LUCIANO BATTAIA

CENNI SULLE SIMMETRIE

Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

www.batmath.it

Cenni sulle simmetrie
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone

Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 novembre 2018

Mi piace guardare alla matematica più come un'arte che come una scienza, perché l'attività dei matematici, che creano costantemente, è guidata ma non controllata dal mondo esterno dei sensi; quindi assomiglia, io credo, in realtà all'attività di un artista, di un pittore. Proprio come non si può essere pittore senza una certa tecnica, così non si può essere un matematico senza il potere della ragione accuratamente giunto a un certo punto. Tuttavia queste qualità, fondamentali, non fanno un pittore o un matematico degno di questo nome, né in verità sono i fattori più importanti. Altre qualità di una specie più sottile, alla cui vetta vi è in entrambi i casi l'immaginazione, creano un buon artista o un buon matematico.

Bocher, Bulletin of the American Mathematical Society, 11, 1904

La bellezza è un fattore matematico. In un viso ad esempio è tutta una questione di distanza fra occhi, lunghezza di naso: la bellezza è matematica pura. Le proporzioni sono tutto. Guardate San Pietro, il colonnato, le finestre: è tutta una questione di proporzioni.

Giorgietto Giugiaro, Intervista a Repubblica, 9 *novembre* 2013

Indice

Premessa

Questo fascicoletto contiene solo alcune integrazioni al testo in uso[1] presso il corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, sede di Pordenone. Molte delle immagini proposte sono prese da siti web e la fonte è sempre citata. Sono da intendersi ad uso esclusivo degli studenti iscritti al corso citato.

[1] Nicoletta Sala e Gabriele Cappellato, *Viaggio matematico nell'arte e nell'architettura*, Franco Angeli Editore, Milano, 2003.

1 Isometrie del piano

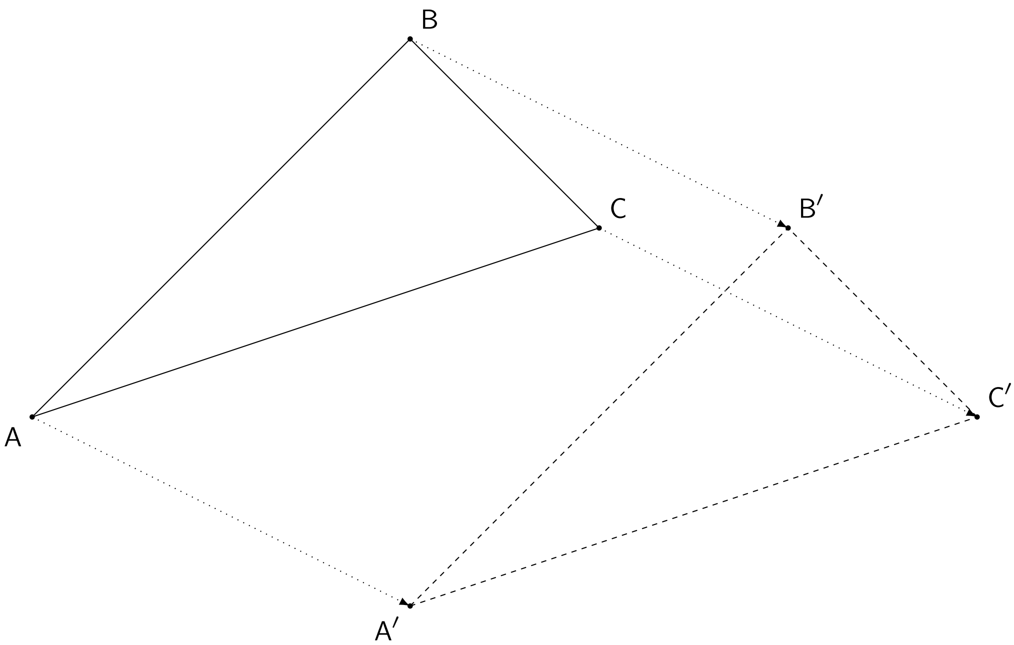
Una *isometria* del piano è una funzione che associa ad ogni punto del piano un altro punto del piano in modo che le distanze e gli angoli restino invariati: in sostanza si tratta di un movimento rigido del piano stesso che lascia invariate nella forma e nelle misure tutte le figure.

Le isometrie sono ampiamente discusse nel testo in uso e sono qui brevemente richiamate senza commenti.

1.1 Traslazioni

Una *traslazione* è una trasformazione che sposta tutti i punti del piano dello stesso tratto e nella stessa direzione e verso (tecnicamente si dice *dello stesso vettore*).

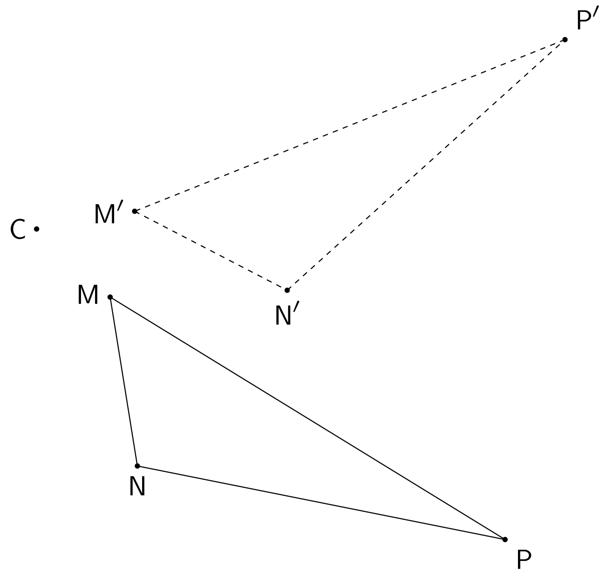
Un semplice esempio con evidenziato l'effetto su un triangolo è proposto nella figura che segue.



