathematica, e considerando alcuni degli esempi già proposti.

— Per le funzioni di una variabile consideriamo la funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{3x^2} + \sqrt{9-x^2}.$$

1. In Geogebra è sufficiente scrivere, nella barra di inserimento, la legge che definisce la funzione:

$$f(x) = (3x^2)^{(1/3)} + \text{sqrt}(9-x^2)$$

2. In Mathematica si utilizza il codice

```
Plot[(3x^2)^(1/3)+Sqrt[9-x^2],{x,-3,3}]
```

In Mathematica prestare attenzione alle funzioni tipo Sqrt che devono essere scritte con l'iniziale maiuscola e che devono avere l'argomento tra parentesi quadre.

In Mathematica inoltre occorre indicare i limiti entro cui far variare la  $x$  (tra  $-3$  e  $3$  nell'esempio proposto), mentre in Geogebra in questo caso non serve.

— Per le equazioni in due incognite consideriamo l'esempio dell'equazione

$$4x^3 + 9xy^2 - 9y^3 - 36x + 36y = 0.$$

1. In Geogebra è sufficiente scrivere l'equazione nella barra di inserimento:

$$4x^3+9x y^2-9y^3-36x+36y=0$$

prestando attenzione a separare la  $x$  e la  $y$  con un spazio, per indicare al software che si tratta di un prodotto; il software assegnerà anche un nome all'equazione.

- In Mathematica si utilizza il codice

```
ContourPlot[4x^3+9x y^2-9y^3-36x+36y==0, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}]
```

dove, come prima, abbiamo indicato i limiti, questa volta sia per la  $x$  che per la  $y$ . Attenzione al doppio segno di uguale: `==`.

- Per le equazioni parametriche consideriamo l'esempio della curva

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

- In Geogebra occorre considerare il comando `Curva`, come segue

```
Curva[(1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1+t^2), t, -10, 10]
```

ovvero scrivendo le due espressioni per la  $x$  e la  $y$ , separate da una virgola, il nome del parametro, i valori iniziale e finale.

- In Mathematica il codice è molto simile

```
ParametricPlot[{(1-t^2)/(1+t^2), 2t/(1+t^2)}, {t, -10, 10}, PlotRange->All]
```

solo che le due espressioni per la  $x$  e la  $y$  vanno racchiuse tra graffe e similmente il nome e i limiti per il parametro. Il comando `PlotRange->All` ha la funzione di ottenere il grafico completo.

- Per le coordinate polari in Mathematica non c'è alcuna differenza, a parte il nome, rispetto alle funzioni in coordinate cartesiane. In Geogebra invece occorre simulare le coordinate polari con il comando `Curva`. Consideriamo l'esempio della curva

$$r = t^2,$$

che scriveremo, usando per esempio il nome  $t$  per la variabile,

$$r = t^2.$$

- In Mathematica si usa il codice

```
PolarPlot[t^2, {t, -6, 6}]
```

- In Geogebra si usa il comando `Curva`, dove le espressioni per la  $x$  e la  $y$  si ottengono moltiplicando l'espressione della funzione rispettivamente per  $\cos(t)$  e  $\sin(t)$

```
Curva[t^2 cos(t), t^2 sin(t), t, -6, 6]
```



## 2 Le coniche

### 2.1 Le coniche come sezioni

Iniziamo la nostra carrellata di curve da quelle che furono storicamente studiate per prime, a parte naturalmente la retta e la circonferenza, ovvero le *coniche* o meglio le *sezioni coniche*: *ellisse*, *iperbole* e *parabola*.

L'interesse per queste curve nasce probabilmente dal tentativo di risolvere il problema della quadratura del cerchio.

Il nome di “sezioni coniche” è dovuto al fatto che esse possono essere ottenute sezionando una superficie conica con un piano opportuno. Il primo a interessarsi sistematicamente di questo problema fu Menecmo, che considerava solo il caso di un piano sezionante perpendicolare alla superficie conica. Per ottenere le tre curve citate considerava coni di apertura un angolo acuto per l'ellisse (che può ridursi ad una circonferenza come caso particolare), un angolo retto per la parabola, un angolo ottuso per l'iperbole. Inoltre Menecmo considerava solo coni a una falda, per cui nel caso dell'iperbole ne otteneva un unico ramo. Proponiamo le tre costruzioni nelle figure [2.1](#), [2.2](#), [2.3](#).

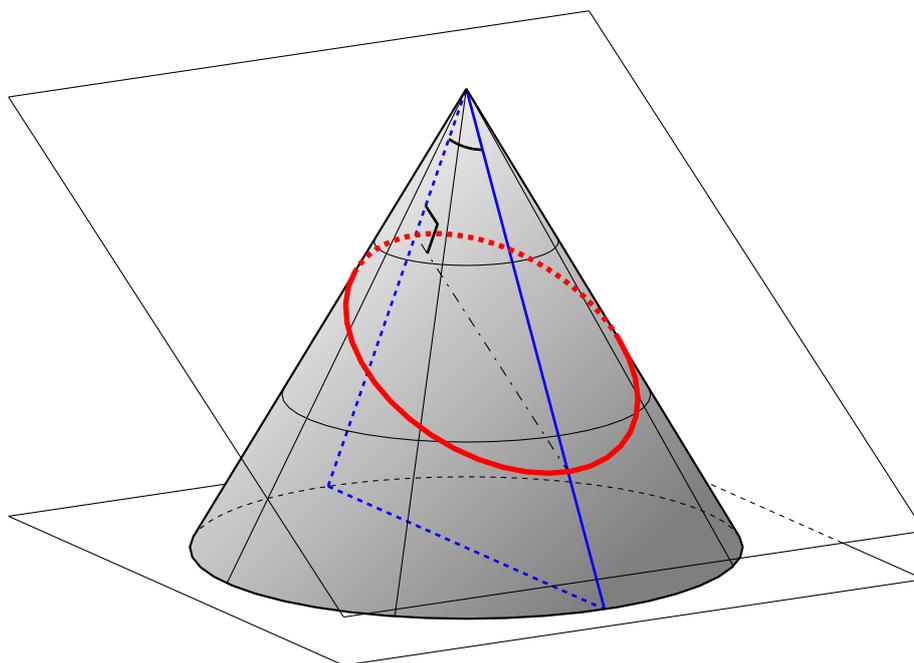


Figura 2.1: *La costruzione di Menecmo dell'ellisse come sezione conica*

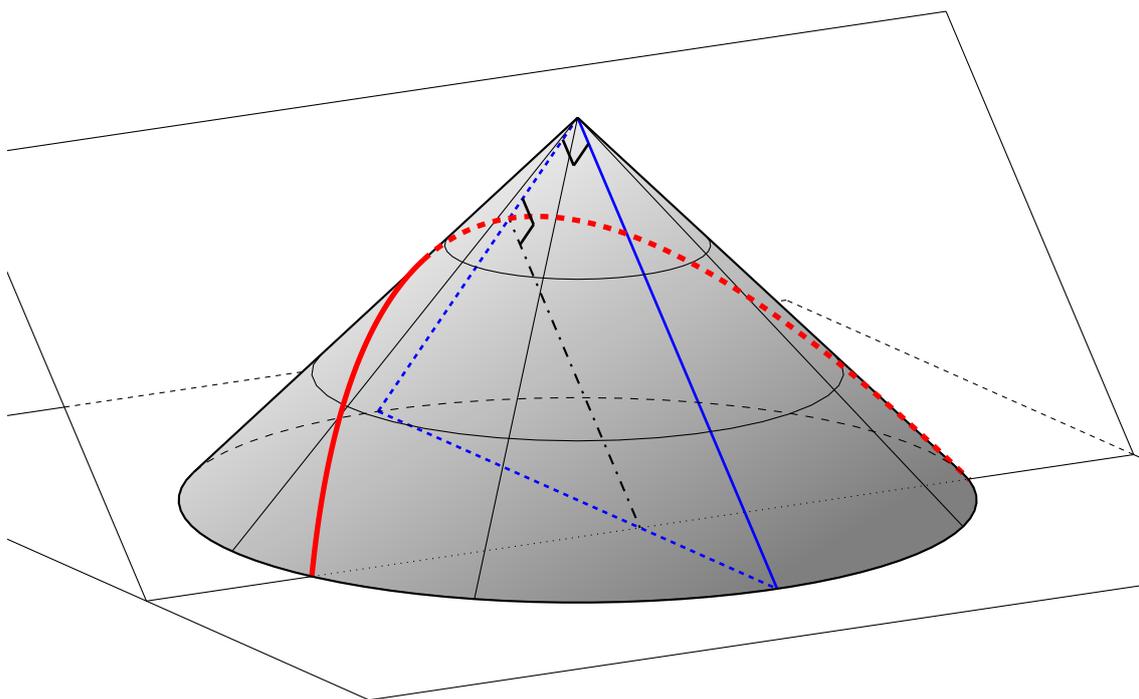


Figura 2.2: *La costruzione di Menecmo della parabola come sezione conica*

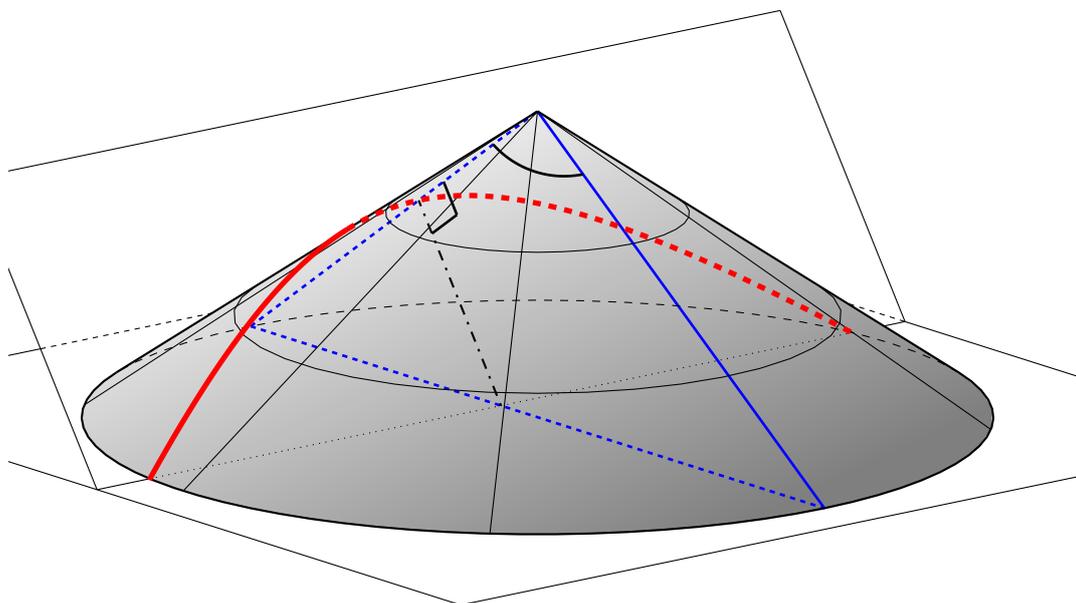


Figura 2.3: *La costruzione di Menecmo dell'iperbole come sezione conica*

Successivamente Apollonio considerò coni circolari a due falde, anche obliqui o scaleni, come mostrato nella figura 2.4.

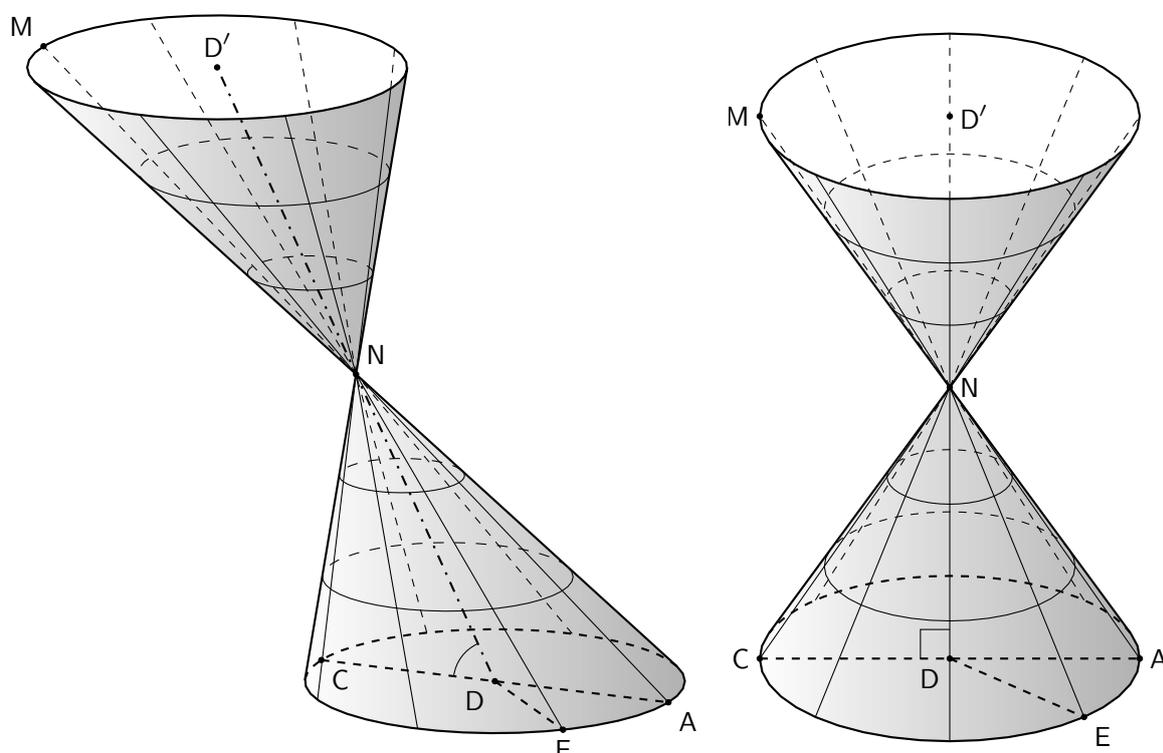


Figura 2.4: Il cono scaleno e il cono retto a due falde secondo la definizione di Apollonio

Queste figure sono costruite con il seguente principio: si considera una circonferenza in un piano  $\pi$  e un punto  $N$  fuori dal piano stesso. L'insieme di tutte le rette passanti per  $N$  e per un punto generico della circonferenza individuano una superficie conica, che sarà detta *cono retto* se il punto  $N$  è sulla verticale al cerchio per il suo centro  $D$ , altrimenti è un *cono scaleno*.

La novità importante introdotta da Apollonio, rispetto a Menecmo è la costruzione dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole dallo stesso cono, variando l'inclinazione del piano sezionante, invece che variando l'angolo di apertura del cono. Il risultato inoltre non dipende dal fatto che il cono sia retto o scaleno.

Nelle figure 2.5, 2.6, 2.7 sono mostrate le tre possibili situazioni, considerando, per semplicità, sempre il cono retto.

Esistono anche altre sezioni di un cono con un piano, dette a volte sezioni degeneri. Le menzioniamo qui solo per ragioni di completezza, in quanto non aggiungono nulla di significativo dal punto di vista dell'interesse grafico. Si tratta dei casi seguenti:

- Il caso in cui il piano ha in comune con il cono solo il vertice: si ottiene solo un punto, precisamente il vertice stesso del cono.
- Il caso in cui il piano è tangente a una delle generatrici del cono: si ottiene ovviamente la retta tangente.