1.2 Rotazioni

Una *rotazione* di centro C è una trasformazione che sottopone tutti i punti del piano ad una rotazione di un dato angolo attorno ad uno stesso centro C.

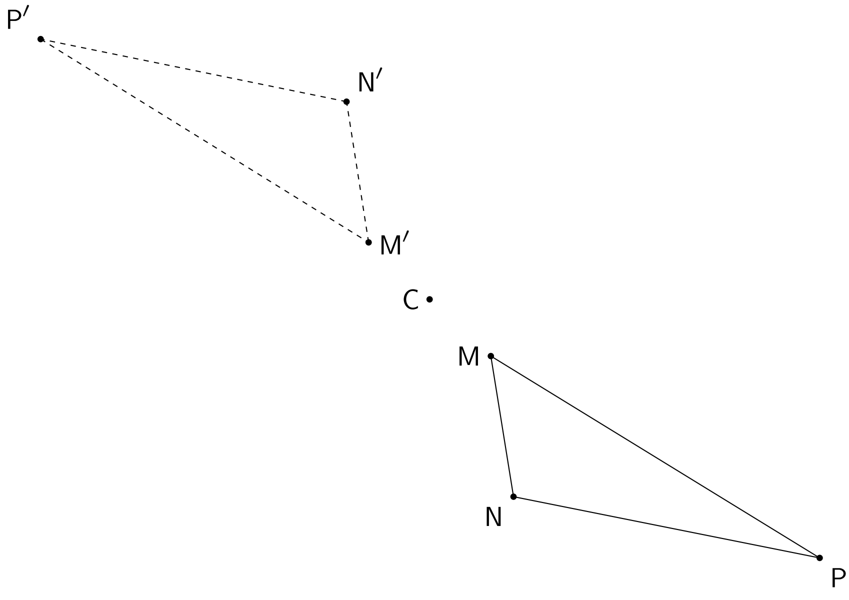
Un semplice esempio con evidenziato l'effetto su un triangolo è proposto nella figura che segue.



1.2.1 Mezzogiro

Il caso particolare in cui l'angolo di rotazione è di 180° prende il nome di *mezzogiro* o *simmetria centrale*.

Un semplice esempio con evidenziato l'effetto su un triangolo è proposto nella figura che segue.

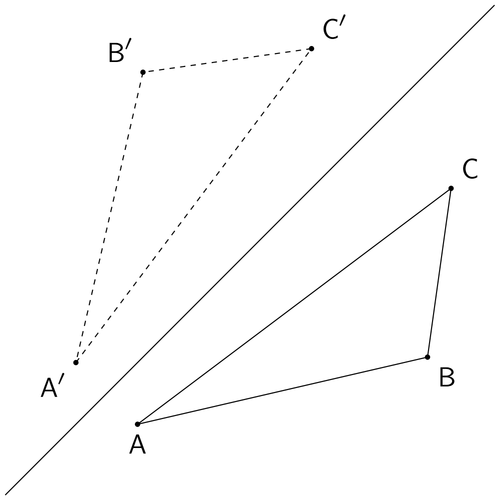


Queste due trasformazioni si dicono anche *dirette*: l'ordine dei punti rimane invariato.

1.3 Riflessioni

Una *riflessione* è una trasformazione del piano che muta ogni punto nel suo simmetrico rispetto ad una retta data, detta *asse* della riflessione.

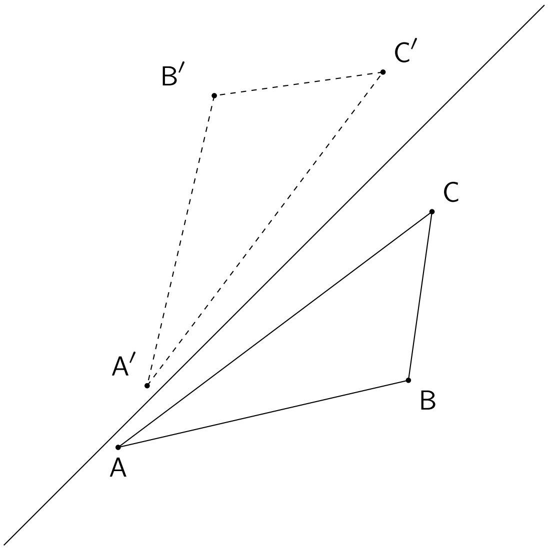
Un semplice esempio con evidenziato l'effetto su un triangolo è proposto nella figura che segue.



1.4 Glissoriflessioni

Una *glissoriflessione* è la trasformazione che si ottiene eseguendo prima una riflessione rispetto ad una retta e poi una traslazione parallelamente a quella retta, o viceversa.

Un semplice esempio con evidenziato l'effetto su un triangolo è proposto nella figura che segue.



Queste due trasformazioni si chiamano *inverse* in quanto l'ordine dei punti viene invertito.

1.5 Composizione di isometrie

Su un piano si possono eseguire successivamente due o più trasformazioni del tipo indicato: si dice che si opera una *composizione* di isometrie. Già per esempio la glissoriflessione è la composizione di una riflessione e di una traslazione. Ma naturalmente si possono considerare situazioni più complesse.