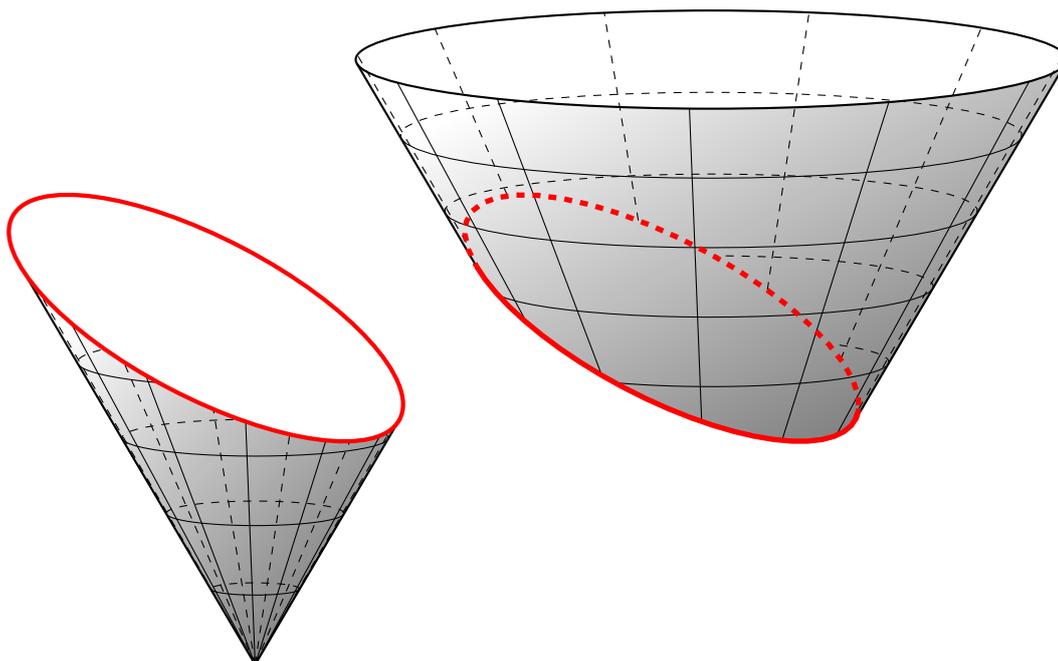


Figura 2.5: *Sezione conica per ottenere un'ellisse*

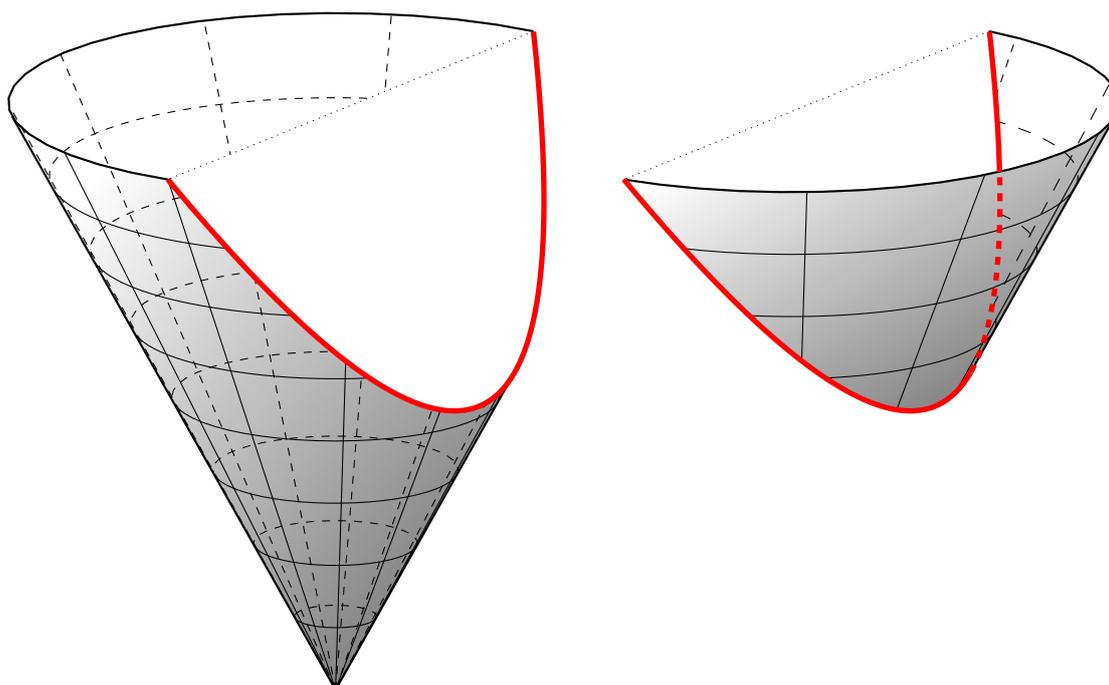


Figura 2.6: *Sezione conica per ottenere una parabola*

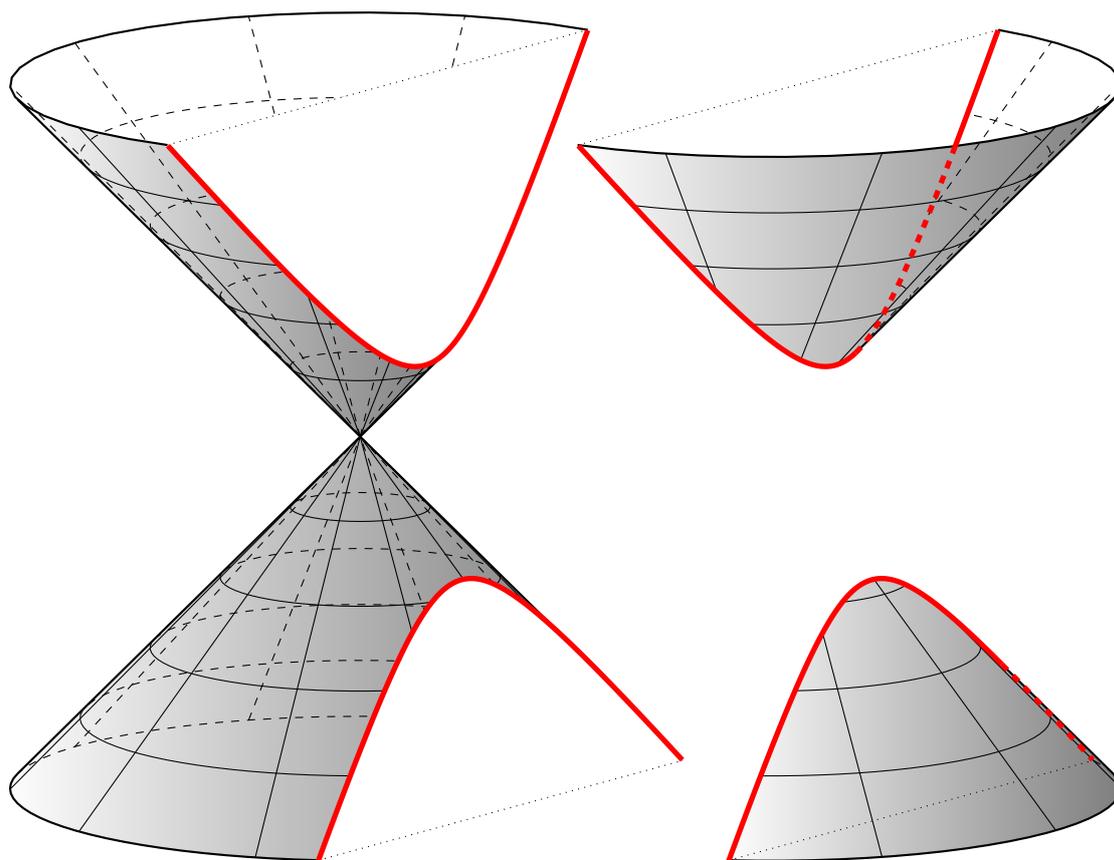


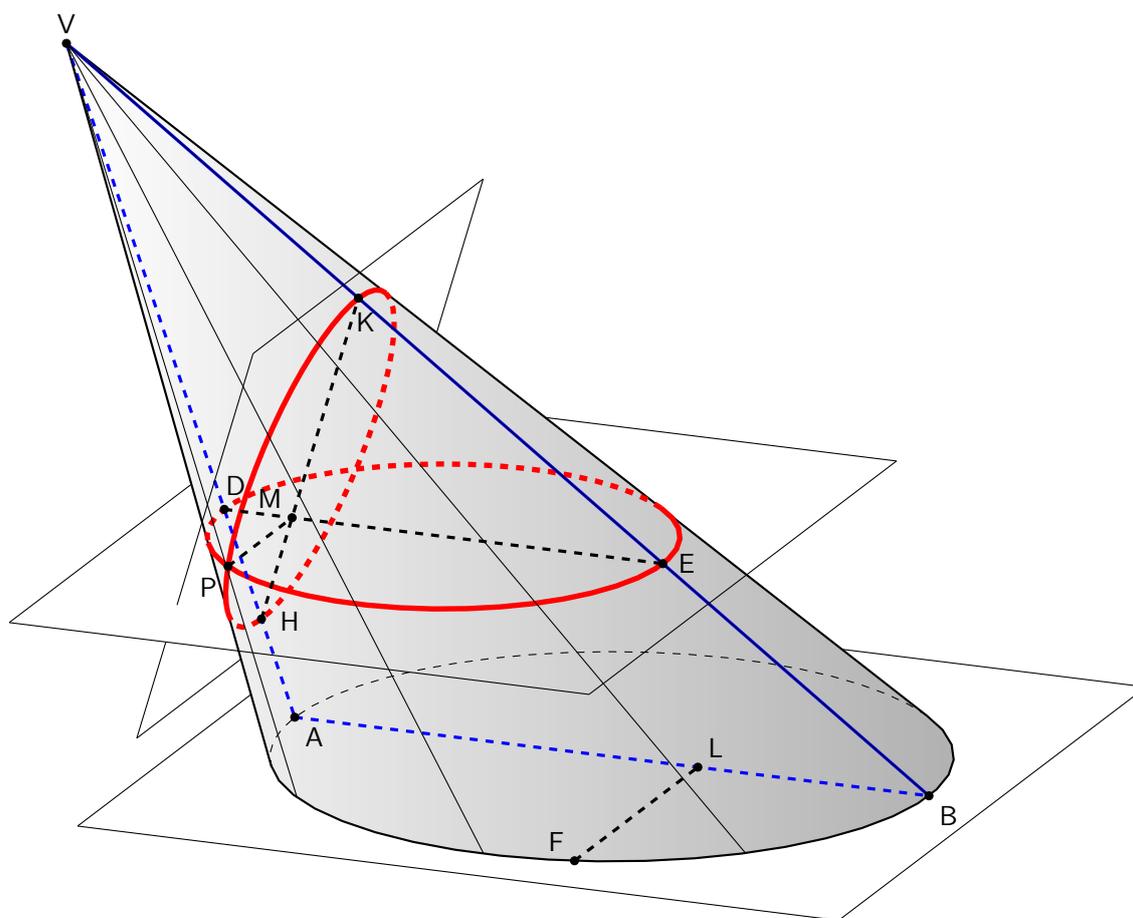
Figura 2.7: Sezione conica per ottenere un'iperbole

- Il caso in cui il piano passa per il vertice del cono, ma interseca il cono anche fuori dal vertice: si ottengono due rette incidenti proprio nel vertice del cono.

Sempre per ragioni di completezza segnaliamo anche che l'ellisse (o come caso particolare la circonferenza) si ottiene anche sezionando un cilindro con un piano non parallelo all'asse del cilindro, ma anche in questo caso non si aggiunge nulla di significativo dal punto di vista grafico.

È interessante l'osservazione, dovuta allo stesso Apollonio, che se si considera un cono scaleno, ci sono due serie di sezioni con un piano che sono circolari. La prima serie è ovviamente costituita dalle sezioni con piani paralleli al piano  $\pi$  della circonferenza "generatrice" del cono, e qui si tratta di una semplice questione di similitudine di figure nello spazio: le diverse sezioni con piani paralleli a  $\pi$  non sono altro che dilatazioni della stessa circonferenza generatrice. Esiste però anche un'altra serie di sezioni circolari, ed è la serie delle sezioni che Apollonio chiama *subcontrarie*. Non intendiamo qui naturalmente entrare nei dettagli, e ci limitiamo ad illustrare la costruzione nella figura 2.8.

Queste curve hanno molte straordinarie proprietà, alcune delle quali esamineremo nelle pagine seguenti. Qui segnaliamo solo il fatto che, molto dopo la loro scoperta "teorica" da parte dei geometri greci esse si rivelarono di straordinaria importanza nei più svariati campi. Ricordiamo qui per esempio il fatto che la parabola è la curva descritta da un oggetto, tipo un sasso, lanciato con velocità iniziale non verticale, oppure il fatto che le orbite descritte dai pianeti intorno al sole sono ellissi.

Figura 2.8: *La sezione subcontraria*

## 2.2 Proprietà focali delle coniche

Le coniche possono essere ottenute anche come luoghi geometrici di punti del piano che godono di particolari proprietà, tenendo conto delle quali si possono realizzare anche delle costruzioni “meccaniche” delle stesse curve. Ne tratteremo le proprietà essenziali.

Per l'ellisse e l'iperbole si considerano due punti distinti,  $F_1$  e  $F_2$ , detti *fuochi*, e valgono le seguenti due proprietà, rispettivamente:

- l'ellisse è il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano tali che la somma delle sue distanze da  $F_1$  e  $F_2$  sia costante;
- l'iperbole è il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano tali che il valore assoluto della differenza delle sue distanze da  $F_1$  e  $F_2$  sia costante.

Per la parabola si considerano invece una retta detta *direttrice* e un punto  $F$  detto *fuoco*, non appartenente alla direttrice e vale la seguente proprietà:

- la parabola è il luogo geometrico dei punti  $P$  del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice.

Sia per l'ellisse che per l'iperbole e la parabola queste proprietà consentono una costruzione<sup>(1)</sup> abbastanza semplice delle curve, detta *costruzione del giardiniere* o *metodo del filo teso*.

Per l'ellisse si può immaginare di prendere uno spago, di lunghezza  $l$ , fissandone gli estremi nei due punti  $F_1$  e  $F_2$  con due puntine da disegno, se su un foglio di carta, tenendo conto che naturalmente la lunghezza dello spago deve essere maggiore della distanza tra i due punti di fissaggio, che saranno i due fuochi dell'ellisse. A questo punto tenendo teso lo spago con una punta scrivente in  $P$ , si può disegnare una ellisse, come mostrato nella figura 2.9.

Di questa costruzione parla, tra gli altri, anche Cartesio nella *Diottrica* del 1637: "L'ellisse è una linea curva che i matematici son soliti rappresentare tagliando obliquamente un cono o un cilindro e che talvolta ho visto servire ai giardinieri nella divisione delle aiuole ove questi la descrivono certamente in modo assai grossolano e impreciso, ma che tuttavia mi pare faccia comprendere la sua natura meglio della sezione di un cilindro o di un cono."

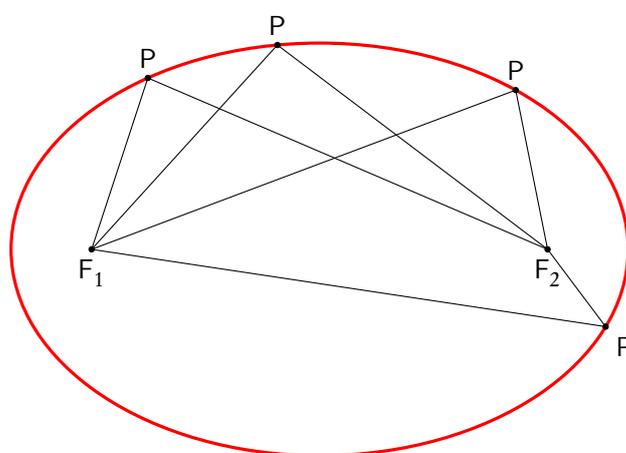


Figura 2.9: Costruzione dell'ellisse con il metodo del giardiniere

Anche per l'iperbole si può realizzare una costruzione simile, solo che si potrà tracciare un solo ramo alla volta, e naturalmente solo una porzione limitata della stesso. Considerati due punti fissati  $F_1$  e  $F_2$  come prima, si prende un'asticella  $\overline{AF_2}$ , girevole intorno al perno  $F_2$ . Si considera poi un filo fissato nell'estremo  $A$  dell'asticella e nel punto  $F_1$ . Se si prende una punta scrivente in  $P$  e si fa ruotare l'asticella, finché la lunghezza del filo lo consente, facendo in modo che il filo rimanga sempre teso e con il tratto  $\overline{AP}$  aderente all'asticella, si descrive un tratto di uno dei due rami dell'iperbole di fuochi  $F_1$  e  $F_2$ . Si veda la figura 2.10.

Anche di questa costruzione parla Cartesio, sempre nella *Diottrica*: "Anche l'iperbole è una linea curva che i matematici spiegano come l'ellissi, servendosi della sezione di un cono. Tuttavia, perchè la possiate concepire più facilmente, addurrò qui ancora una volta l'esempio di un giardiniere che se ne serva per disegnare gli ornamenti di una qualche aiuola."

E veniamo infine alla parabola la cui costruzione con il metodo del *filo teso* è descritta da Keplero nel 1604. Fissato nel piano un punto  $F$  e una retta  $d$ , con  $F$  esterno alla retta, si prende un'asta  $\overline{AB}$  che

<sup>1</sup>Per chi è interessato alle costruzioni meccaniche delle coniche e di altre curve, segnaliamo l'interessantissimo sito <http://www.macchinematematiche.org/>, dove sono proposte numerose realizzazioni.

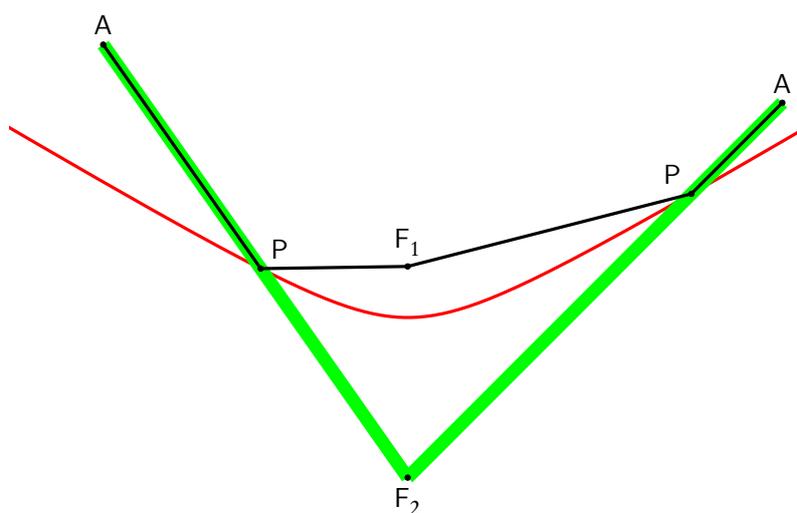


Figura 2.10: *Costruzione dell'iperbole con il metodo del giardiniere*

sia vincolata a scorrere con l'estremo B sulla retta  $d$ , rimanendo sempre perpendicolare alla  $d$  stessa. Si considera poi un filo fissato nell'estremo A dell'asta e nel punto F e infine una punta scrivente in P che mantiene sempre il filo teso e aderente all'asta nel tratto  $\overline{AP}$ . Muovendo il punto B su  $d$  la punta descriverà un arco di parabola. Si veda la figura 2.11.

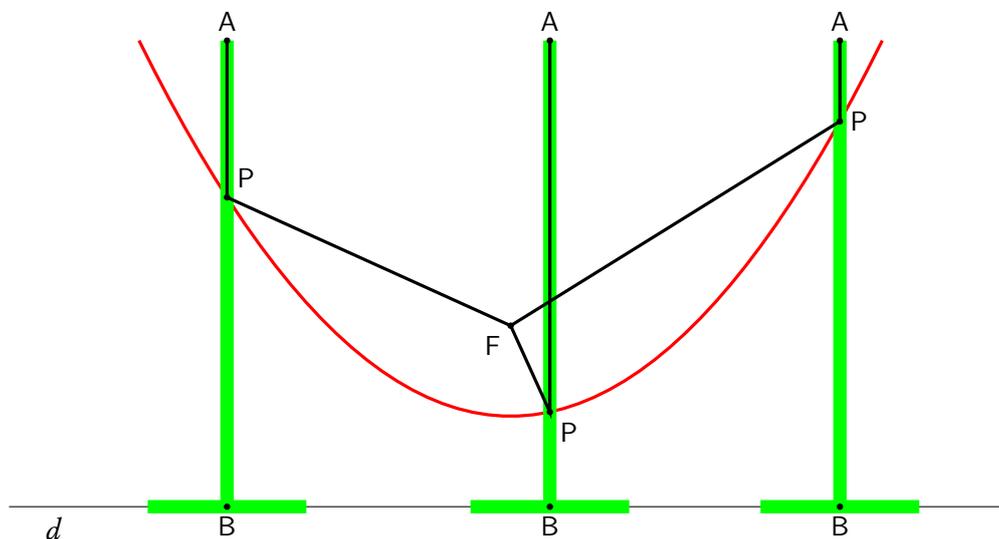


Figura 2.11: *Costruzione della parabola con il metodo del filo teso*

## 2.3 Costruzione delle coniche per tangenti

Un efficiente metodo di costruzione meccanica delle coniche è la costruzione per tangenti che può nella sostanza essere realizzata con una squadretta rigida a T. Questo metodo si chiama anche metodo delle *podarie negative*, anche se qui non intendiamo approfondire il problema.

Cominciamo a considerare il caso della parabola. Fissati nel piano una retta  $s$  e un punto  $F$ , si consideri una squadretta a T in cui il punto  $Q$  di saldatura tra i due bracci sia costretto a muoversi sulla retta  $s$ , mentre un braccio passa sempre per  $F$ . Se tracciamo una retta sul lato della squadretta non passante per  $F$ , per diverse posizioni del punto  $Q$ , otterremo una serie di rette il cui involuppo (curva tangente a tutte le rette) è una parabola avente fuoco nel punto  $F$ . Si veda la figura 2.12.

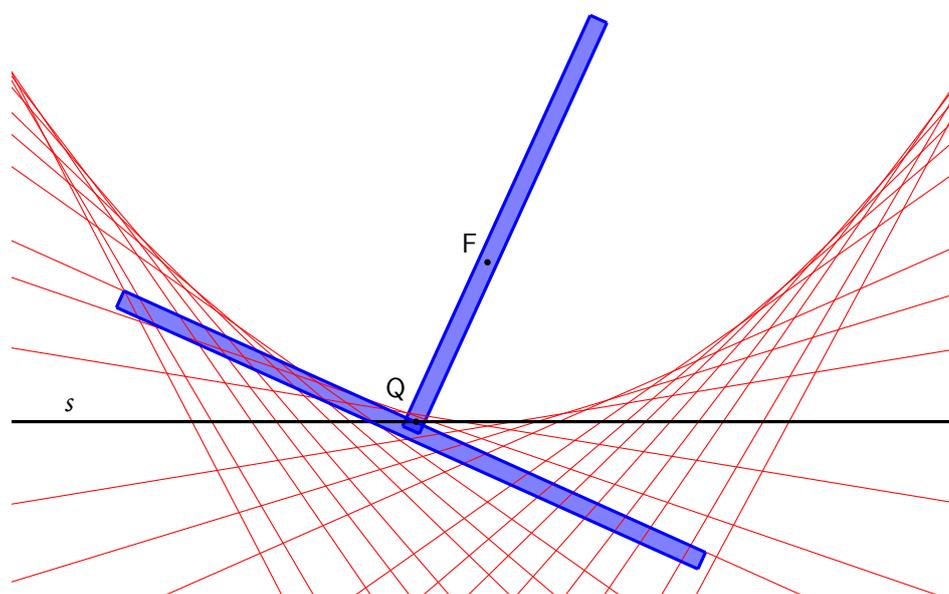


Figura 2.12: Costruzione della parabola per tangenti

Passiamo ora all'ellisse. Consideriamo nel piano una circonferenza e due punti  $F_1$  e  $F_2$  situati all'interno della circonferenza, su un diametro e da bande opposte rispetto al centro. Consideriamo poi una squadretta a T in cui il punto  $Q$  di saldatura tra i due bracci sia costretto a muoversi sulla circonferenza data, mentre un braccio passa sempre per  $F_1$  o  $F_2$ . Se tracciamo una retta sul lato della squadretta non passante per  $F_1$  o  $F_2$ , per diverse posizioni del punto  $Q$ , otterremo una serie di rette il cui involuppo (curva tangente a tutte le rette) è una ellisse avente fuochi nei punti  $F_1$  e  $F_2$ . Si veda la figura 2.13.

Consideriamo infine l'iperbole. La costruzione è quasi identica a quella dell'ellisse, solo che ora i due punti  $F_1$  e  $F_2$  (che saranno i fuochi dell'iperbole) vanno scelti sul prolungamento di un diametro e sempre da bande opposte rispetto al centro. Anche in questo caso l'iperbole si ottiene come curva involuppo delle rette tracciate sul lato della squadretta non passante per  $F_1$  o  $F_2$ .

Come mostrano chiaramente le figure 2.12, 2.13 e 2.14 la costruzione procede in maniera sostanzialmente identica nei tre casi: l'unica differenza è il tipo di curva su cui si muove il punto  $Q$  e la posizione dei due punti  $F_1$  e  $F_2$ . Con un'allocuzione molto significativa potremmo dire che queste tre curve sono

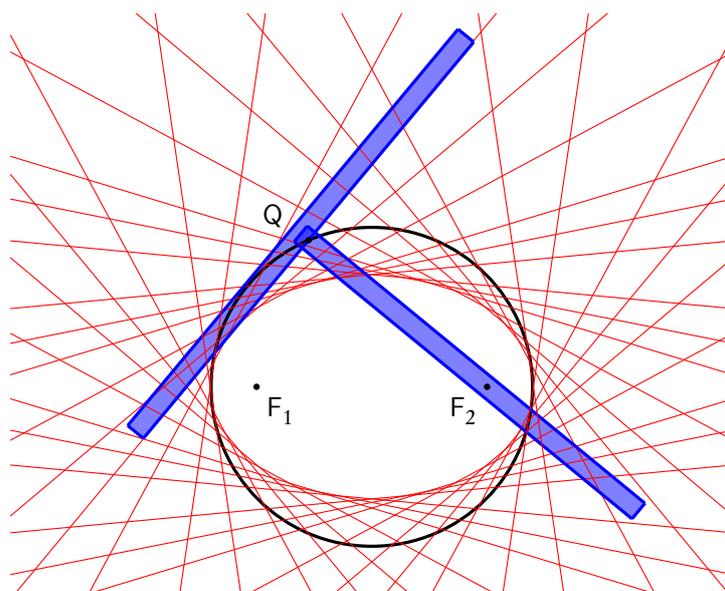


Figura 2.13: *Costruzione dell'ellisse per tangenti*

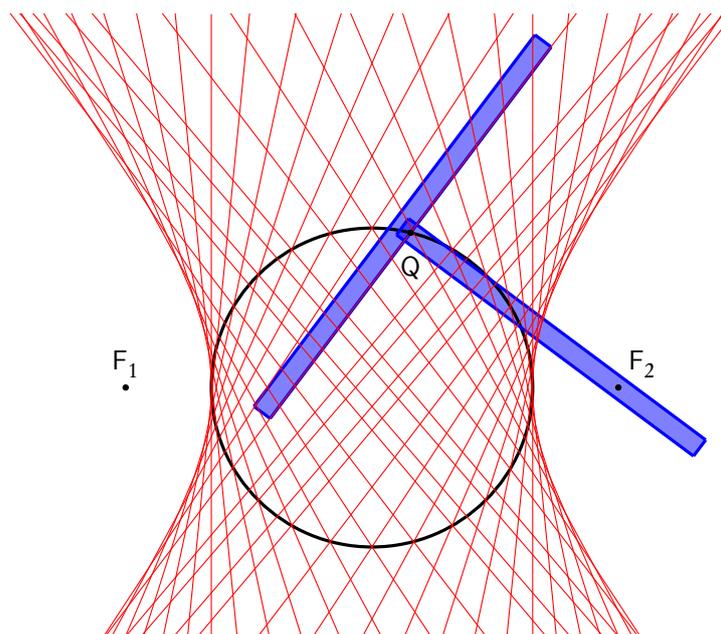


Figura 2.14: *Costruzione dell'iperbole per tangenti*

*generate*, con un opportuno meccanismo, dalla retta e dalla circonferenza, ovvero dalle due linee che sono il fondamento della geometria piana di Euclide.

## 2.4 Il centro di curvatura di una curva

La prima differenza che viene in mente se si paragonano le rette con le circonferenze è il fatto che le rette non hanno alcuna curvatura, mentre le circonferenze sono linee curve e precisamente sono tanto più *incurvate* quanto più sono piccole, cioè quanto minore è il loro raggio. Questa considerazione intuitiva porta alla definizione seguente di *curvatura* per una circonferenza.

Definizione 2.1. Si chiama curvatura di una circonferenza di raggio  $r$  il reciproco del raggio:

$$k = \frac{1}{r}.$$

Poiché una retta si può pensare come una circonferenza di raggio infinito, per la sua curvatura si avrà, come vuole l'intuizione,  $k = 0$ .

Anche per curve più complesse si può definire una curvatura, che potrà variare da punto a punto, con il seguente ragionamento. Sia  $P$  un punto di una curva  $\mathcal{C}$ , e siano  $Q$  e  $S$  altri due punti sulla stessa curva. Per questi tre punti (che supponiamo non allineati) passa una e una sola circonferenza, che varia al variare di  $Q$  e  $S$ , supponendo invece che  $P$  rimanga fisso. Si veda la figura 2.15, dove abbiamo rappresentato due diverse situazioni corrispondenti allo stesso punto  $P$ , nel caso in cui la curva in questione sia una parabola.

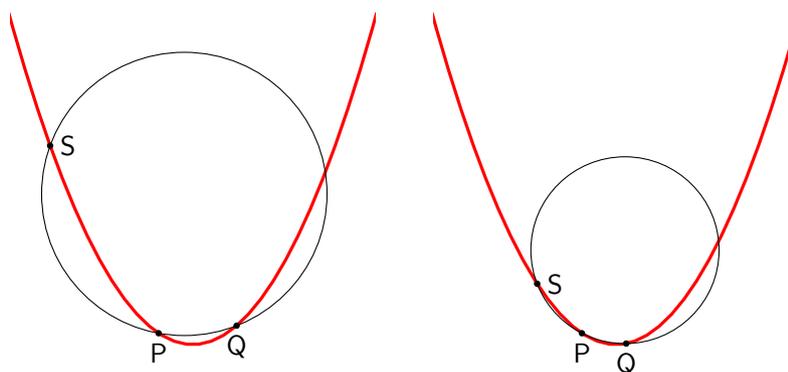


Figura 2.15: Circonferenza per tre punti su una parabola

Se facciamo avvicinare indefinitamente  $Q$  e  $S$  a  $P$ , la circonferenza tende ad assumere, nei casi semplici di nostro interesse, un ben preciso centro e raggio: la corrispondente circonferenza, che è tangente alla curva data, è detta *circonferenza osculatrice* alla curva, il suo raggio è il *raggio di curvatura*, il reciproco del raggio è la *curvatura* e il suo centro il *centro di curvatura*, con riferimento al punto  $P$  scelto. Si veda la figura 2.16 dove è rappresentata questa speciale circonferenza per la parabola e il punto  $P$  già considerati nella figura 2.15.

Come già osservato, questa circonferenza osculatrice è tangente alla curva in questione nel punto  $P$ ; esistono però infinite circonferenze tangenti alla curva nello stesso punto, e precisamente tutte quelle tangenti alla retta tangente: la circonferenza osculatrice è, tra tutte le circonferenze tangenti, la “più tangente di tutte”, cioè quella che meglio approssima la curva nei pressi del punto. Per dirla con i geometri classici è quella che “ha il contatto più intimo con la curva”. In termini un po’ più formali, e senza entrare troppo nel dettaglio, si può dire che, mentre tutte le circonferenze tangenti alla curva in un punto

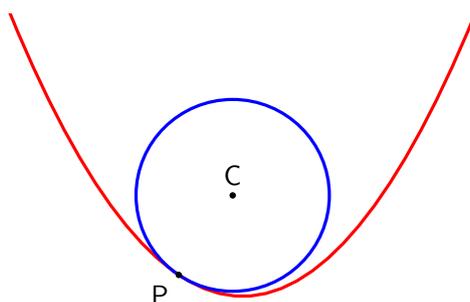


Figura 2.16: *Circonferenza osculatrice ad una parabola in un suo punto*

hanno due punti coincidenti in comune con la curva, la circonferenza osculatrice ha (almeno) tre punti coincidenti in comune con la curva (si dice che ha un contatto almeno “tripunto” con la curva). Si veda la figura 2.17 dove, sempre con riferimento alla stessa situazione trattata nelle figure precedenti, sono visualizzate la retta tangente in P e alcune circonferenze tangenti sempre in P, oltre alla circonferenza osculatrice.

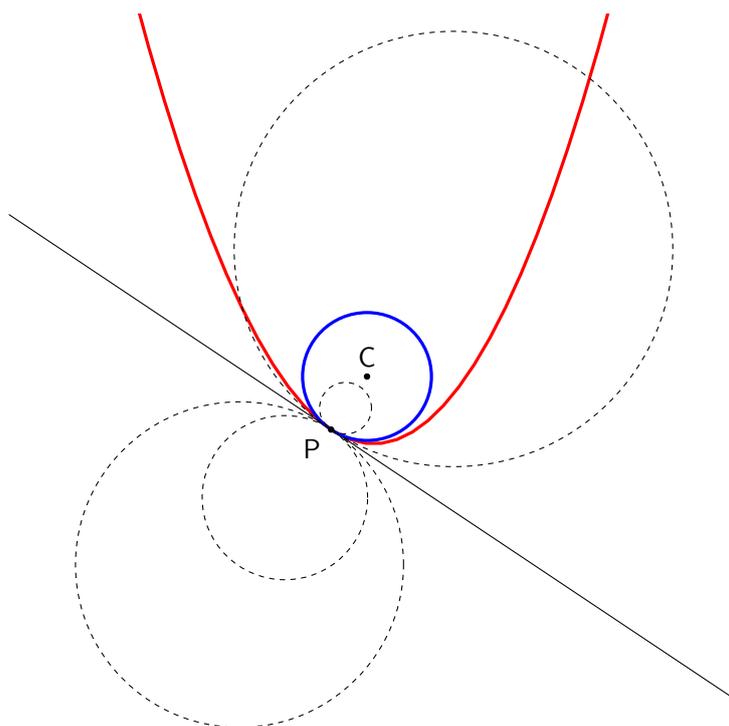


Figura 2.17: *Confronto tra la circonferenza osculatrice e altre circonferenze tangenti a una parabola*

La circonferenza osculatrice cambia da punto a punto e di conseguenza cambia la curvatura della curva da punto a punto, come è intuitivamente evidente. Nella figura 2.18 abbiamo visualizzato le

circonferenze osculatrici in due ulteriori punti, oltre a quello già precedentemente considerato. Si noti come la circonferenza osculatrice nel vertice sia molto piccola (e quindi la sua curvatura molto grande), mentre la circonferenza osculatrice in un punto distante dal vertice è molto grande (e quindi la sua curvatura molto piccola) in perfetto accordo con l'impressione "visiva".

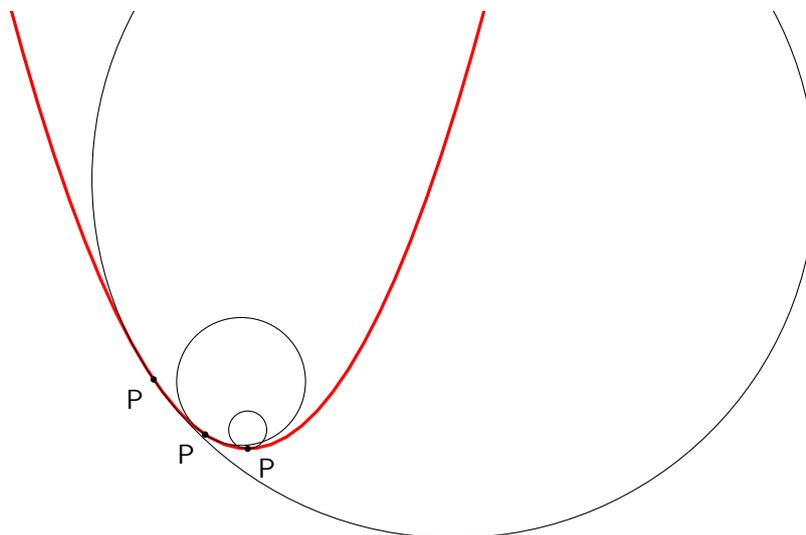


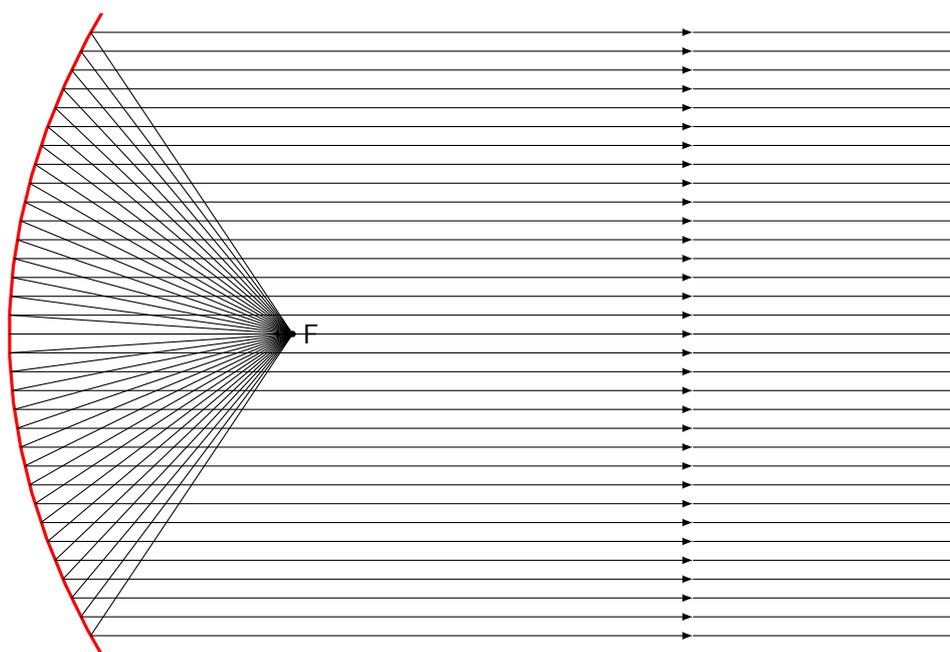
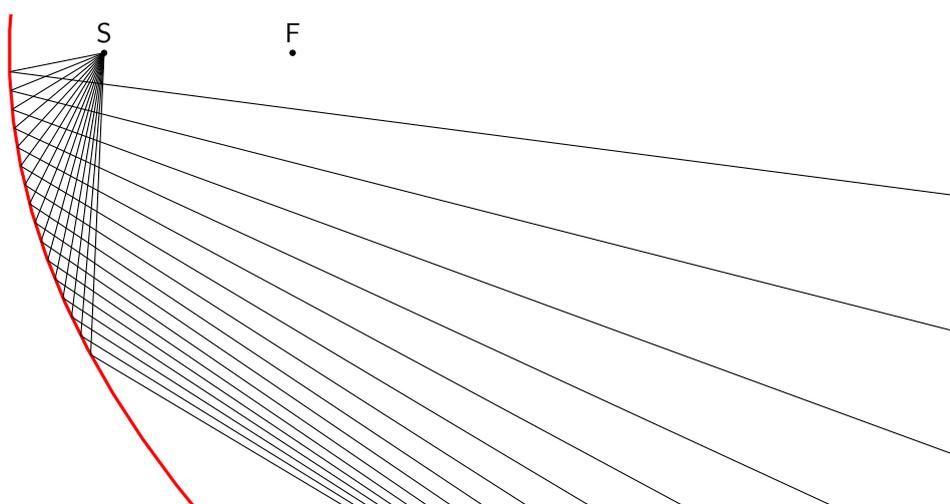
Figura 2.18: Circonferenze osculatrici in diversi punti di una parabola

## 2.5 Proprietà di riflessione delle coniche

Le coniche godono di interessanti proprietà di riflessione molto utilizzate nelle applicazioni. L'idea è quella di pensare alle curve come degli specchi perfettamente riflettenti sia per onde luminose che sonore che elettromagnetiche in generale. Come sappiamo il raggio riflesso è caratterizzato dal fatto che appartiene al piano del raggio incidente e della perpendicolare alla superficie riflettente ed è inoltre tale che l'angolo di incidenza è uguale a quello di riflessione.

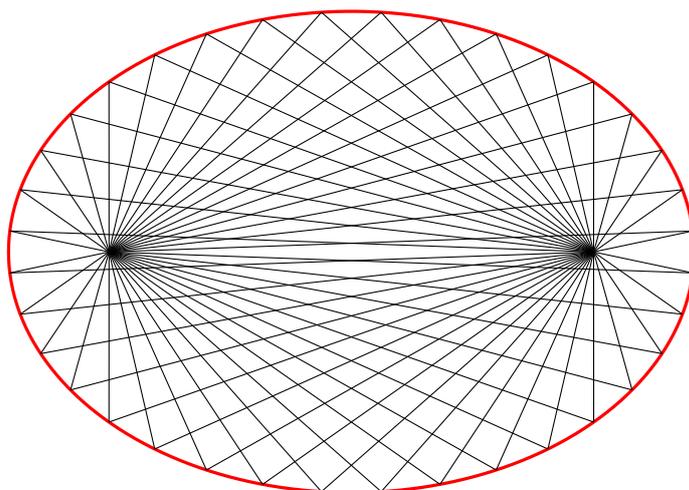
Il caso più famoso è quello della parabola con la sorgente delle onde posta nel fuoco o all'infinito in modo che i raggi viaggino parallelamente all'asse. Nel primo caso tutti i raggi riflessi sono tra di loro paralleli e paralleli all'asse, e quindi non si incontrano, nel secondo caso tutti i raggi riflessi si concentrano nel fuoco. La prima situazione è utilizzata nei fari: accendendo una luce nel fuoco i raggi escono tutti nella medesima direzione (posizione "di fari abbaglianti"); la seconda situazione è utilizzata nelle antenne paraboliche: da una sorgente molto distante si può ritenere che i raggi (non necessariamente luminosi, ma portatori per esempio di onde elettromagnetiche) viaggino parallelamente: se la parabola è orientata in modo che il suo asse sia parallelo ai raggi, essi si concentreranno nel fuoco dove si può sistemare il "raccoglitore di segnale". Si veda la figura 2.19.

Per ragioni di completezza segnaliamo che se la sorgente luminosa viene posta sull'asse della parabola, ma più vicina al vertice rispetto al fuoco, i raggi riflessi non usciranno più paralleli tra di loro. Se si utilizza solo mezza parabola come specchio riflettente, essi potranno avere un comportamento come quello illustrato nella figura 2.20: si tratta della posizione di "fari anabbaglianti".

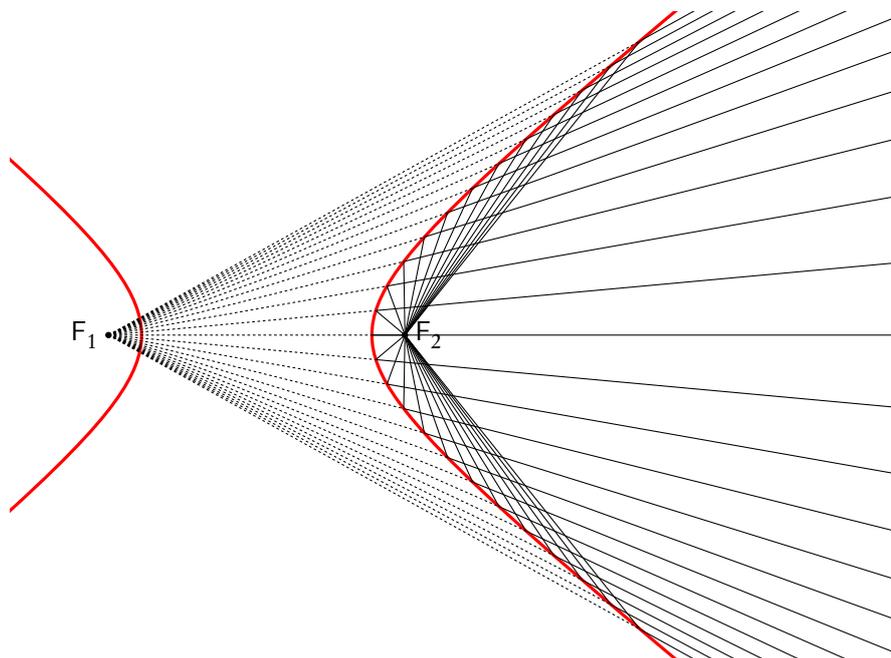
Figura 2.19: *Proprietà di riflessione della parabola*Figura 2.20: *La posizione di "fari anabbaglianti"*

Anche l'ellisse gode di una significativa proprietà di riflessione: tutti i raggi emessi da una sorgente posta in uno dei fuochi convergono verso l'altro fuoco. Se per esempio ci si trova in uno studio di registrazione a soffitto semiellittico, se uno parla in un fuoco, solo chi si trova nell'altro fuoco sentirà distintamente il suono. Si veda la figura 2.21.

Per l'iperbole vale una proprietà sostanzialmente simmetrica rispetto a quella dell'ellisse. I raggi emessi da una sorgente posta in uno dei fuochi vengono riflessi come se provenissero dall'altro fuoco.

Figura 2.21: *Proprietà di riflessione dell'ellisse*

Viceversa i raggi diretti verso un fuoco, se intercettati dall'iperbole, convergono verso l'altro fuoco. Si veda la figura 2.22.

Figura 2.22: *Proprietà di riflessione dell'iperbole*

## 2.6 Equazioni delle coniche

Concludiamo questa breve introduzione alle coniche con un cenno alle loro equazioni. Il risultato analitico più importante è il fatto che una qualunque equazione di secondo grado in due incognite ha per grafico una conica, eventualmente degenera. Come al solito non indichiamo strategie per capire come si può tracciare il grafico a partire dall'equazione o, viceversa, come si può ottenere l'equazione a partire dal grafico, in quanto la matematica sottostante è abbastanza complessa: al solito il risultato si può facilmente ottenere con un opportuno software. Segnaliamo solo, perché la cosa ha un notevole interesse, che per cinque punti del piano passa (tranne casi degeneri) una e una sola conica.

Per esempio l'equazione  $x^2 + 2y^2 - xy + 2x - y - 5 = 0$  ha per grafico l'ellisse rappresentata nella figura 2.23.

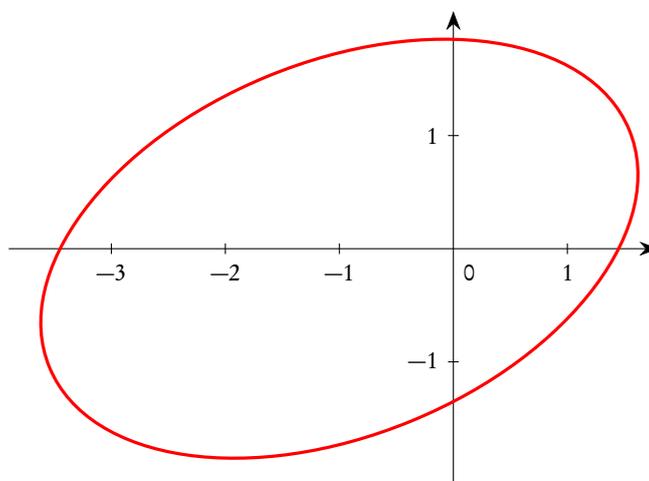


Figura 2.23: Grafico dell'equazione  $x^2 + 2y^2 - xy + 2x - y - 5 = 0$

In alcune configurazioni particolari le equazioni assumono forme particolarmente semplici, che discutiamo molto brevemente.

Per una parabola con vertice nell'origine e asse verticale l'equazione assume la forma

$$y = ax^2,$$

dove  $a$  è una misura dell'"apertura" della parabola stessa. Si veda la figura 2.24, dove sono rappresentate tre parabole con diversa apertura. Il fuoco si trova nel punto  $F = (0, 1/(4a))$ .