Si può addirittura dimostrare (ma questo esula dagli scopi del nostro corso) che ognuna delle isometrie considerate si può sempre ottenere componendo opportunamente fino ad un massimo di 3 riflessioni: le riflessione possono dunque giocare il rullo di *isometrie fondamentali*.

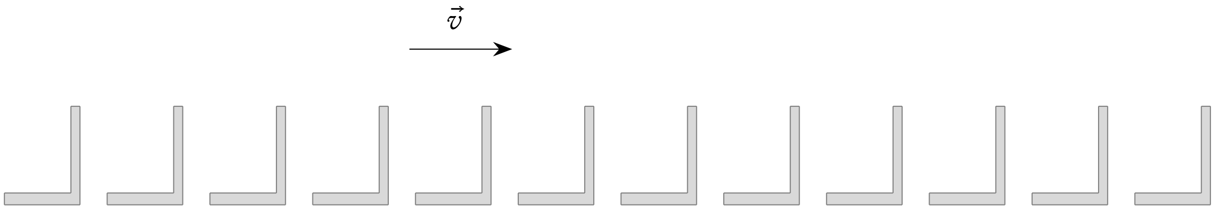
2 Simmetrie

2.1 Introduzione

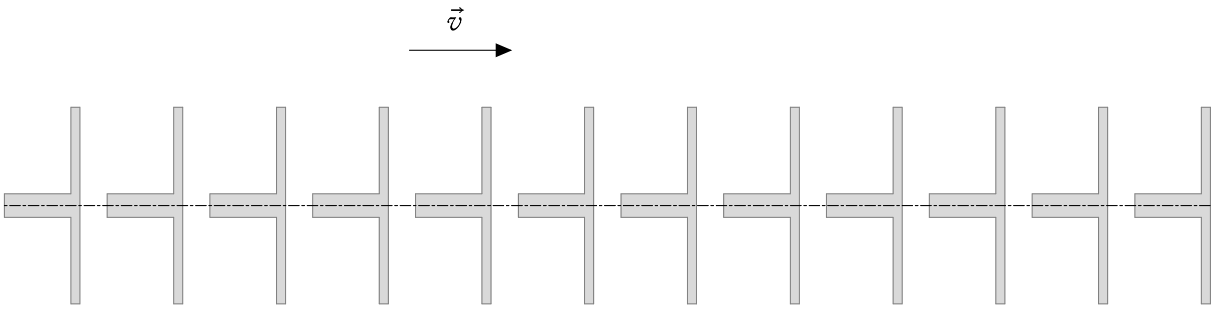
Una figura piana possiede simmetrie se esistono una o più isometrie che lasciano invariata la figura stessa.

Precisamente si può parlare di simmetria per traslazione, simmetria per rotazione, simmetria per riflessione, simmetria per glissoriflessione, a seconda del tipo di trasformazione che lascia invariata la figura stessa.

Per esempio la figura seguente, immaginata indefinitamente estesa sia a destra che a sinistra, presenta una simmetria di traslazione: se la si trasla del vettore $\vec{v}$ (o del suo doppio, del suo triplo, ecc.) la figura rimane identica. Possiamo dire che esistono infinite traslazioni che mutano la figura in se stessa: parleremo di *gruppo delle simmetrie* di questa figura, anche se la parola gruppo deve qui essere intesa in senso intuitivo, in quanto esula dagli scopi di questo corso una precisa definizione di questo importantissimo concetto matematico.



Quest'altra figura, sempre pensata indefinitamente estesa sia a destra che a sinistra, presenta la stessa simmetria traslazionale della precedente è in più una simmetria per riflessione rispetto alla retta tratteggiata.



Possiamo affermare che la seconda figura ha un più alto grado di simmetria rispetto alla prima, in quanto esiste un maggior numero di isometrie che la lasciano invariata.

Tutti i poligoni regolari presentano tante simmetrie per rotazione e tante simmetrie per riflessione quant'è il numero dei lati.

Consideriamo l'esempio del triangolo equilatero: esso è simmetrico rispetto ad una riflessione sulle sue tre altezze (o mediane, o bisettrici, visto che in un triangolo equilatero questi segmenti coincidono) ed inoltre è simmetrico rispetto ad una rotazione di 120°, 240°, 360° rispetto al centro del triangolo stesso[(1)]: in totale si hanno 6 simmetrie.

Se consideriamo invece un quadrato esso è simmetrico rispetto ad una rotazione di 90°, 180°, 270°, 360° rispetto al suo centro ed ha invece una simmetria di riflessione rispetto alle due diagonali e alle due perpendicolari nei punti medi di due lati apposti, per un totale di 8 simmetrie.

In generale per un poligono regolare di n lati si hanno $2n$ simmetrie: si parla di *gruppo diedrale* o *diedrico* di ordine $2n$. Se il numero dei lati è dispari gli assi di simmetria passano per un vertice e il punto medio del lato opposto, altrimenti passano metà per due vertici opposti e l'altra metà per il centro di due lati opposti.

Per quanto attiene il nostro corso siamo interessati a tre tipi di figure che possiedono le simmetrie che discuteremo: si tratta dei *rosoni*, dei *fregi* e dei *mosaici*. Anche se si tratta di una nomenclatura tipicamente "artistica", in realtà essi sono esattamente i nomi utilizzati dai matematici in teoria dei gruppi.

2.2 Rosoni

Si chiama *rosone* una figura piana il cui gruppo di simmetria (cioè l'insieme di quelle trasformazioni del piano che lasciano invariate le distanze e mutano la figura in se stessa) contiene solo un numero finito di trasformazioni.

Si può dimostrare che le sole possibilità per il gruppo di simmetria di un rosone sono o un gruppo cosiddetto *ciclico*[(2)] (che indicheremo con Cn e che contiene esattamente n rotazioni) oppure un gruppo *diedrale* (che indichiamo con Dn e che contiene n rotazioni e n riflessioni, come nei poligoni regolari).

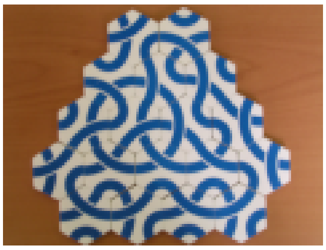
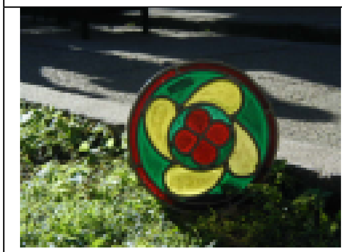
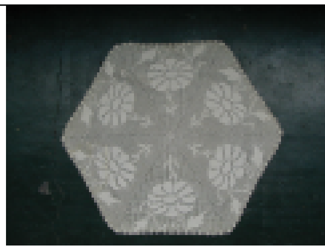
Per ogni intero n positivo c'è un corrispondente gruppo ciclico e un corrispondente gruppo diedrale.

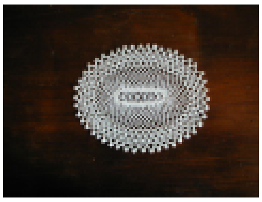
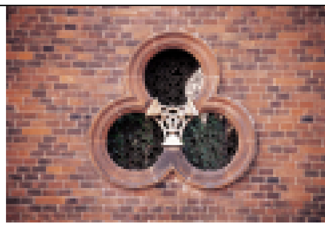
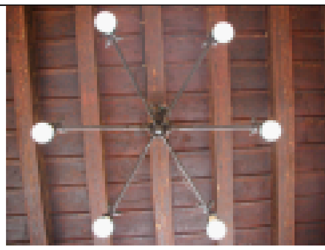
Nelle due tabelle di immagini[(3)] che seguono mostriamo rosoni in cui c'è soltanto una simmetria di rotazione nel primo gruppo e invece sia una simmetria di rotazione che una simmetria di riflessione nel secondo gruppo. In entrambe le situazioni si considerano i casi $C1$, $C2$, ... e $D1$, $D2$, ..., ovvero i casi in cui ci sono 1 rotazione (di 360° naturalmente), 2 rotazioni (di 180° e 360°) e così via, oppure una rotrazione e una riflessione, 2 rotazioni e 2 riflessioni, ecc.

[1]La rotazione di 360° riporta la figura esattamente nella stessa posizione di partenza, anche se mettessimo etichette ai vertici: si dice che è l'elemento neutro del gruppo delle simmetrie del triangolo.

[2]Il nome *gruppo ciclico* è legato al fatto che anche se è vero che ci sono n rotazioni diverse che lasciano immutata la figura, in realtà tutte le rotazioni sono multiple di una stessa rotazione elementare. Per esempio in un rosone di questo tipo con 3 rotazioni le tre rotazioni sono di 120°, 240° e 360° che si possono ottenere facendo una, due o tre rotazioni di 120°.

[3]Tutte le immagini sono prese da `http://www.matematita.it/personali/index.php?blog=6&cat=79`, un interessantissimo sito dove si possono trovare molte dettagliate informazioni su questi e altri argomenti attinenti il corso. Anche gran parte del testo è direttamente ricavato da questo sito

Gruppi ciclici nei rosoni		
		
		
		

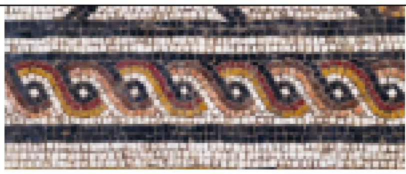
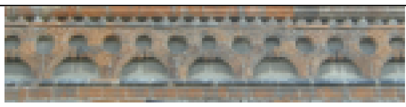
Gruppi diedrali nei rosoni		
		
		
		

2.3 Fregi

La parola *fregio* in matematica indica una figura piana il cui gruppo di simmetria (cioè l'insieme di quelle trasformazioni del piano che lasciano invariate le distanze e mutano la figura in se stessa) contiene delle traslazioni, ma solo traslazioni in un'unica direzione e tutte multiple di una traslazione base.

Una tale figura è necessariamente illimitata (possiamo operare la stessa traslazione 2 volte, 3 volte, 1000 volte ... e la figura rimane invariata), quindi quando chiamiamo fregio una figura su un pezzo di carta, o su un monumento, o su uno schermo di computer, stiamo usando un po' di fantasia per immaginare che la figura continui, alla stessa maniera, al di là della pagina, o del muro, o dello schermo.