Per l'ellisse e l'iperbole con centro nell'origine e fuochi sull'asse delle ascisse le equazioni sono rispettivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

mentre se i fuochi stanno sull'asse delle ordinate le equazioni sono rispettivamente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a < b) \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

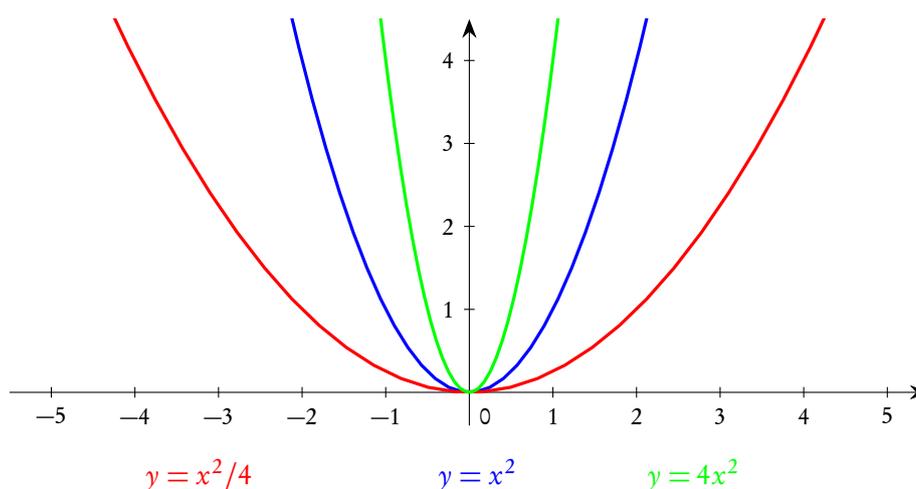


Figura 2.24: Parabole con diversa apertura

I numeri  $a$  e  $b$  sono i semiassi dell'ellisse o dell'iperbole e i fuochi si trovano a distanza  $c$  dal centro, ove  $c$  è dato da

$$c = \sqrt{|a^2 - b^2|} \quad \text{e} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

rispettivamente per il caso dell'ellisse e dell'iperbole. Si vedano le figure 2.25 e 2.26. Le due rette tracciate nella figura 2.26 si chiamano *asintoti* e si possono considerare le “tangenti all'infinito” all'iperbole.

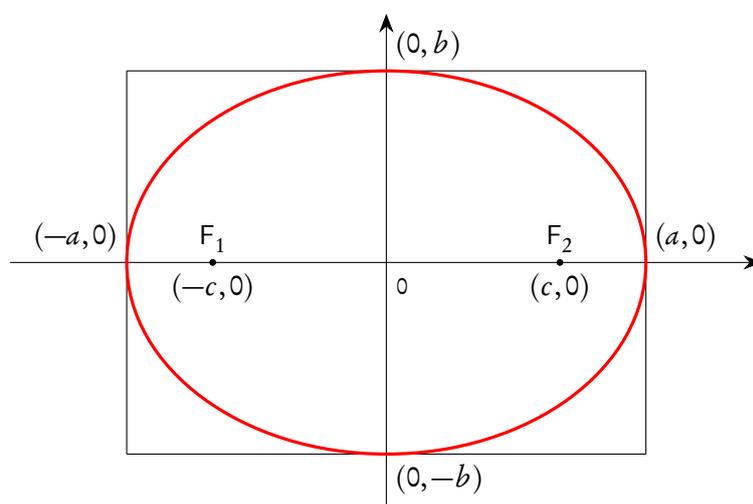


Figura 2.25: Ellisse con centro nell'origine e fuochi sull'asse  $x$ .

Le equazioni parametriche di ellisse, iperbole e parabola nei casi particolari appena considerati sono,

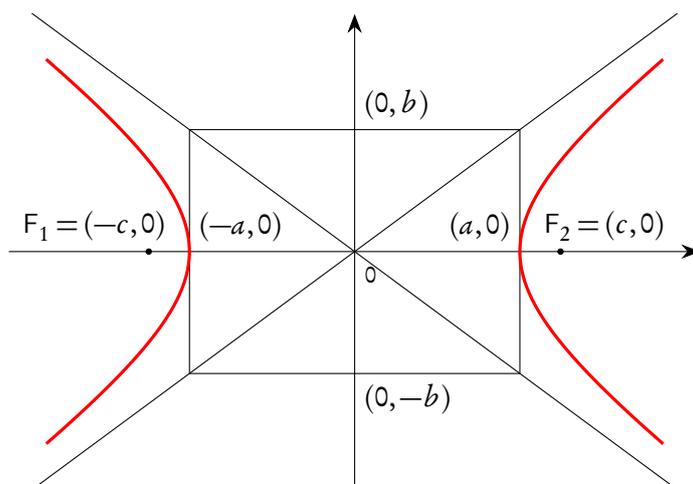


Figura 2.26: Iperbole con centro nell'origine e fuochi sull'asse  $x$

rispettivamente,

$$\begin{cases} x = a \cos(t) \\ y = b \sin(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \begin{cases} x = a \sec(t) \\ y = b \tan(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad \begin{cases} x = t \\ y = at^2 \end{cases} .$$

## 2.7 Proprietà di similitudine delle parabole

Concludiamo questo capitolo sulle coniche con una importante osservazione che distingue la parabola dalle altre due coniche: mentre tutte le parabole sono tra di loro simili, nel senso che possono essere ottenute da una sola parabola con una opportuna dilatazione, ciò non accade per l'ellisse e l'iperbole. È come dire che le parabole hanno tutte la stessa forma e variano solo in dimensione, mentre ciò non succede per l'ellisse e l'iperbole.

Vediamo di spiegare il senso di questa affermazione. È a tutti noto cosa si intenda per triangoli simili, ovvero triangoli che hanno la stessa forma, ma non le stesse dimensioni. Il modo più semplice per evidenziare graficamente la similitudine di due triangoli è tramite il concetto di *omotetia*, o *dilatazione*, concetto che richiamiamo brevemente anche per la sua importanza nelle applicazioni.

Dati un punto  $O$  e un numero reale  $k \neq 0$ , una omotetia di centro  $O$  e rapporto  $k$  è una trasformazione del piano che muta ogni punto  $P$  del piano in un altro punto  $P'$  sulla semiretta  $OP$ , se  $k > 0$ , oppure sulla semiretta opposta, se  $k < 0$ , e tale che il rapporto delle distanze di  $P'$  e  $P$  da  $O$  valga  $|k|$ :

$$\frac{|OP'|}{|OP|} = |k|.$$

La figura 2.27 illustra l'effetto di una omotetia di rapporto 2 su un triangolo  $ABC$

Effettuando opportune traslazioni e rotazioni, tutte le ellissi, iperbole e parabole possono essere ricondotte ad avere centro (o vertice per le parabole) nell'origine. Se ora consideriamo una qualunque parabola  $y = ax^2$  è facile constatare che essa può essere ottenuta dalla parabola  $y = x^2$  mediante una

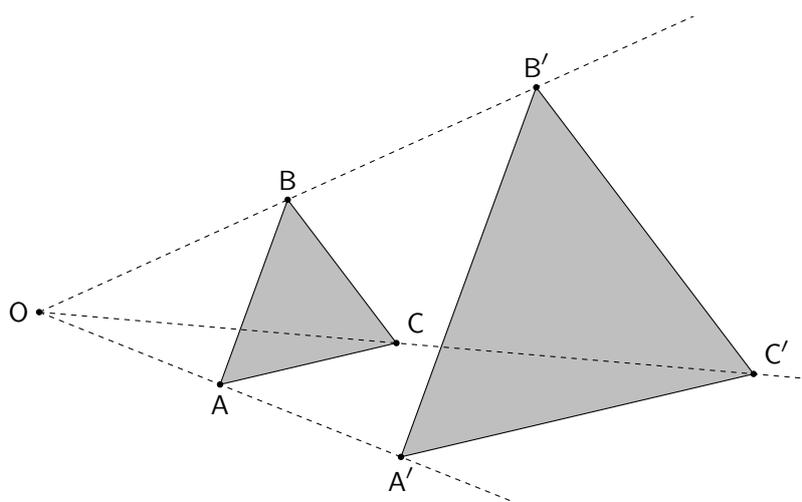


Figura 2.27: Effetto di un'omotetia su un triangolo ABC

omotetia di centro l'origine e rapporto  $k = 1/a$ . Si veda la figura 2.28 in cui abbiamo rappresentato la parabola  $y = 0.25x^2$ , ottenuta per dilatazione di un fattore 4 dalla parabola  $y = x^2$ :

$$\frac{|\overline{OA'}|}{|\overline{OA}|} = \frac{|\overline{OB'}|}{|\overline{OB}|} = \dots = 4.$$

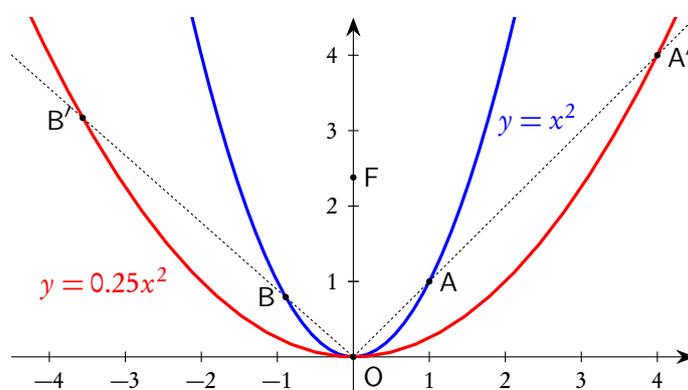


Figura 2.28: Similitudine tra le parabole

Nulla di simile succede per le ellissi e le iperbole, come si può facilmente sperimentare. Il tutto è legato al fatto che nell'equazione di una parabola compare un solo parametro,  $a$ , mentre nell'equazione dell'ellisse e dell'iperbole ne compaiono due,  $a$  e  $b$ .



## 3 Altre curve famose

In questo capitolo proponiamo alcune altre curve storicamente importanti e interessanti dal punto di vista grafico.

### 3.1 Caustiche di riflessione

A partire da curve note si possono ottenere, con opportuni procedimenti, altre curve. Esamineremo alcune situazioni significative dal punto di vista delle applicazioni grafiche, in particolare con riferimento alle coniche.

Cominciamo dalle caustiche di riflessione, in cui si estende l'idea, già considerata, di interpretare le curve come superfici perfettamente riflettenti. In alcuni casi i raggi riflessi dagli specchi curvi, pur non convergendo in un punto o uscendo tutti paralleli come nella parabola, non si sparpagliano casualmente, ma si addensano lungo certe linee creando una curva involuppo, ossia una curva tangente a tutti. Questa curva involuppo si chiama *caustica di riflessione*. Con certe curve e le sorgenti poste in particolari posizioni si ottengono situazioni di grande interesse grafico.

La situazione più famosa è quella dello specchio circolare con la sorgente posta in un punto della circonferenza. La curva che si ottiene ha una forma inequivocabile e viene detta *cardioide*. Si veda la figura 3.1.

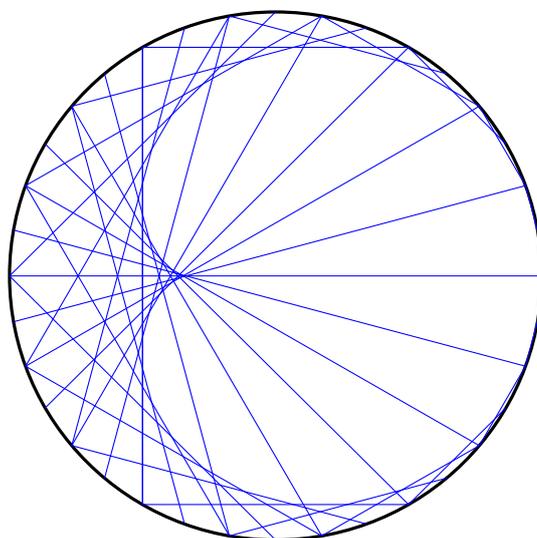


Figura 3.1: *La cardioide come caustica di riflessione di una circonferenza*

È interessante notare che se i raggi, proseguendo nel loro cammino, subiscono una seconda riflessione, generano una seconda cardioide, più piccola della precedente.

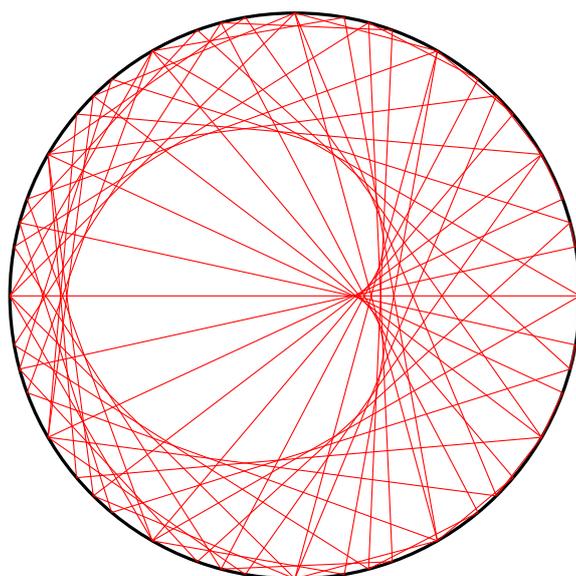


Figura 3.2: *Una seconda cardioide come caustica di riflessione di una circonferenza*

La figura 3.3 illustra la situazione descritta utilizzando un anello circolare come specchio.



Figura 3.3: *Cardioide prodotta per riflessione su uno specchio circolare*

Utilizzando le riflessioni si possono costruire molte altre curve interessanti. Sempre sulla circonferenza è particolarmente significativa la situazione in cui la sorgente luminosa sia posta all'infinito, per cui i raggi incidenti si possono ritenere tra di loro paralleli. In questo caso è naturale che conviene considerare

solo uno specchio semicircolare, per permettere ai raggi di “penetrare”. La figura 3.4 illustra il risultato, nell’ipotesi che la sorgente sia posta all’infinito in basso.

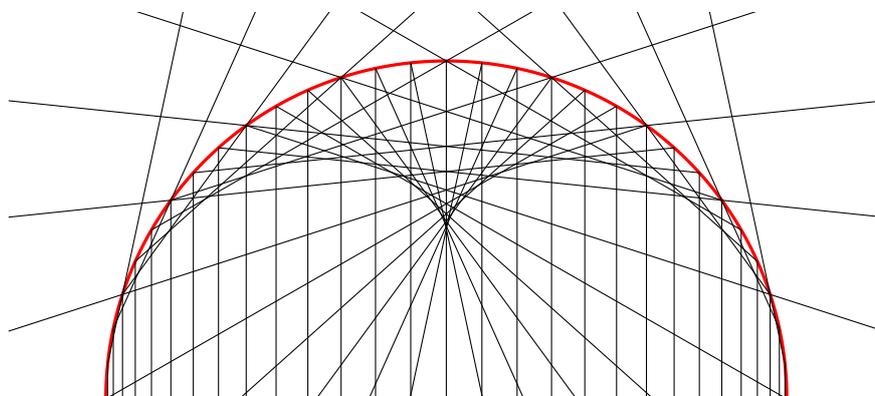


Figura 3.4: *Caustica di riflessione; specchio semicircolare con sorgente all’infinito*

Se costruiamo la simmetrica della precedente figura rispetto al diametro limite della semicirconferenza otteniamo l’intera curva di riflessione, che è detta *nefroide*. Si veda la figura 3.5.

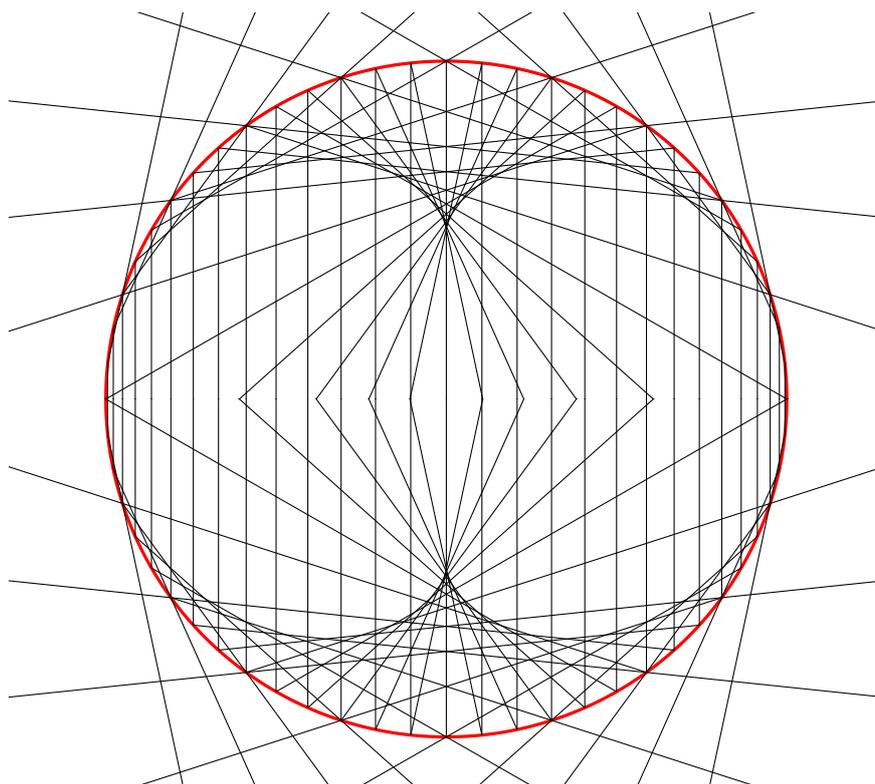


Figura 3.5: *La nefroide come caustica di riflessione di una circonferenza con sorgente all’infinito*

La nefroide può essere costruita in molti altri modi; segnaliamo qui solo la costruzione come caustica di riflessione di una cardioide in cui la sorgente luminosa sia posta nella cuspidale della cardioide stessa. Si veda la figura 3.6.

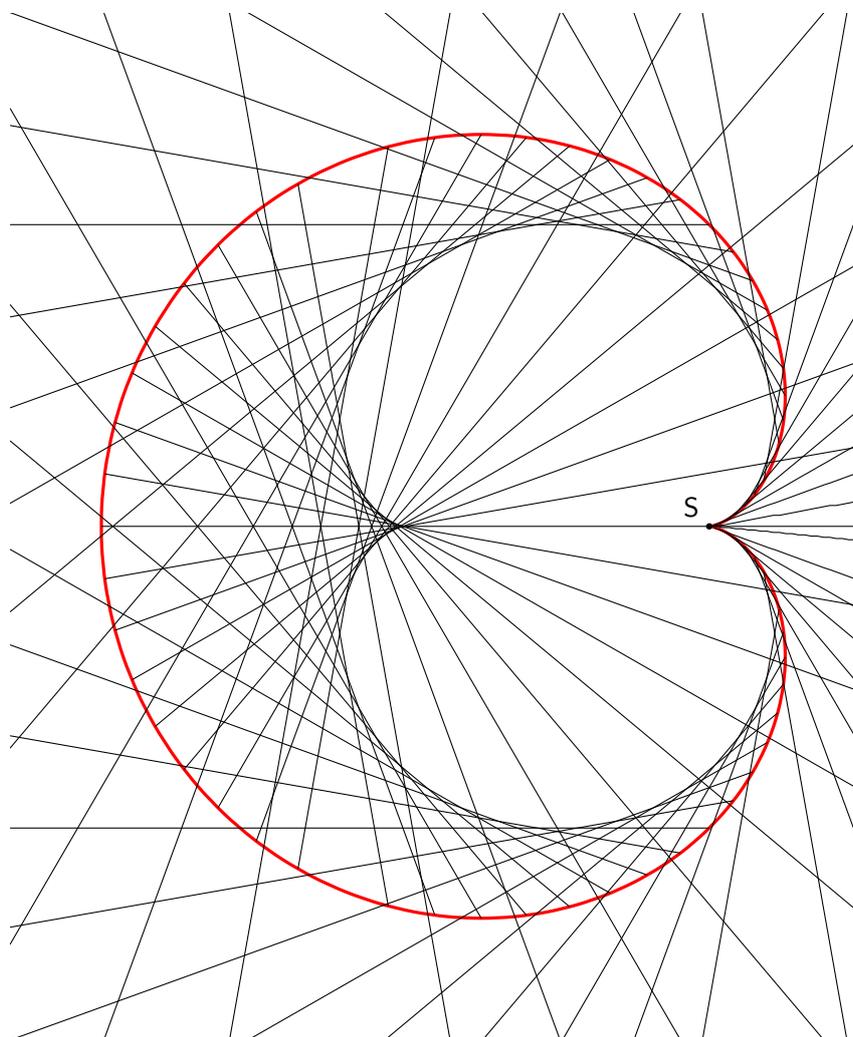


Figura 3.6: *Nefroide come caustica di riflessione di una cardioide*

### 3.2 Evolute

Un altro modo per ottenere nuove curve a partire da curve note è quello di considerare il luogo dei centri di curvatura di una curva. Poiché in ogni caso il centro di curvatura di una curva in un punto  $P$  si trova sulla perpendicolare alla tangente in  $P$  alla curva, le curve luogo dei centri di curvatura si possono ottenere anche come involuppo delle perpendicolari ad una curva nei suoi punti. Queste curve si chiamano *evolte* delle curve date. Esamineremo i casi delle evolte delle tre coniche.

Cominciamo dall'ellisse, la cui evoluta è una curva particolarmente significativa dal punto di vista grafico, ed è detta *curva di Lamè*. Si tratta di un'*astroide*, curva di cui parleremo più avanti, più o meno allungato.

Esattamente come l'ellisse può essere più o meno allungata (si dice con *eccentricità* più o meno elevata), anche l'evoluta dell'ellisse può assumere diverse forme, come mostrato nelle figure 3.7 e 3.8.

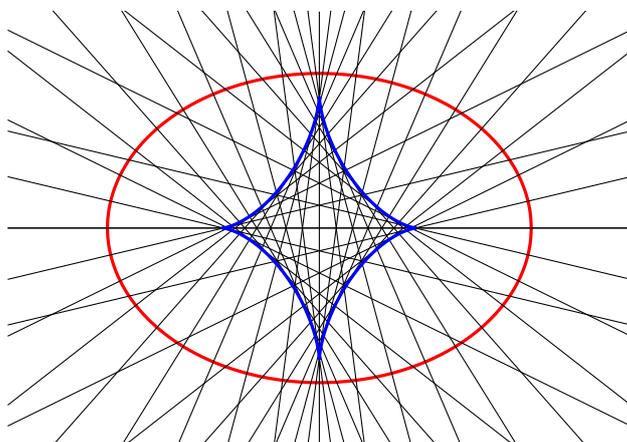


Figura 3.7: Evoluta di un'ellisse: "astroide schiacciato"

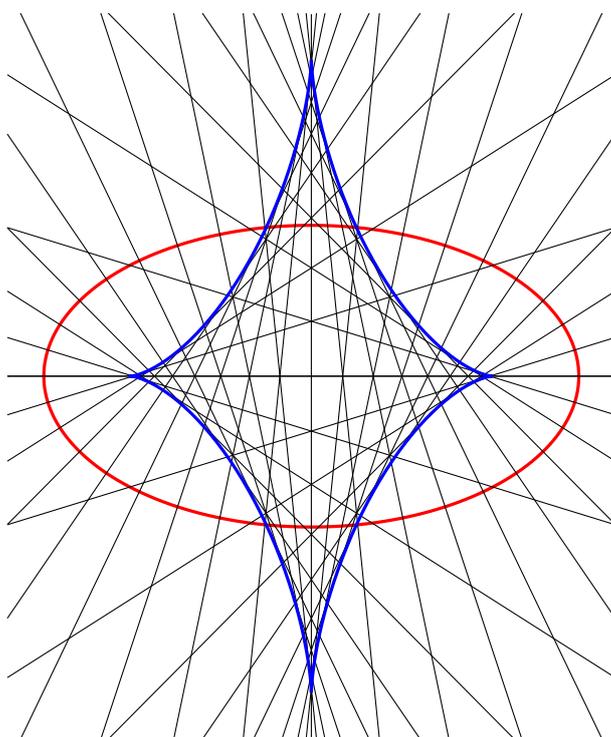


Figura 3.8: Ancora un'evoluta di un'ellisse, che mostra un diverso grado di allungamento dell'astroide

Per l'iperbole l'evoluta è mostrata nella figura 3.9. Si tratta in sostanza di due rami di curva simili a due semicurve di Lamè, infinitamente estese.

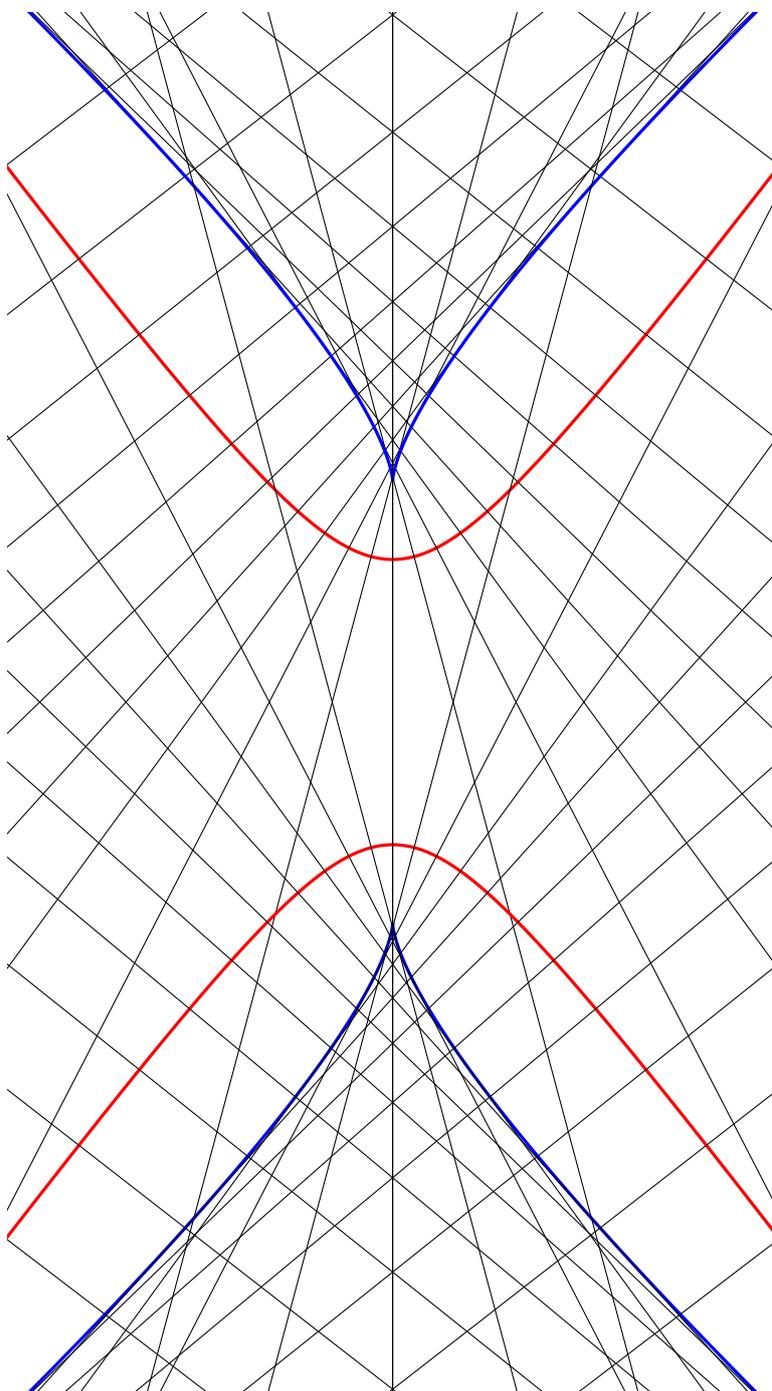


Figura 3.9: *Evoluta di un'iperbole*

Passiamo infine alla parabola, la cui evoluta, nota come *parabola semicubica*, è mostrata nella figura 3.10.

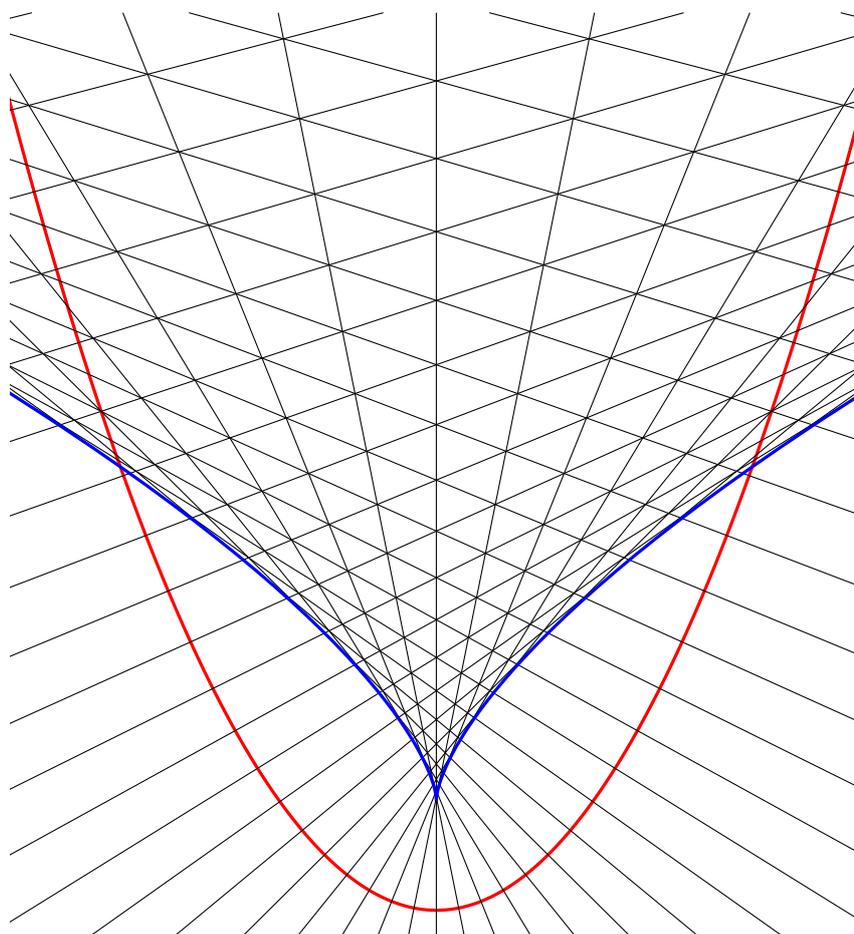


Figura 3.10: *Parabola semicubica come evoluta di una parabola*

### 3.3 Rullette

Un altro modo per ottenere nuove curve a partire da curve note è quello di considerare la traccia lasciata da un punto su una curva che rotola senza strisciare su un'altra curva: queste curve sono anche chiamate *rullette*, anche se spesso questo termine è riservato alla *cicloide*, che Pascal chiamò appunto *roulette*.

La cicloide è la più semplice curva tipo roulette e si ottiene considerando un punto  $P$  fisso su una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta, vedi la figura 3.11.

Anche le curve che si ottengono considerando un punto  $P$  interno o esterno alla circonferenza che rotola, ma sempre solidale alla circonferenza stessa, si chiamano cicloidi e la loro forma varia a seconda che il punto  $P$  sia interno o esterno alla circonferenza che rotola. Si vedano le figure 3.12 e 3.13.

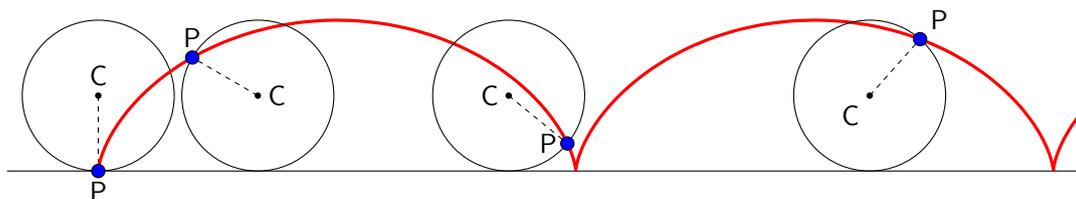


Figura 3.11: Cicloide generata da un punto di una circonferenza che rotola su un'altra circonferenza

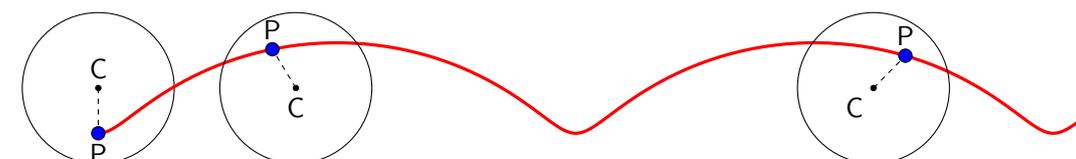


Figura 3.12: Cicloide generata da un punto interno a una circonferenza che rotola su un'altra circonferenza

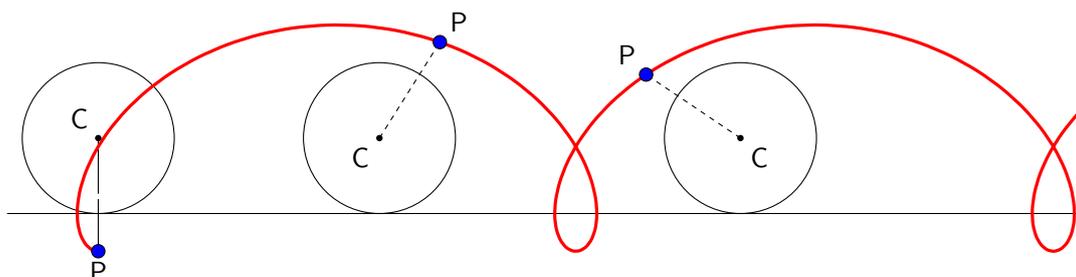


Figura 3.13: Cicloide generata da un punto esterno a una circonferenza che rotola su un'altra circonferenza

Una immediata generalizzazione del processo che porta a costruire la cicloide si ottiene facendo rotolare la circonferenza mobile su un'altra circonferenza: se la circonferenza mobile rotola all'esterno le curve che si ottengono si chiamano *epicicloidi*, se rotola all'interno *ipocicloidi*.

Nel caso particolare che le due circonferenze abbiano lo stesso raggio la curva che si ottiene è una *cardioide*, curva che abbiamo già ottenuto come caustica di riflessione. Si veda la figura 3.14.

Esattamente come nel caso della cicloide si può considerare la punta scrivente posta in un punto  $P$  sempre solidale alla circonferenza rotante, ma posto internamente o esternamente alla circonferenza stessa. Le curve che si ottengono si chiamano *epitrocoidi* o *ipotrocoidi* a seconda che la circonferenza rotante sia esterna o interna a quella fissa.

Nel caso particolare di due circonferenze di uguale raggio le curve che si ottengono (e di cui la cardioide è un caso particolare) si chiamano *Lumache di Pascal*: esse sono state investigate per primo da Dürer e poi riscoperte da Étienne Pascal, padre del più noto Blaise Pascal. Si vedano le figure 3.15 e 3.16, dove si considerano rispettivamente i casi di punta scrivente interna (lumaca senza nodo) ed esterna (lumaca con nodo) alla circonferenza rotante.

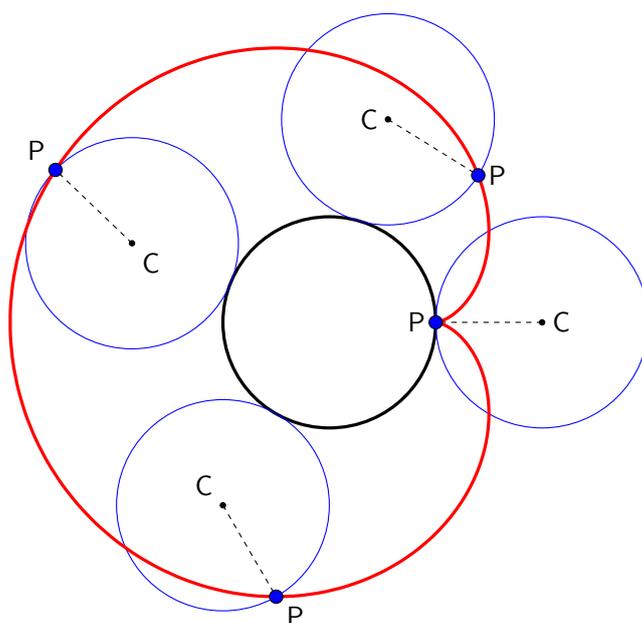


Figura 3.14: *Cardioide generata da un punto su una circonferenza che rotola su una seconda circonferenza*

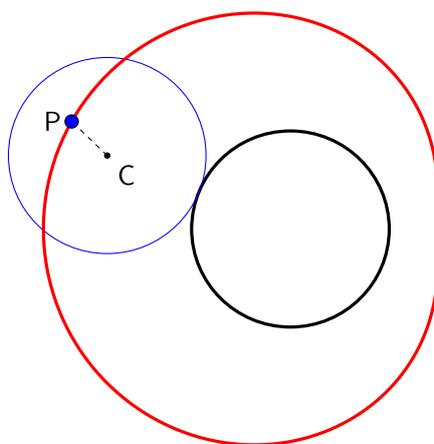


Figura 3.15: *Lumaca di Pascal senza nodo generata da un punto interno a una circonferenza che rotola su un'altra circonferenza*

Proponiamo anche, solo per il “piacere degli occhi”, l’epicicloide che si ottiene quando il rapporto tra i raggi della circonferenza fissa e della circonferenza rotante vale 3.8. Si veda la figura 3.17

Passiamo ora a considerare qualche ipocicloide, cioè curve ottenute piazzando la punta scrivente su una circonferenza di raggio  $r$  che rotola all’interno di un’altra circonferenza di raggio  $R$ , ovviamente

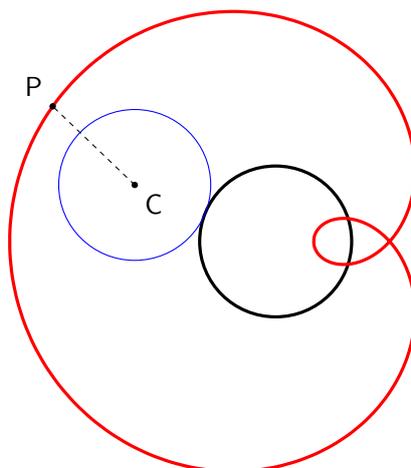


Figura 3.16: *Lumaca di Pascal con nodo generata da un punto interno a una circonferenza che rotola su un'altra circonferenza*

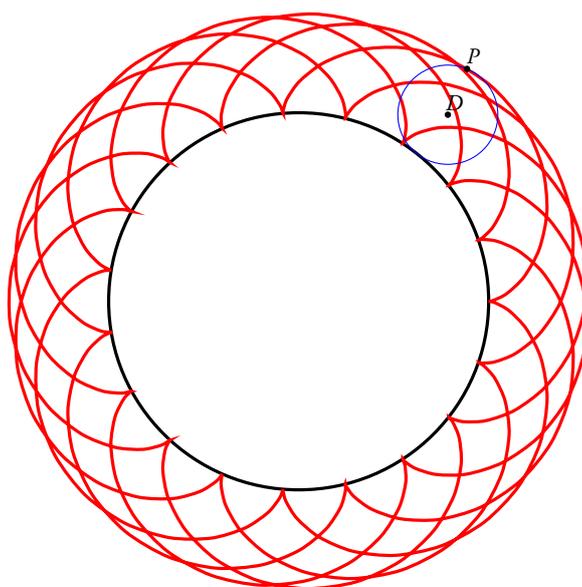


Figura 3.17: *Epicloide con rapporto  $R/r = 3.8$*

con  $R > r$ .

I primi casi interessanti sono quelli in cui  $R/r = 3$ , quando la curva ottenuta si chiama *deltoide*, e  $R/r = 4$ , quando la curva ottenuta si chiama *astroide*. Si veda la figura 3.18.

Con valori non interi del rapporto  $R/r$  si ottengono curve più complesse, intrecciate, e che si

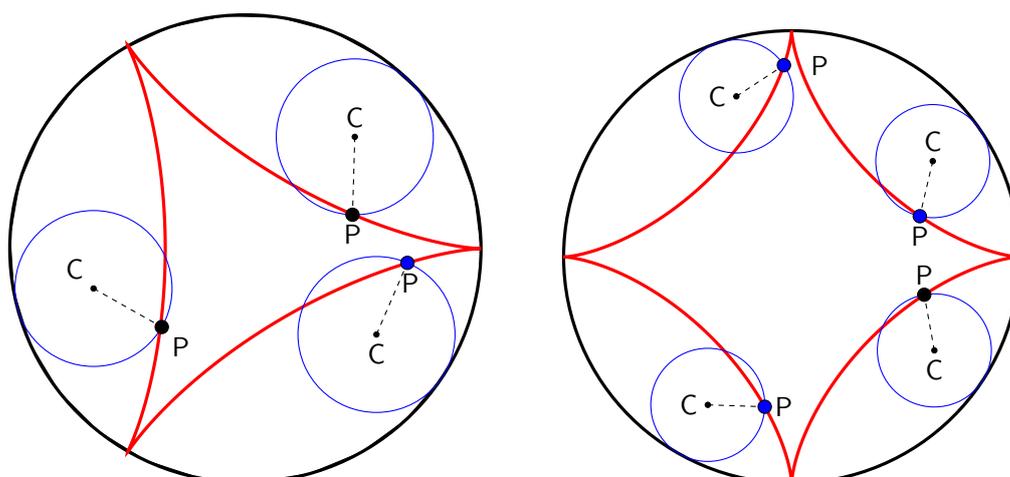


Figura 3.18: *Deltoide e astroide come ipocicloidi*

chiudono dopo un maggior numero di giri se il rapporto è razionale, non si chiudono mai se il rapporto è irrazionale. Si veda la figura 3.19.