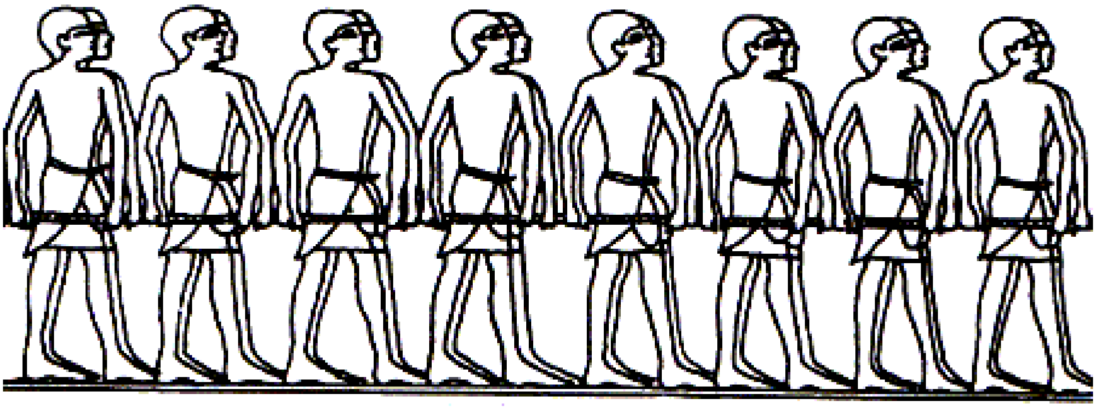
Nonostante la varietà dei fregi osservati, e nonostante in linea di principio possano esistere infiniti fregi, tutti diversi uno dall'altro, i matematici hanno dimostrato, e la cosa è abbastanza sorprendente, che vi possono essere solo 7 tipologie diverse di fregi! Li mostriamo nella tabella che segue.

I sette tipi di fregi	
	solo traslazione
	rotazioni (mezzo giro)
	glissoriflessione
	riflessione orizzontale
	riflessioni verticali
	riflessioni verticali e rotazioni (mezzo giro)
	riflessioni verticali e orizzontale

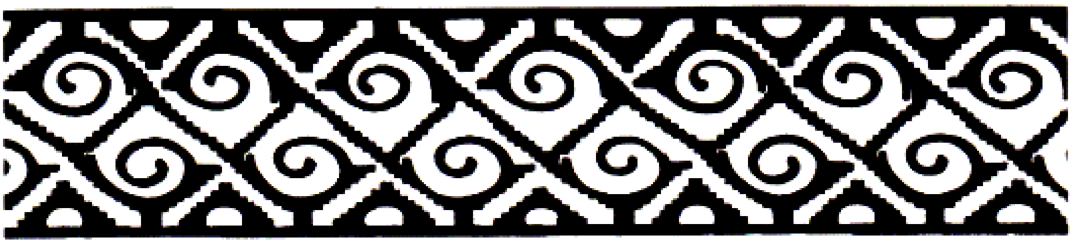
In tutti è sottintesa la traslazione, tranne nel primo dove essa è l'unica isometria presente. Uno schema di questi fregi si trova anche sul testo in uso.

Le figure che seguono, riprese da http://www.robertogiunti.it/, ripropongono altri motivi con le stesse caratteristiche.

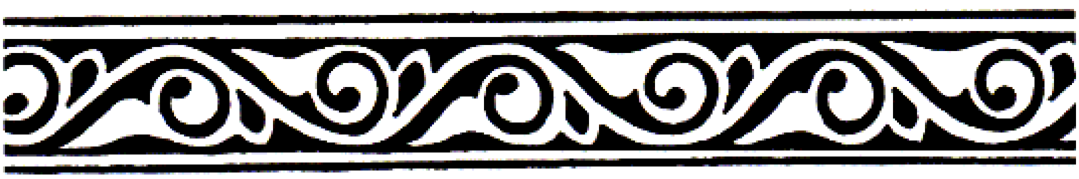
Solo traslazione:



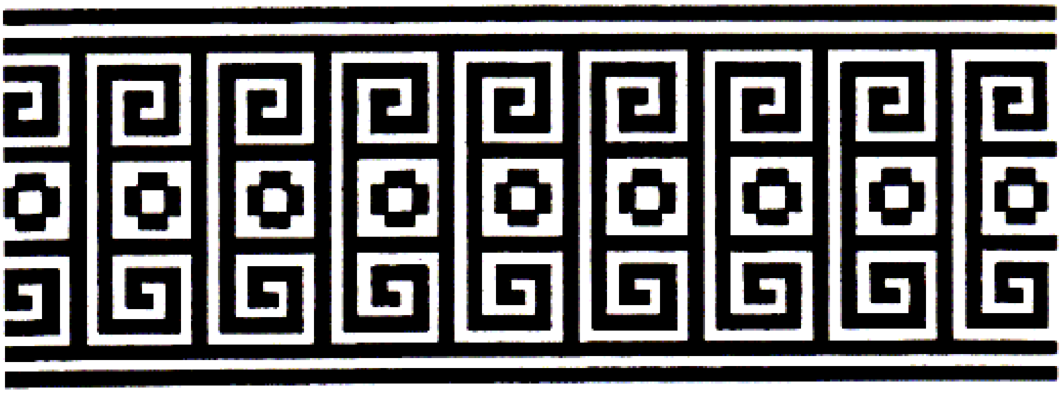
Anche rotazione (mezzo giro):



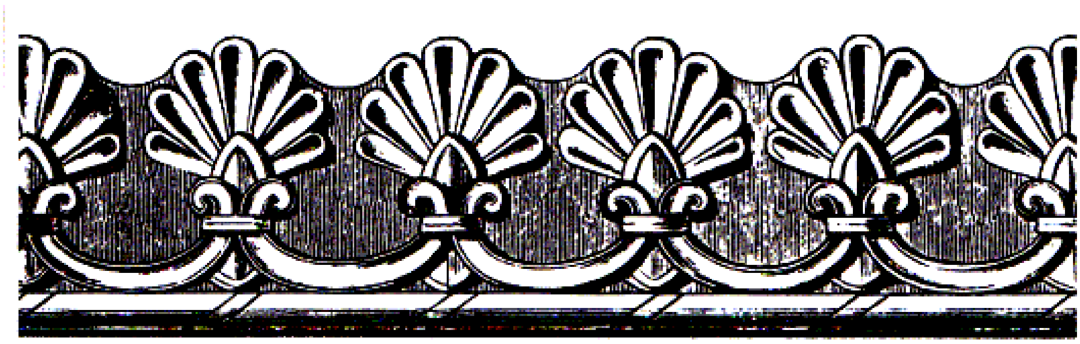
Anche glissoriflessione:



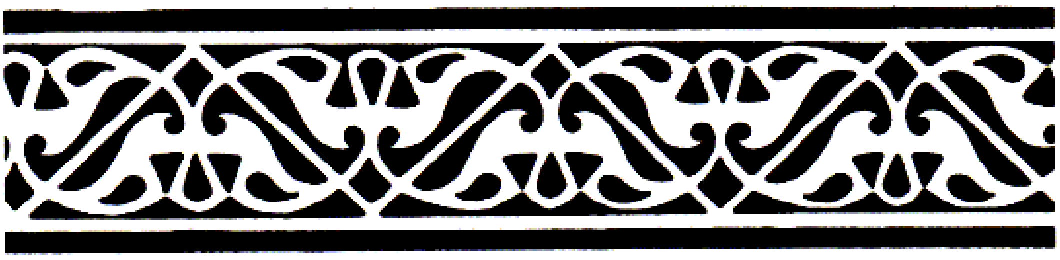
Anche riflessione orizzontale:



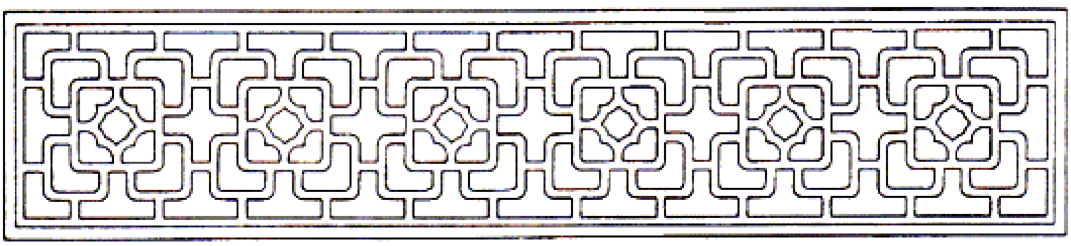
Anche riflessione verticale:



Riflessione verticale e rotazione (mezzo giro):



Anche riflessione verticale e orizzontale:

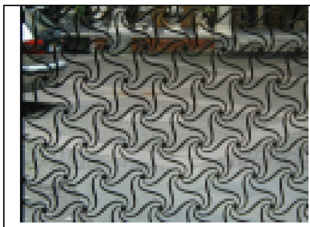


2.4 Mosaici

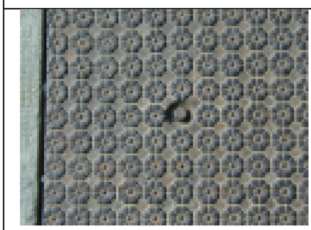
La parola *mosaico* in matematica indica una figura piana il cui gruppo di simmetria (cioè l'insieme di quelle trasformazioni del piano che lasciano invariate le distanze e mutano la figura in se stessa) è discreto e contiene delle traslazioni, ma non più soltanto, come per i fregi, traslazioni in un'unica direzione, bensì almeno due in direzioni diverse.

Si può dimostrare che i possibili gruppi di simmetria per un mosaico sono 17 (e solo 17).

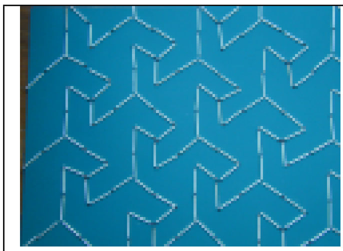
— Due contengono rotazioni, ma solo rotazioni di 60° e multipli.

	solo traslazioni e rotazioni di 60° e multipli
	anche riflessioni

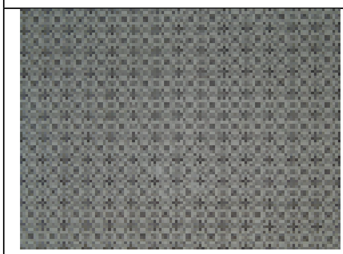
— Tre contengono rotazioni, ma solo rotazioni di 90° e multipli.