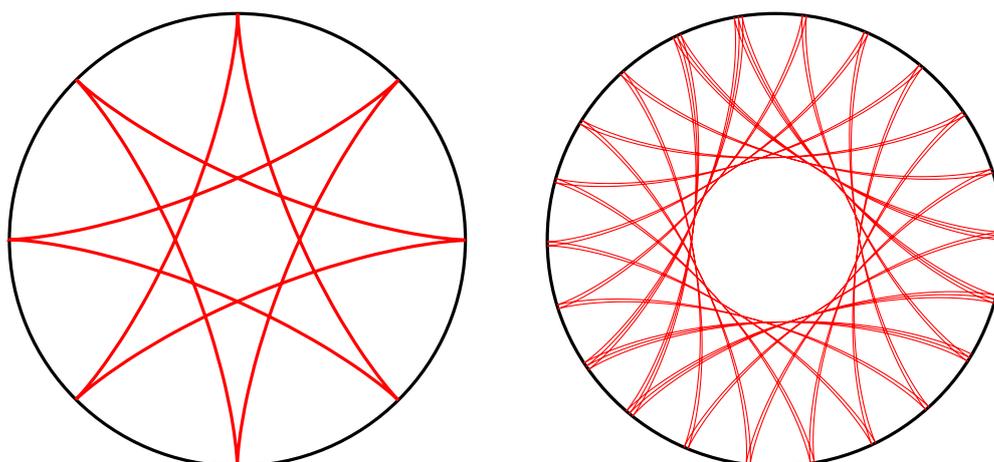


Figura 3.19: *Ipicicloidi con rapporto  $R/r = 8/3$  e  $R/r = \pi$*

Alcune altre curve sono trattate nel testo in uso, segnaliamo in particolare la concoide, la cissoide e la catenaria.



## 4 La matematica delle tre dimensioni

La trattazione di curve nello spazio o di superfici richiede qualche ulteriore approfondimento matematico.

Si tratta di gestire tre variabili, normalmente indicate con  $x, y, z$ , anziché due: ogni punto  $P$  dello spazio avrà tre coordinate cartesiane e scriveremo  $P = (x_P, y_P, z_P)$ . Si veda la figura 4.1.

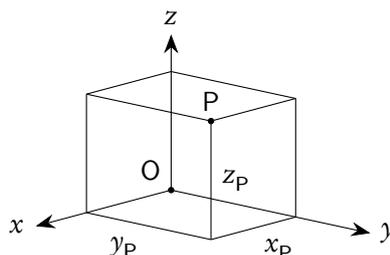


Figura 4.1: *Coordinate cartesiane nello spazio*

In estensione a quanto detto per il caso di due dimensioni potremo considerare grafici di funzioni di due variabili, equazioni in tre incognite, equazioni parametriche. Anche qui si possono considerare grafici simili alle coordinate polari, che di solito si chiamano più propriamente coordinate sferiche, ma non ne faremo cenno.

Per quanto riguarda i grafici di funzioni proponiamo solo un esempio: si passa da un'equazione del tipo  $y = f(x)$  a una del tipo  $z = f(x, y)$ , e naturalmente ci serviremo solo di opportuni software per visualizzare il risultato, non avendo noi alcuno strumento atto a trattare il problema analiticamente. Si veda la figura 4.2.

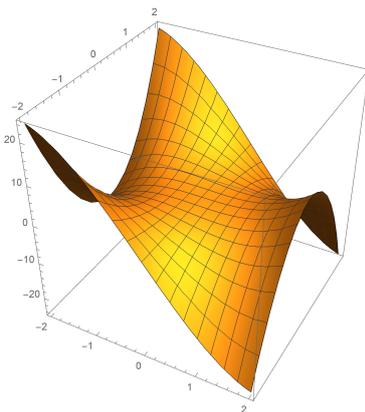


Figura 4.2: *Grafico della funzione  $z = x^3 - 4xy^2$*

Anche per le equazioni in tre incognite proponiamo un esempio, segnalando che ne ripareremo parlando di superfici legate alle coniche. Si veda la figura 4.3.

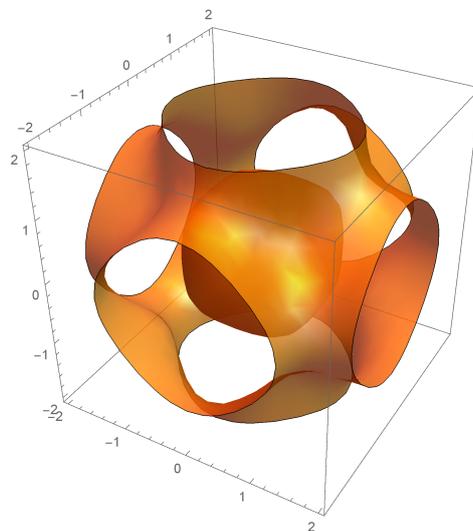


Figura 4.3: Grafico dell'equazione  $x^4 + y^4 + z^4 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 + 3(x^2 + y^2 + z^2) = 3$

Un cenno particolare meritano le equazioni parametriche, mediante le quali si possono trattare con procedure simili sia le curve che le superfici. In particolare:

1. se si considerano tre equazioni (anziché due come nel piano) con un solo parametro si avrà come grafico una curva;
2. se si considerano tre equazioni, ma con due parametri, si avrà come grafico una superficie.

Proponiamo un esempio per ciascuno dei due casi.

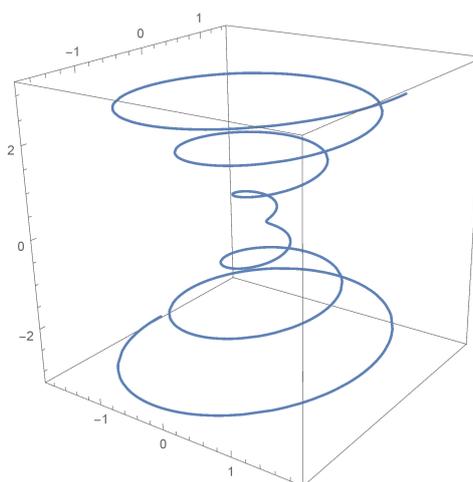


Figura 4.4: Grafico della curva  $x = t \cos(t)/10$ ,  $y = t \sin(t)/10$ ,  $z = t/6$

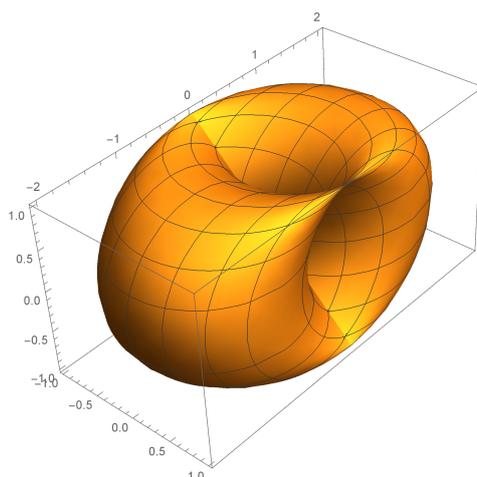


Figura 4.5: Grafico della superficie  $x = \cos(u)$ ,  $y = \sin(u) + \cos(v)$ ,  $z = \sin(v)$

Per concludere questa introduzione proponiamo la curva utilizzata per la cucitura della palla da tennis e una immagine che mostra una sfera con sovrapposta questa curva.

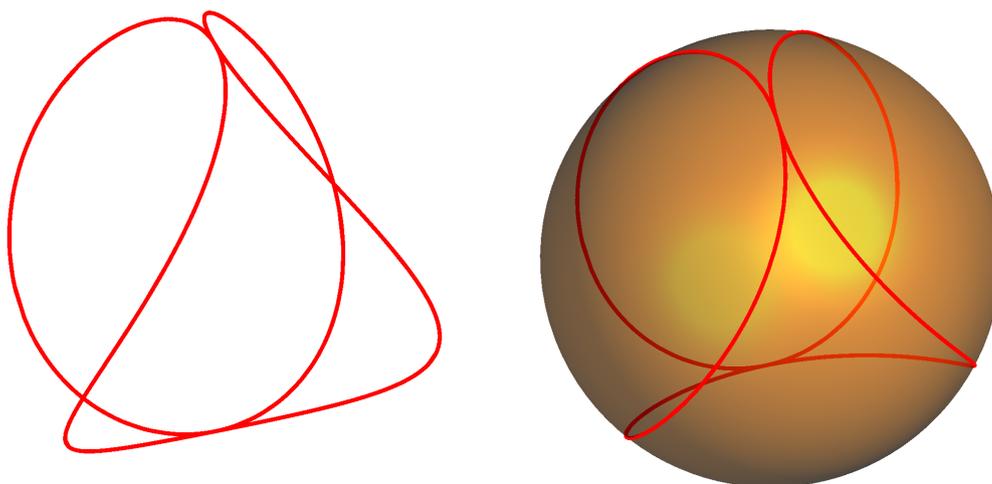


Figura 4.6: Palla da tennis e sua cucitura

Le equazioni della curva sono:

$$\begin{cases} x = 0.5 \cos(t) + 0.5 \cos(3t) \\ y = 0.5 \sin(t) - 0.5 \sin(3t) \\ z = \sin(2t) \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$



## 5 Esempi di superfici

Alcune superfici molto interessanti nelle applicazioni si possono ottenere a partire dalle coniche, con opportune rotazioni ed eventualmente dilatazioni. Si veda anche il libro di testo adottato per ulteriori superfici.

Un paraboloido ottenuto per rotazione di una parabola attorno alla tangente nel vertice. Ha equazioni parametriche  $x = t^2 \cos(u)/2$ ,  $y = t$ ,  $z = t^2 \sin(u)/2$  (figura 5.1).

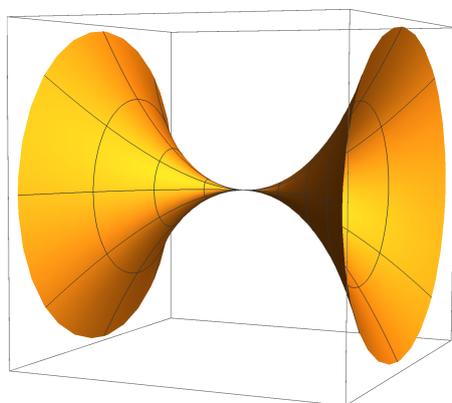


Figura 5.1: *Paraboloide di rotazione*

Paraboloide ottenuto da una mezza rotazione di una parabola attorno a una parallela alla tangente nel vertice: figura 5.2.

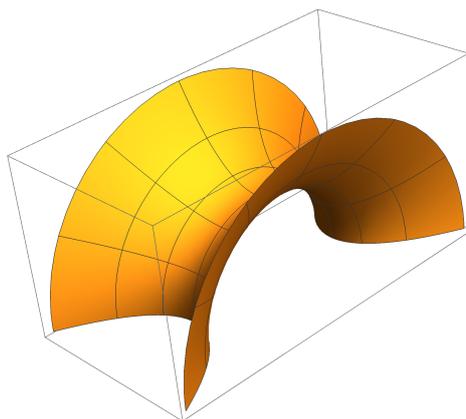


Figura 5.2: *Superficie ottenuta da una mezza rotazione di una parabola*

Superficie toroidale ottenuta ruotando una circonferenza attorno ad un asse esterno alla stessa: figura 5.3.

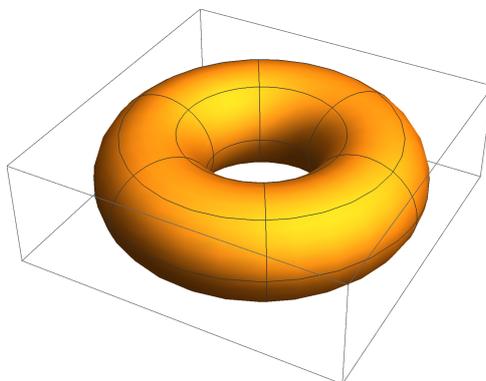


Figura 5.3: *Superficie toroidale*

Naturalmente la superficie ottenuta può avere un aspetto completamente diverso a seconda dell'asse di rotazione scelto. Consideriamo per esempio la curva  $y = x^4 - x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$ , mostrata nella figura 5.4.

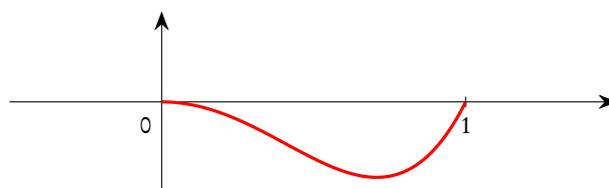


Figura 5.4: *Grafico di  $y = x^4 - x^2$ , con  $0 \leq x \leq 1$*

La figura 5.5 mostra la superficie ottenuta per rotazione attorno all'asse verticale, la 5.6 quella ottenuta per rotazione attorno all'asse orizzontale, la 5.7 quella ottenuta per rotazione attorno ad un asse obliquo.

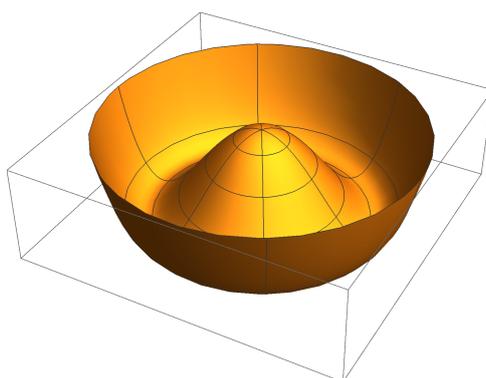


Figura 5.5: *Rotazione della curva della figura 5.4 rispetto all'asse verticale*

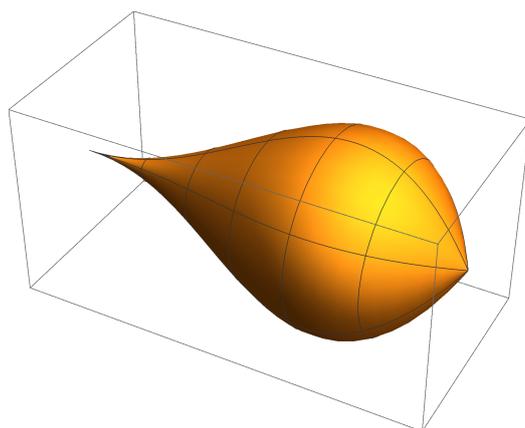


Figura 5.6: Rotazione della curva della figura 5.4 rispetto all'asse orizzontale

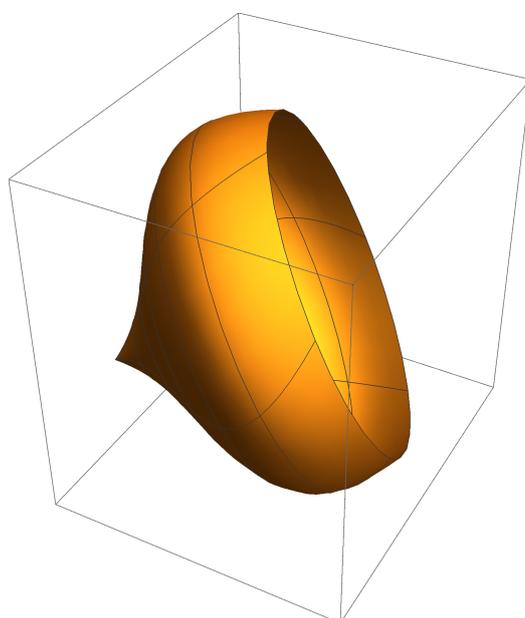


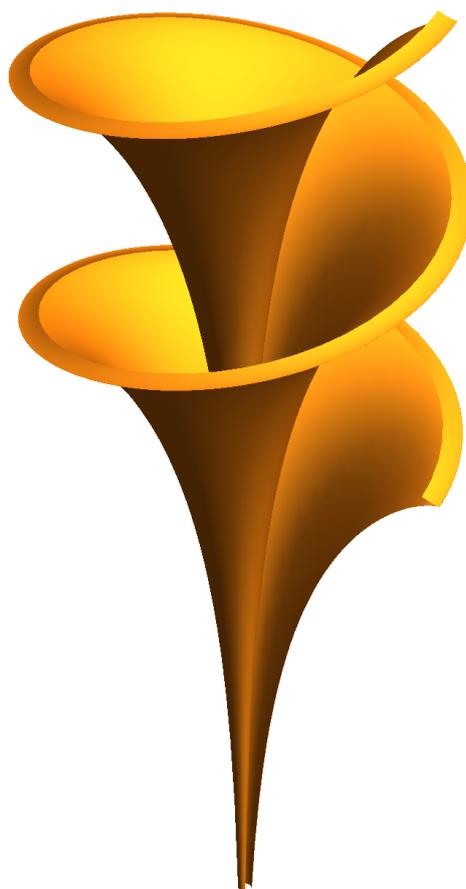
Figura 5.7: Rotazione della curva della figura 5.4 rispetto ad un asse obliquo

Solo per il piacere degli occhi proponiamo qualche altra immagine di superfici particolarmente interessanti.

La superficie di Dini, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos(u) \sin(v) \\ y = \sin(u) \sin(v) \\ z = \cos(v) + \ln(\tan(v/2)) + \frac{u}{5} \end{cases},$$

vedi la figura 5.8.

Figura 5.8: *La superficie di Dini*

L'ellissoide astroidale, in sostanza l'equivalente tridimensionale dell'astroide, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (\cos(u) \cos(v))^3 \\ y = (\sin(u) \cos(v))^3 \\ z = (\sin(v))^3 \end{cases},$$

rappresentato in ultima di copertina.

Una superficie “a Dervish”, rappresentata in ultima di copertina, e la cui equazione è decisamente troppo complessa per essere riprodotta qui. Col termine “derviscio” si indicano i discepoli di alcune confraternite islamiche che, per il loro difficile cammino di ascesi, sono chiamati a distaccarsi nell'animo dalle passioni mondane e, per conseguenza, dai beni e dalle lusinghe del mondo. La superficie proposta rappresenta un derviscio roteante.

Una cubica di Cayley, di equazione cartesiana

$$-5(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x) + 2(xy + xz + yz) = 0,$$

vedi la figura 5.9, dove abbiamo proposto due diverse visuali, per evidenziare la struttura della superficie.

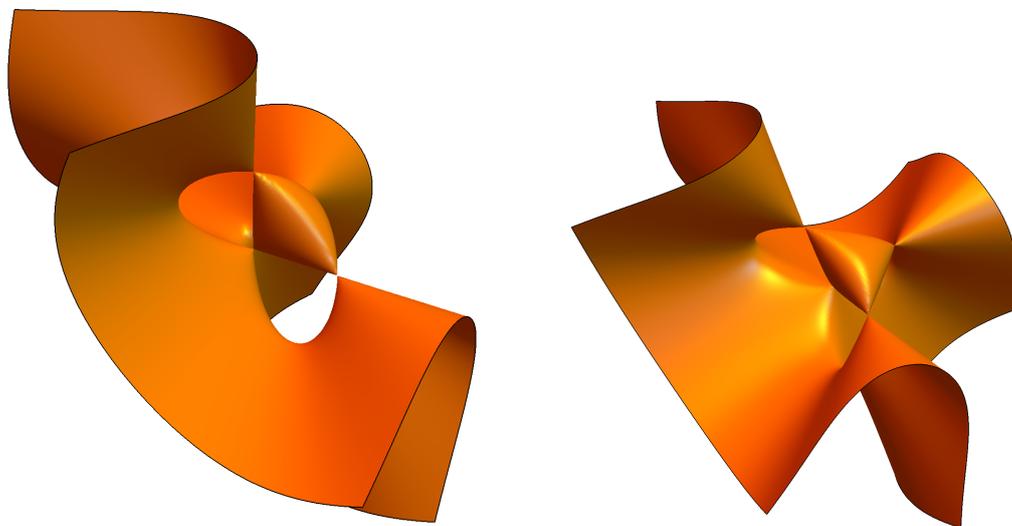


Figura 5.9: *Una cubica di Cayley, in due diverse prospettive*

La cubica diagonale di Clebsh, vedi la figura 5.10, di equazione cartesiana

$$81(x^3 + y^3 + z^3) - 189(x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y) + 54xyz + \\ + 126(xy + xz + yz) - 9(x^2 + y^2 + z^2) - 9(x + y + z) - 1 = 0$$

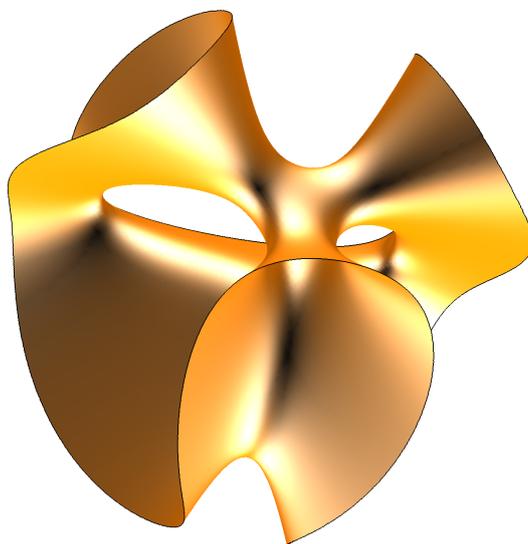


Figura 5.10: *La cubica diagonale di Clebsh*

La superficie di Richmond, vedi la figura 5.11, la cui equazione è troppo complessa per essere riportata in questi appunti.