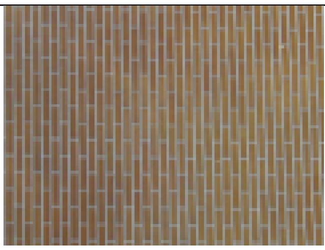
	solo traslazioni e rotazioni di 90° e multipli
	anche riflessioni, rispetto a rette in quattro direzioni diverse
	anche riflessioni, rispetto a rette in due direzioni diverse

— Tre contengono rotazioni, ma solo rotazioni di 120° e multipli.

	solo traslazioni e rotazioni di 120° e multipli
	anche riflessioni, centri di rotazione su un asse di simmetria
	anche riflessioni, centri di rotazione anche non su un asse di simmetria

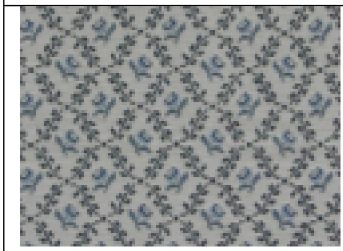
— Cinque contengono rotazioni, ma solo rotazioni di 180° e multipli.

	solo traslazioni e rotazioni di 180° e multipli
	anche riflessioni, rispetto a due rette in direzioni diverse; centri di rotazione su un asse di simmetria

	anche riflessioni, rispetto a due rette in direzioni diverse; centri di rotazione anche non su un asse di simmetria
	anche riflessioni, rispetto a rette in unica direzione
	no riflessioni, contiene glissoriflessioni

— Quattro non contengono rotazioni (a parte quella ovvia di 360°).

	solo traslazioni
	anche riflessioni, no glissoriflessioni

	solo traslazioni e glissoriflessioni rispetto a rette parallele agli assi di simmetria ma che non sono assi di simmetria
	no riflessioni, contiene glissoriflessioni

Uno schema di questi 17 tipi di mosaici si può trovare anche nel testo in uso.

La presenza di simmetria e di equilibrio proporzionale nelle più alte espressioni creative dell'uomo testimonia, fin dall'antichità, lo stretto rapporto che tali concetti realizzano tra scienza, estetica e arte. L'esigenza di individuare nell'arte un linguaggio decifrabile di forme, ha sempre indotto gli artisti ad utilizzare i canoni geometrici, a volte anche intuitivamente, anticipando in alcune conclusioni i matematici stessi: nel mondo dell'arte figurativa, la ripetitività simmetrica di elementi costituisce un modello seguito fin dalle prime manifestazioni artistiche.

H. Weyl, ne *La simmetria*, Feltrinelli 1962, afferma che "gli antichi egizi eccellevano nell'arte ornamentale quattromila anni prima che i matematici scoprissero, nel concetto di gruppo, lo strumento matematico adeguato per spiegare gli ornamenti e derivarne le possibili classi di simmetria"; egli sostiene inoltre che gli Egizi utilizzarono tutte le 17 classi dei gruppi di simmetria piana nelle loro decorazioni. In realtà secondo altri studiosi ne utilizzarono solamente 10. Sicuramente gli arabi le conoscevano tutte e un meraviglioso esempio si può vedere nel Palazzo dell'Alhambra di Granada (XIII secolo).