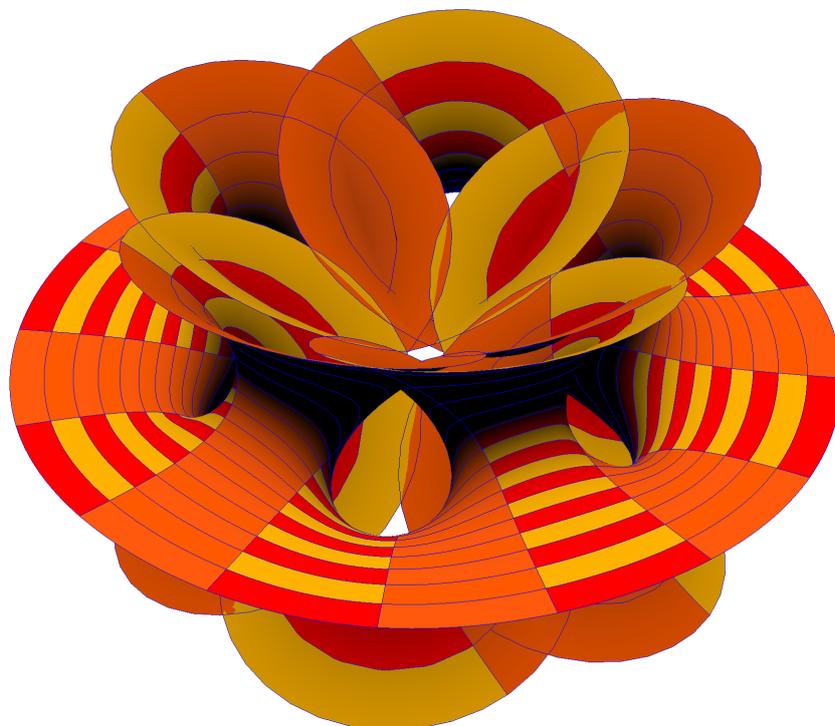


Figura 5.11: *La superficie di Richmond*

## 6 Qualche intersezione con la sfera

In questo capitolo proponiamo alcune figure ottenibili come intersezione di diverse superfici con sfere. Lo scopo è quello di stimolare la curiosità a ricercare nuove forme.

Intersezione di un cilindro con una sfera: la curva intersezione si chiama *Finestra di Viviani*, dal matematico Vincenzo Viviani<sup>(1)</sup> che la propose nel 1692.

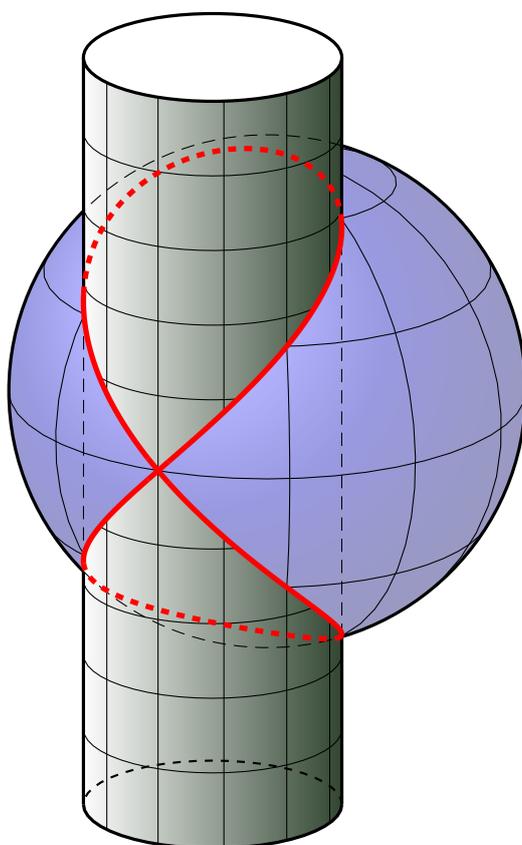


Figura 6.1: *Intersezione tra un cilindro e una sfera: la Finestra di Viviani*

È di grande interesse la regione solida che si ottiene togliendo dalla sfera la parte comune al cilindro, vedi la figura 6.2.

<sup>1</sup>Matematico di grande ingegno, reclutato da Galileo come collaboratore scientifico nella sua casa di Arcetri. La sua figura non è molto nota, a causa dell'ostracismo che la Chiesa cattolica manifestò nei suoi confronti quando tentò di pubblicare

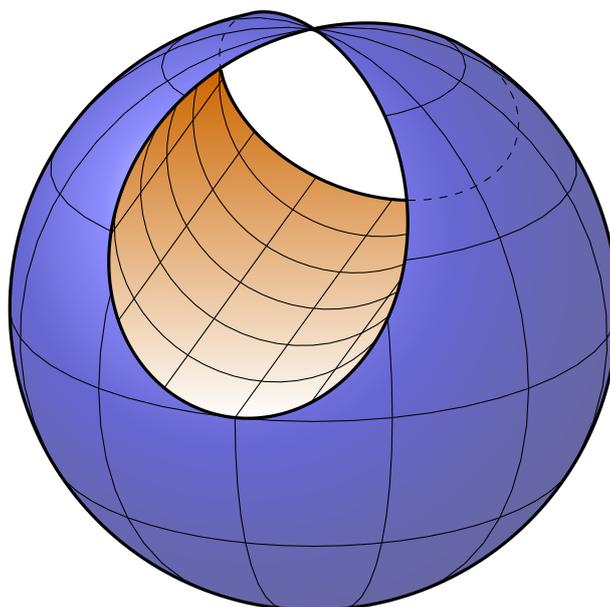


Figura 6.2: *Intersezione tra un cilindro e una sfera: solido ottenuto asportando dalla sfera la parte di cilindro*

Questa forma è stata utilizzata da Marta Pan per una sua scultura galleggiante nella City Hall di Dallas, Texas. La scultura è proprio chiamata “Viviani”. Si veda la figura 6.3.



Figura 6.3: *Scultura galleggiante di Marta Pan, City Hall, Dallas, Texas*

---

una biografia di Galileo, dopo la sua morte, e una edizione completa delle sue opere.

Marta Pan ha utilizzato numerose altre superfici nelle sue realizzazioni.

La finestra di Viviani si può ottenere anche dall'intersezione tra un cono e una sfera, come mostrato nella figura 6.4.

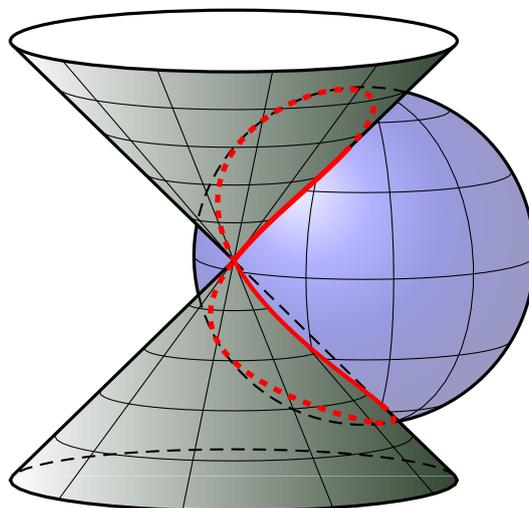


Figura 6.4: *Intersezione di un cono con una sfera*

La stessa curva può essere costituita da due rami separati, se il cono (o il cilindro) interseca diversamente la sfera. Si veda la figura 6.5.

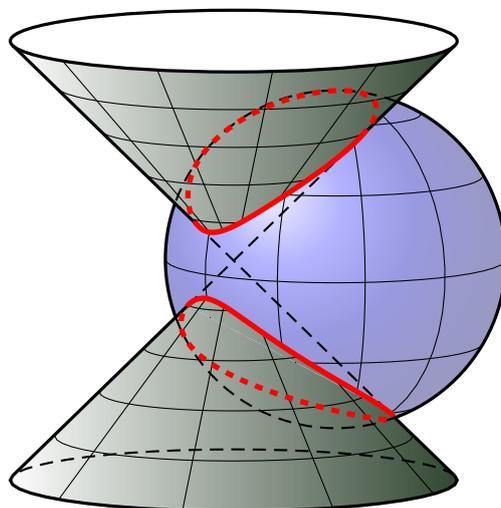


Figura 6.5: *Intersezione di un cono con una sfera: caso della curva divisa in due rami*



## 7 Poliedri iperbolizzati

A partire dai cinque poliedri regolari si possono costruire altre interessanti superfici deformando opportunamente le loro facce. Proponiamo nelle figure che seguono alcune immagini in cui le facce sono deformate in iperboloidi.

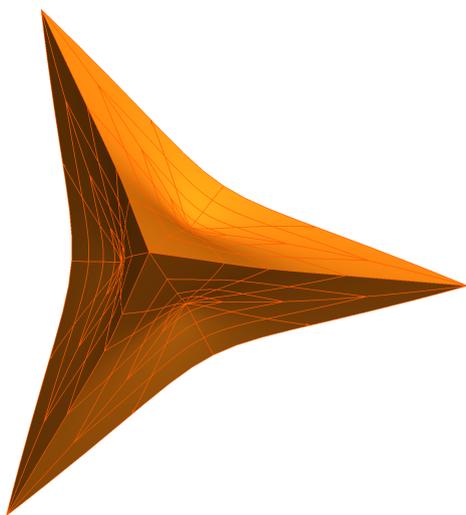


Figura 7.1: *Il tetraedro "iperbolizzato"*

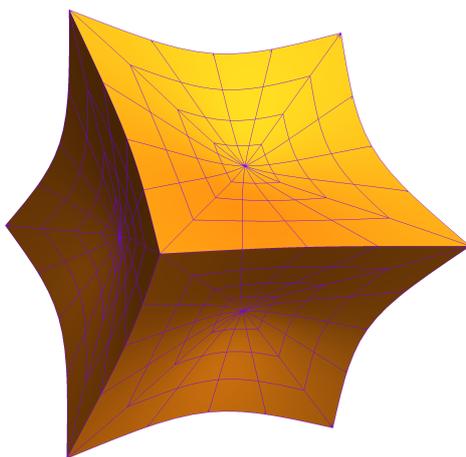
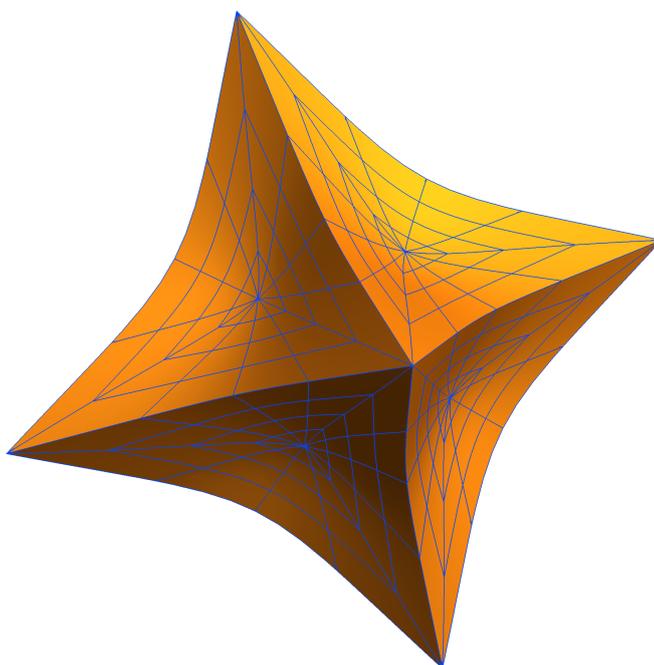
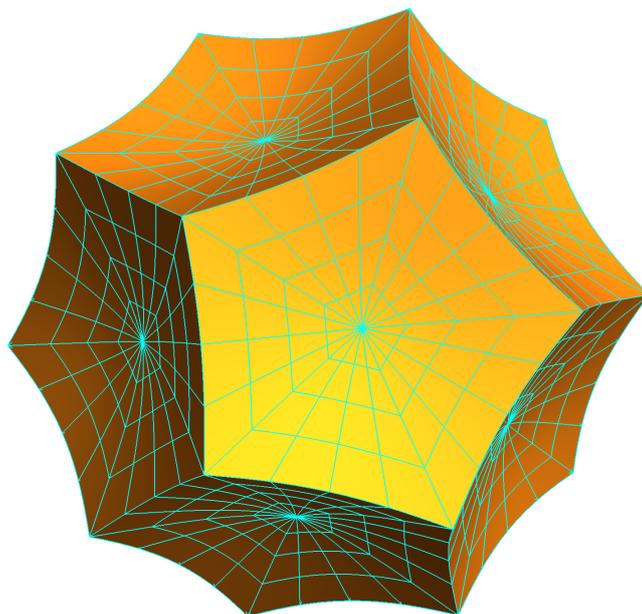


Figura 7.2: *Il cubo "iperbolizzato"*

Figura 7.3: *L'ottaedro "iperbolizzato"*Figura 7.4: *Il dodecaedro "iperbolizzato"*

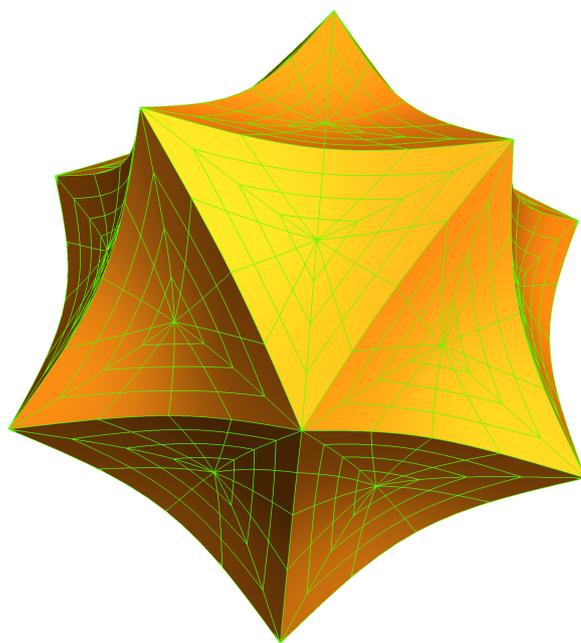


Figura 7.5: *L'icosaedro "iperbolizzato"*

A seconda del grado di iperbolizzazione si possono ottenere figure sensibilmente diverse. Un esempio relativo all'icosaedro è proposto nella figura 7.6.

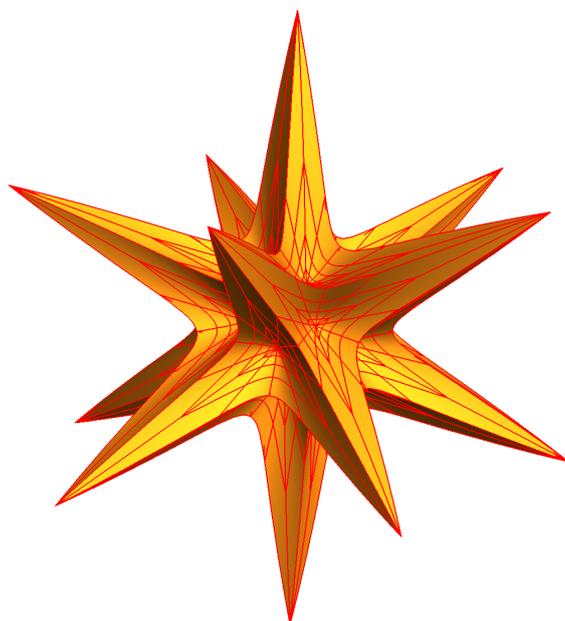


Figura 7.6: *Ancora un icosaedro "iperbolizzato"*



## 8 Da Möbius alla quarta dimensione

### 8.1 Il nastro di Möbius

Le superfici “ordinarie”, cioè quelle che capitano di solito sotto i nostri occhi, hanno due facce, e questo vale sia per le superfici chiuse (cioè prive di contorno), come la sfera, che per quelle aperte (cioè delimitate da curve), come un rettangolo. Questo significa che, per le superfici chiuse, è possibile colorare le due facce con colori diversi senza che ci sia alcun punto di incontro tra i due colori, per le superfici aperte, che i due colori possono incontrarsi solo lungo i bordi.

Consideriamo per esempio un rettangolo e immaginiamo di disporre una formica su una delle due facce e del cibo sull'altra, se provvediamo a spargere dell'insetticida lungo tutto il bordo, la formica non potrà mai raggiungere il cibo (a meno che non faccia un buco nel rettangolo!). Similmente se consideriamo una mosca fuori da una sfera di cristallo e del cibo posto all'interno della sfera stessa, la mosca non riuscirà mai a raggiungere il cibo. Ebbene, esistono anche superfici con una sola faccia (e superfici chiuse che non hanno un “dentro” e un “fuori”, per esempio la bottiglia di Klein, di cui parleremo in seguito): l'esempio più classico è il nastro di Möbius.

L'idea base della sua costruzione è molto semplice: si parte da un foglio di carta rettangolare come quello mostrato nella figura 8.1, dove abbiamo evidenziato i bordi superiore e inferiore con diversi colori, proprio per rendere evidente la tecnica costruttiva del nastro.

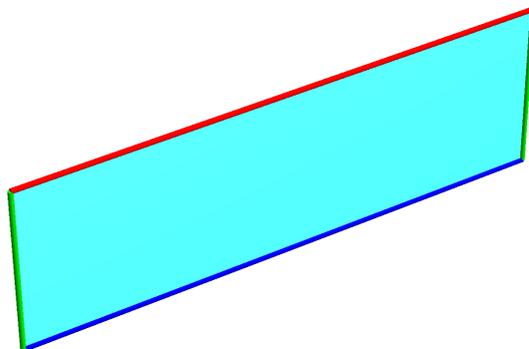


Figura 8.1: Rettangolo di base per costruire il Nastro di Möbius

A partire da questo rettangolo si può costruire un cilindro, per esempio circolare, arrotolando senza torsioni il foglio rettangolare: la superficie che si ottiene avrà un bordo superiore e uno inferiore costituiti da due circonferenze, una rossa e una blu nel nostro modello, come è ben noto e come si può vedere nella figura 8.2.

Se però nell'arrotolare il rettangolo gli facciamo subire una mezza torsione otterremo una superficie completamente diversa. Il processo è illustrato, mostrandone due fasi, nella figura 8.3.

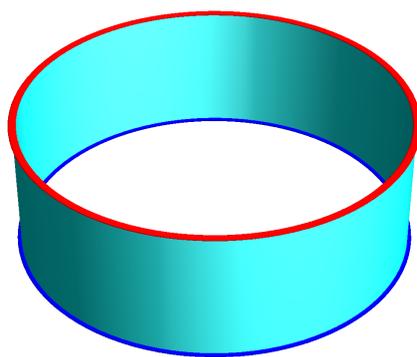


Figura 8.2: Cilindro ottenuto arrotolando, senza torsioni, il rettangolo della figura 8.1

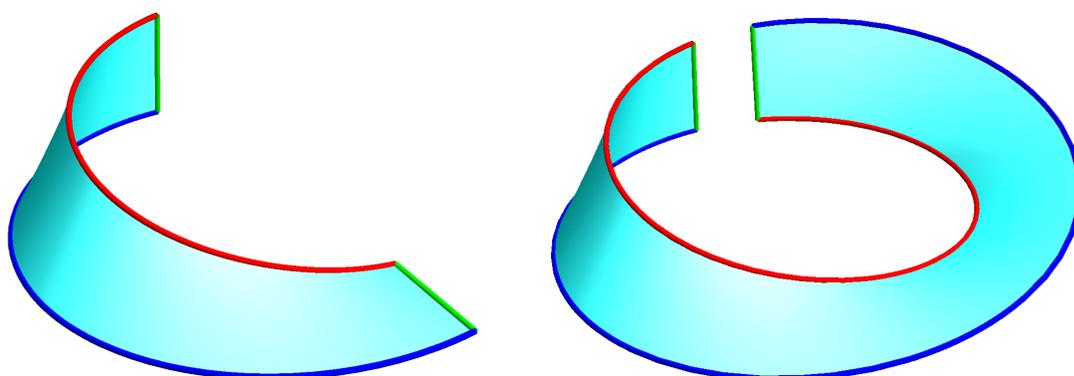


Figura 8.3: Arrotolamento con semitorsione del rettangolo della figura 8.1

Completando l'arrotolamento con la saldatura dei due bordi verticali si ottiene una nuova superficie: il *nastro di Möbius*, in onore di A.F. Möbius (1790-1860) che per primo lo considerò.

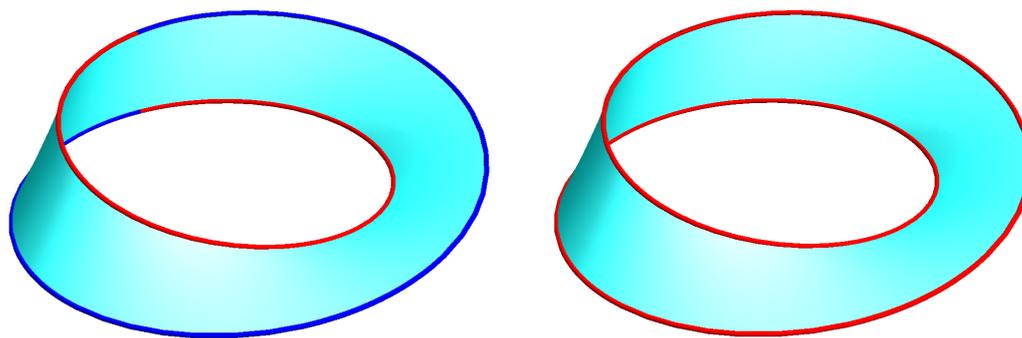
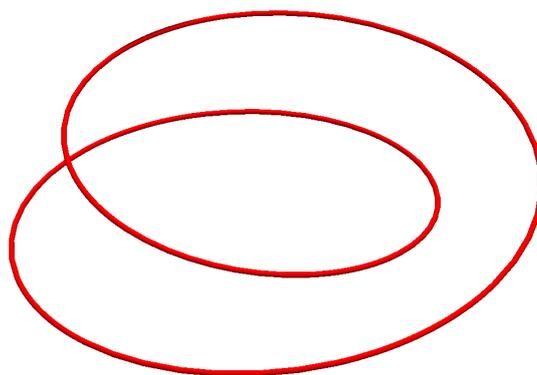
La superficie ha numerose sorprendenti caratteristiche. La prima cosa da notare è che non esiste più un "bordo superiore" rosso e un "bordo inferiore" blu: per come è stata costruita il bordo è unico! Si veda la figura 8.4 dove a sinistra abbiamo evidenziato le due parti originarie del bordo, mentre a destra abbiamo usato un solo colore.

L'unicità del bordo è ancora più evidente se lo tracciamo senza la superficie, come mostrato nella figura 8.5.

La seconda, e forse più interessante, caratteristica è il fatto che la superficie ha un'unica faccia: la nostra formica potrebbe raggiungere il cibo senza pericolo in qualunque posto del nastro si trovi. Per dipingere una figura come questa, se non si vogliono contatti tra i colori, bisogna usare un solo colore e allora basta immergere tutto il nastro nel barattolo di vernice, con grande risparmio di tempo!

Ci sono altre proprietà: segnaliamo, per esempio, che se si taglia la superficie lungo la linea mediana, si ottiene un unico nastro di lunghezza doppia, a differenza di quello che si ottiene se si taglia in due la superficie cilindrica che si ottiene piegando il quadrato nel modo tradizionale, cioè senza torsione.

È molto importante l'osservazione che il nastro di Möbius non si può incapsulare nel piano evitando intersezioni delle sue parti: basta provare a costruire un modello di carta per poi schiacciarlo fino a farlo

Figura 8.4: *Il “Nastro di Möbius”*Figura 8.5: *Il bordo del Nastro di Möbius*

diventare piatto, si otterrà una situazione come quella rappresentata nella figura 8.6.

Figura 8.6: *Il Nastro di Möbius “appiattito”*

In ogni caso, anche se lo schiacciamento in due dimensioni del nastro produce una figura con parti che si sovrappongono, è comunque possibile, da questa rappresentazione bidimensionale, ricavare la proprietà essenziale della figura di essere ad una faccia: basterà immaginare che anche la nostra formica che insegue il cibo sul nastro sia stata schiacciata (senza farle del male naturalmente!) fino a farla diventare

un essere piatto come gli abitanti di *Flatland*.

Si noti che per il cilindro la situazione è diversa: mentre è ovvio che schiacciandolo si ottiene anche qui una figura con parti che si intersecano, nel cilindro non si modifica sostanzialmente nulla se lo si taglia lungo una generatrice e poi lo si stende sul piano (la geometria del cilindro è sostanzialmente la stessa di quella del piano).

## 8.2 Oltre la terza dimensione

Come ben sappiamo per individuare i punti su una retta è possibile stabilire un sistema di ascisse, fissando un'origine, un'unità di misura e un verso: ad ogni punto resta associato un unico numero reale, che si chiama *ascissa del punto* e viceversa ad ogni numero reale resta associato un unico punto della retta. Si può fare lo stesso nel piano in cui si stabilisce una corrispondenza biunivoca tra punti e coppie di coordinate, o nello spazio dove la corrispondenza è fra punti e terne di numeri reali. Questa idea è alla base della costruzione di tutto il castello della geometria analitica. Per esempio, come sappiamo, le curve del piano possono essere rappresentate con equazioni in due incognite, le superfici dello spazio con equazioni in tre incognite.

Dal punto di vista algebrico non c'è alcuna difficoltà a considerare quaterne di numeri reali, o addirittura cinque o  $n$ -ple con ancora più elementi. Naturalmente non avremo alcuna possibilità di rappresentare fisicamente le quaterne in un reale spazio fisico “quadridimensionale”, ma potremo sempre considerare equazioni in quattro incognite e pensare ad esse come la rappresentazione di particolari sottoinsiemi di questo spazio quadridimensionale. Per esempio come un'equazione di primo grado in due incognite, del tipo  $ax + by + c = 0$  rappresenta una retta del piano cartesiano e un'equazione del tipo  $ax + by + cz + d = 0$  rappresenta un piano dello spazio cartesiano, potremo dire che un'equazione del tipo  $ax + by + cz + dw + e = 0$  rappresenta un “iperpiano” nello spazio a quattro dimensioni. In maniera analoga come l'equazione del tipo  $x^2 + y^2 = 1$  rappresenta la circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e l'equazione  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  rappresenta la sfera di centro l'origine e raggio 1, potremo dire che l'equazione  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$  rappresenta l'“ipersfera” di centro l'origine e raggio 1.

Le analogie possono essere portate molto più avanti. Per esempio come intersecando una circonferenza con un piano si ottiene (se non sono esterni) una coppia di punti e intersecando una sfera con un piano si ottiene una circonferenza, intersecando una ipersfera con un iperpiano si ottiene una sfera, e tutto questo si può dedurre semplicemente dalle proprietà algebriche delle equazioni.

Come abbiamo detto prima, e come è ovvio, non abbiamo la possibilità di rappresentare fisicamente le quaterne in un reale spazio fisico “quadridimensionale”, possiamo però pensare di rappresentare proiezioni tridimensionali o bidimensionali degli oggetti quadridimensionali, in maniera perfettamente analoga a quanto facciamo per rappresentare sul piano gli oggetti tridimensionali.

Senza entrare troppo nei dettagli, trattiamo un caso sufficientemente abordabile con tecniche semplici. Partiamo da un segmento sulla retta: il suo bordo è costituito da 2 punti (gli estremi del segmento), cioè da due oggetti di dimensione 0. Successivamente consideriamo un quadrato nel piano: il suo bordo è costituito da 4 segmenti (i lati del quadrato), cioè da quattro oggetti di dimensione 1, inoltre il quadrato ha 4 vertici e in ogni vertice si incontrano 2 lati. L'analogo tridimensionale è il cubo, il cui bordo è costituito da 6 quadrati (le facce del cubo), cioè da 6 elementi di dimensione 2. Inoltre il cubo ha 8 vertici e in ogni vertice si incontrano 3 spigoli. Proseguendo avremo un *ipercubo* (detto anche *tesseracto*): esso avrà un bordo costituito da 8 “iperfacce” cubiche (cioè da 8 elementi di dimensione 3); inoltre esso avrà

16 vertici e in ogni vertice si incontreranno 4 lati. Utilizziamo, per avere una rappresentazione prima tridimensionale e poi addirittura bidimensionale di un ipercubo, una tecnica simile a quella usata per rappresentare un cubo nel piano: ne dovremo vedere tutte le proprietà citate.

Cominciamo quindi a considerare un cubo e, tra tutte le proiezioni bidimensionali possibili, scegliamo una proiezione prospettica come quella mostrata nella figura 8.7, anche se non è la più usuale: ci sarà utile nel caso della proiezione dell'ipercubo.

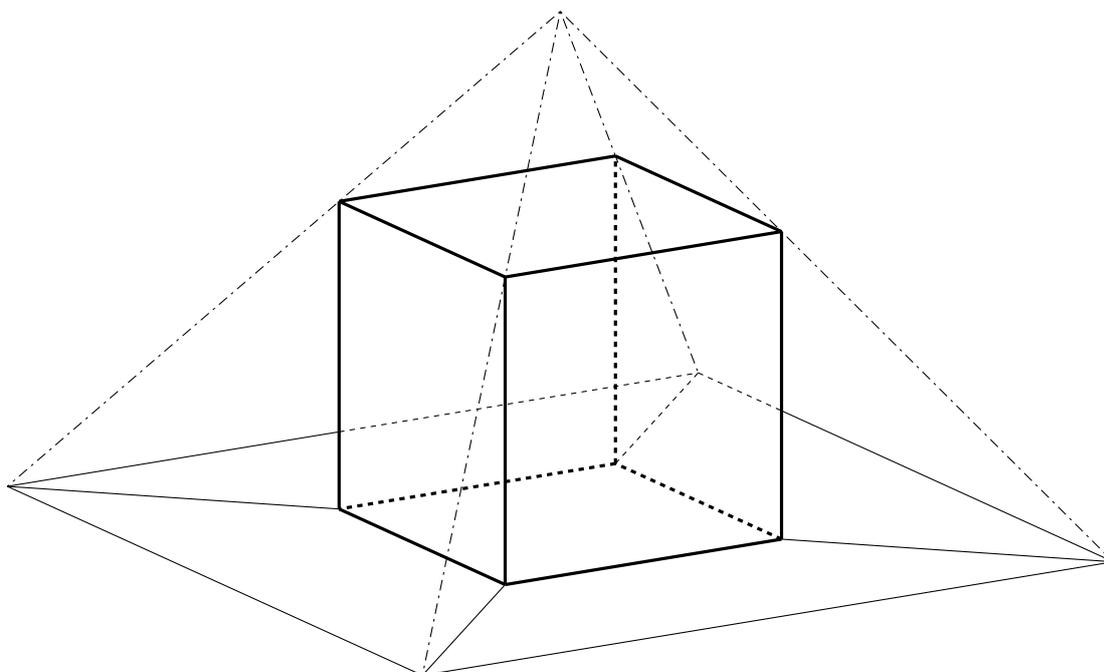


Figura 8.7: *Cubo e sua proiezione su un piano*

Come si può vedere questa proiezione mantiene la forma quadrata delle due facce superiore e inferiore del cubo, mentre trasforma le altre quattro facce in trapezi isosceli. Inoltre le due facce superiore e inferiore nella proiezione sono una interna all'altra.

Osserviamo che la proiezione mantiene alcune delle caratteristiche essenziali del cubo: il numero delle facce (6), il numero dei vertici (8), il numero degli spigoli (12), il fatto che in ogni vertice si incontrano 3 spigoli. Non viene invece mantenuto il parallelismo degli spigoli.

Vediamo ora di passare all'ipercubo, vedi la figura 8.8. Naturalmente non sarà possibile visualizzare lo schema della proiezione dallo spazio quadridimensionale a quello tridimensionale (o meglio addirittura in due dimensioni). Quello che potremo mostrare sarà solo il risultato della proiezione stessa, ma è importante sottolineare che vengono mantenute molte delle caratteristiche dell'ipercubo quadridimensionale, eccettuato il parallelismo, come già osservato nel caso della proiezione del cubo che abbiamo considerato. Inoltre anche qui saranno mantenute le forme cubiche delle due iperfacce quadridimensionali rispettivamente più vicina e più lontana dal centro di proiezione.

In questo caso si possono riconoscere gli otto cubi che costituiscono le facce dell'ipercubo e i sedici vertici, in ognuno dei quali si intersecano quattro spigoli. Sei degli otto cubi che costituiscono le iperfacce

dell'ipercubo sono deformati, in maniera non dissimile da quello che succedeva nella proiezione del normale cubo.

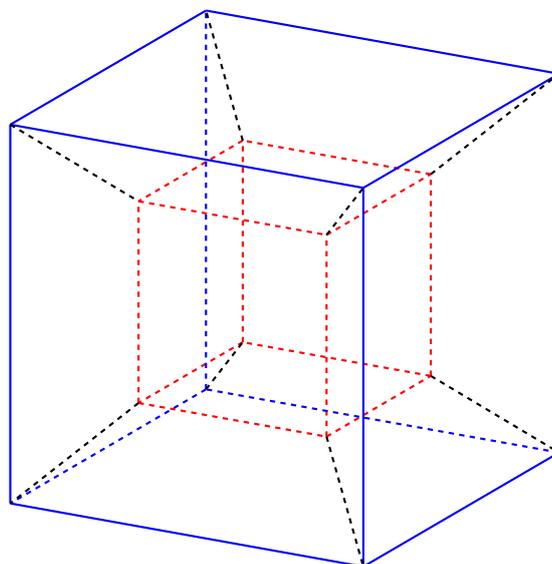


Figura 8.8: *Proiezione tridimensionale di un ipercubo*

### 8.3 La bottiglia di Klein

Per chiudere questa breve introduzione alla quarta dimensione facciamo solo un breve cenno alla bottiglia di Klein. Si tratta di una superficie che, come il nastro di Möbius, ha una sola faccia con la ulteriore sorprendente caratteristica di essere addirittura una superficie chiusa (“senza bordo”). Una sua corretta realizzazione si può avere solo in uno spazio a quattro dimensioni, ma anche una sua proiezione tridimensionale ne illustra le sorprendenti caratteristiche, seppure introduce delle autointersezioni, come già succedeva per il nastro se costretto in due dimensioni. La bottiglia prende il nome da Felix Klein (1849-1925) e qui proponiamo l’incapsulamento tridimensionale da lui stesso proposto.

Consideriamo una superficie di forma cilindrica, più stretta da un lato, come quella della figura 8.9.

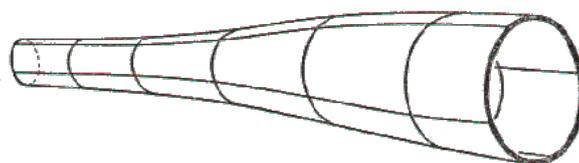


Figura 8.9: *Superficie di forma cilindrica per costruire la bottiglia di Klein*

Supponiamo ora di voler fare combaciare le due estremità, ma non in modo da ottenere un toro, bensì praticando un foro nella parete del cilindro e infilandoci l’estremità più sottile, come è indicato nella figura 8.10.

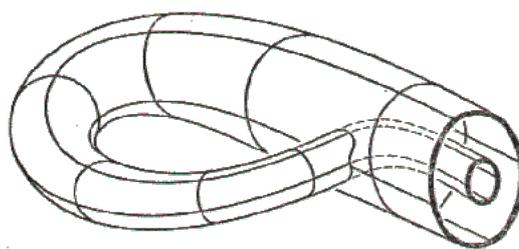


Figura 8.10: *Primo passo per costruire la bottiglia di Klein*

Se completiamo il procedimento otterremo la superficie che stiamo cercando, la “Bottiglia di Klein”, o meglio un suo incapsulamento nello spazio tridimensionale.

Si tratta di una superficie ad una sola faccia, cioè con la proprietà che da qualunque punto sulla superficie si può raggiungere qualunque altro punto (esattamente come nel nastro di Möbius), ma con l’ulteriore interessante proprietà di essere una superficie chiusa, cioè priva di bordi. L’immersione della bottiglia nello spazio a tre dimensioni ha introdotto una linea di intersezione tra due parti della superficie. Si veda la figura 8.11.

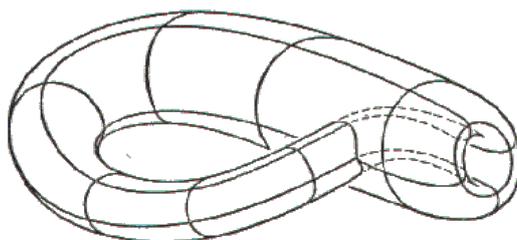


Figura 8.11: *La bottiglia di Klein*

Se tagliamo la bottiglia di Klein lungo una linea mediana otteniamo due nastri di Möbius, come illustrato nella figura 8.12: un altro modo di costruire la bottiglia è proprio quello di saldare due nastri di Möbius per il loro bordo.

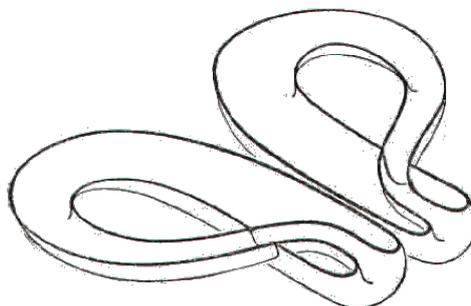


Figura 8.12: *Due nastri di Möbius ottenuti sezionando una bottiglia di Klein*

La figura 8.13 illustra di nuovo la stessa bottiglia da un diversa prospettiva.

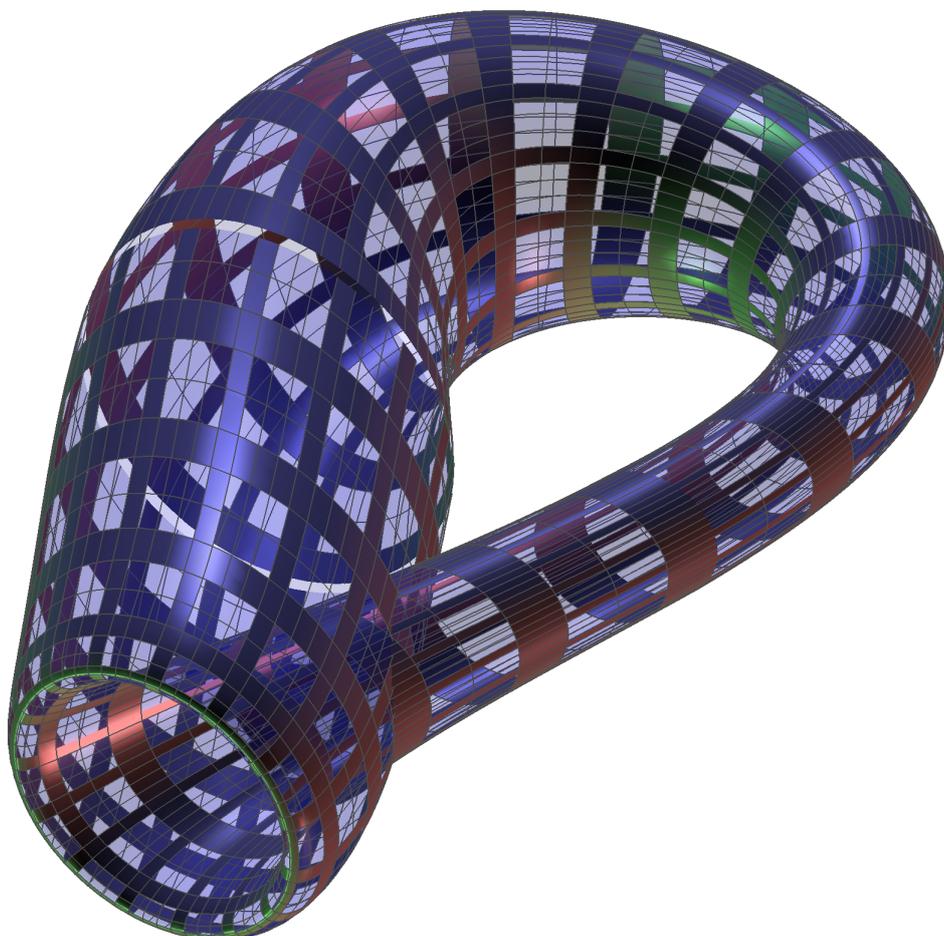
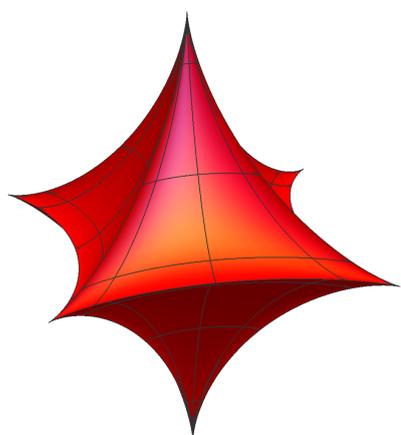
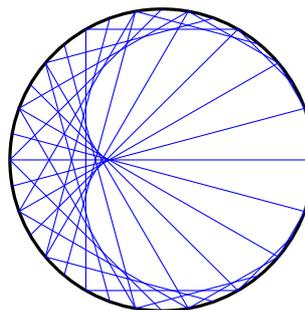
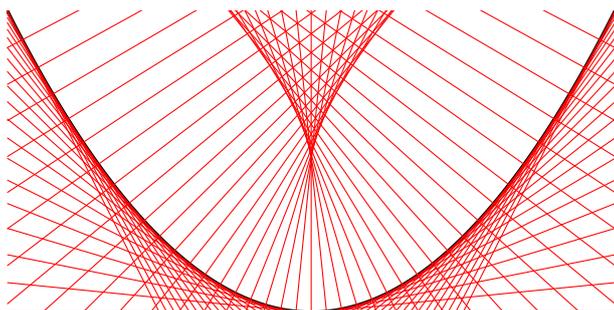


Figura 8.13: *La bottiglia di Klein*

In ultima di copertina: *Evoluta di una parabola. Caustica di riflessione in una circonferenza. Ellissoide astroidale. Superficie a Dervish.*



## Curve e superfici

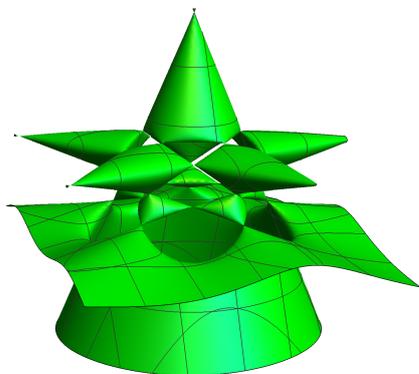
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

<http://www.batmath.it>

Versione 1.0 del 24 gennaio 2018

Questo fascioletto è rivolto agli studenti del secondo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, Sede di Pordenone. Contiene solo un'integrazione al testo in uso e alcune immagini.



Luciano Battaia

Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatemática, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.