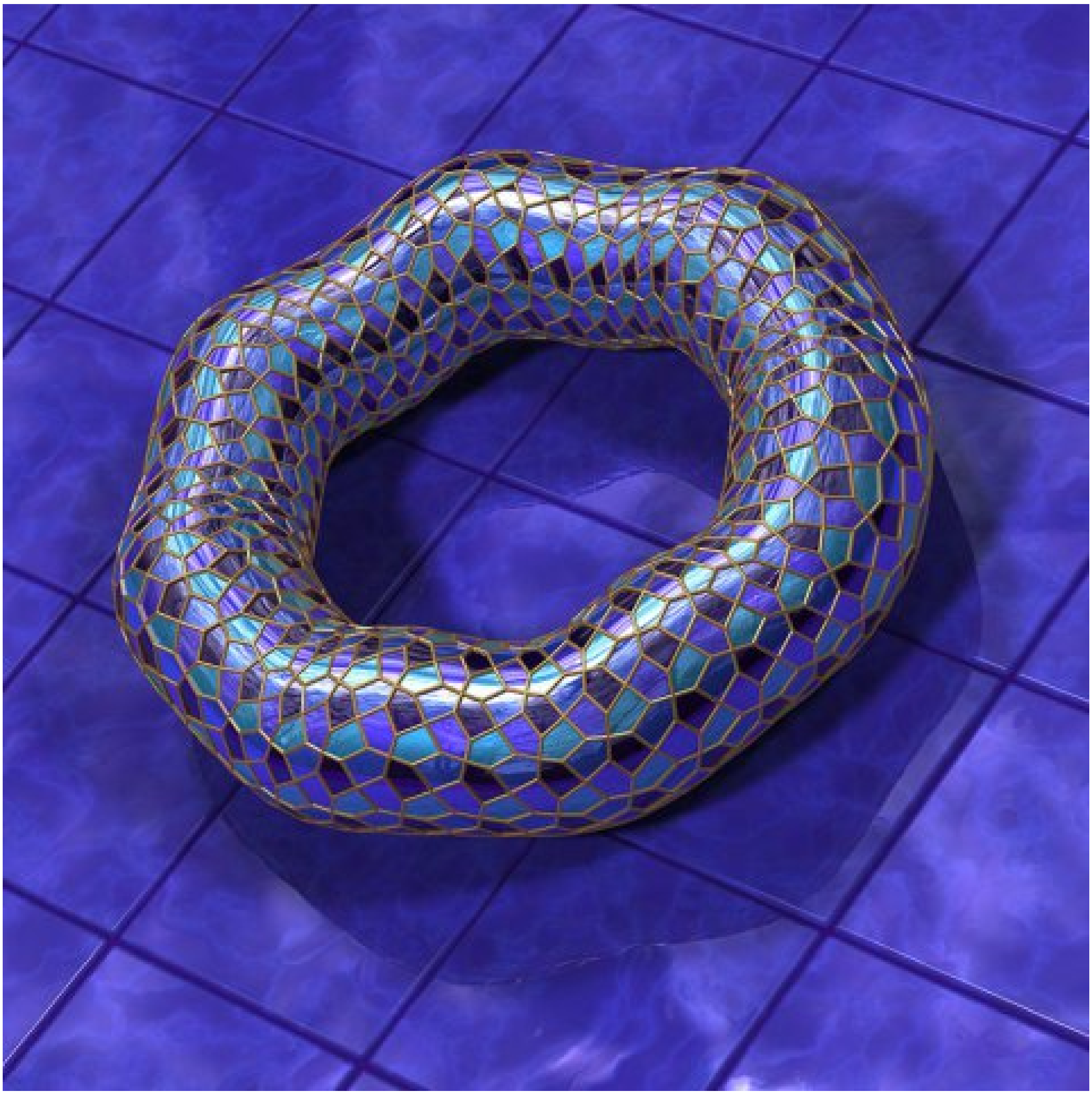
2.5 Tassellazioni del piano

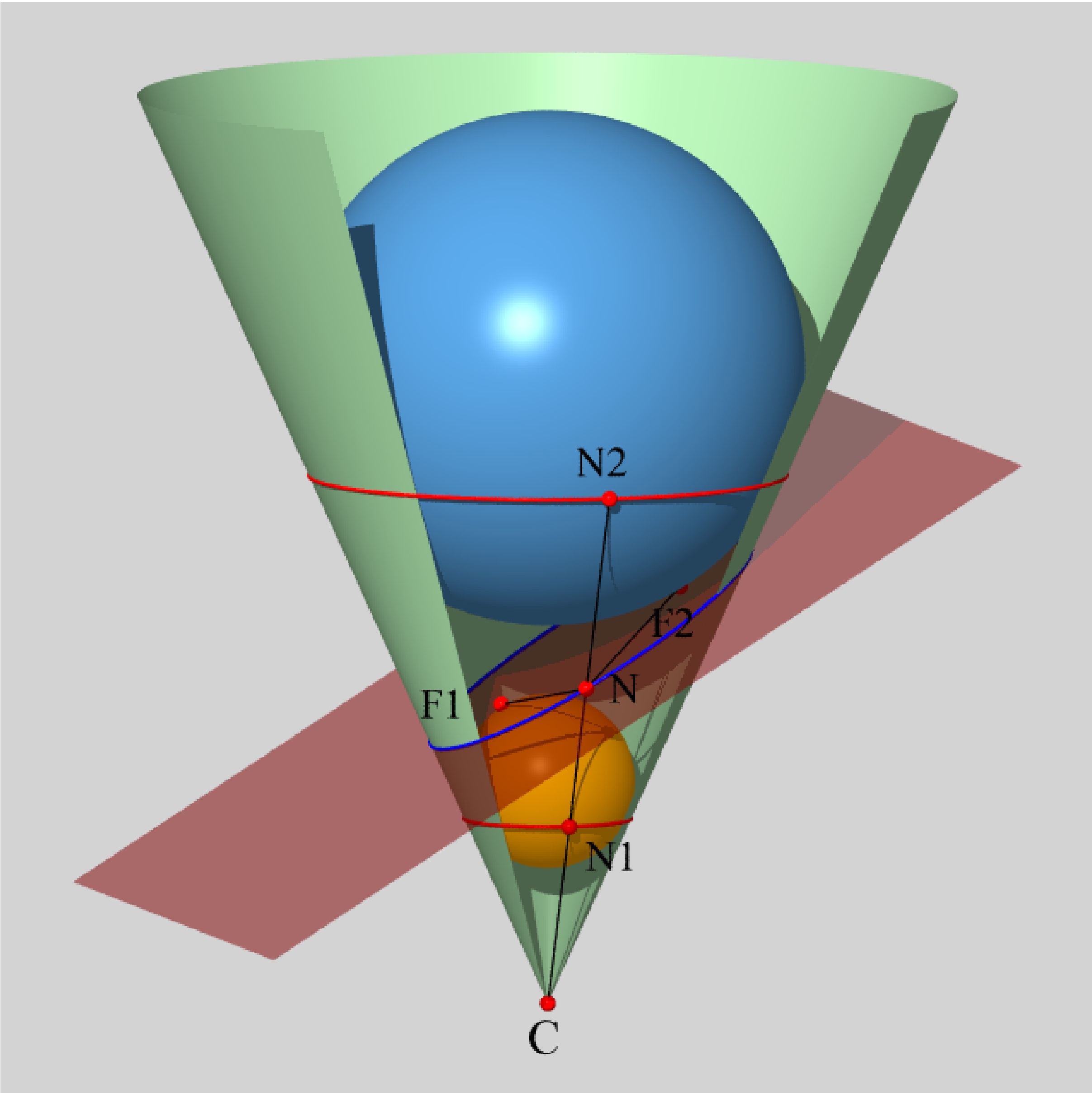
I mosaici sono sostanzialmente *tassellazioni del piano*, cioè divisioni regolari del piano, ovvero insiemi di forme chiuse che lo ricoprono completamente, senza sovrapporsi e senza lasciare spazi vuoti. Nel caso dei mosaici, come detto, esistono particolari simmetrie che li caratterizzano, in particolare per i mosaici simmetrie traslazionali.

Esistono però anche altri tipi di tassellazioni, molto famose e che non contengono simmetrie traslazionali. Tra esse citiamo la Tassellazione di Penrose, che proponiamo in uno spettacolare video realizzato da Maurizio Paolini e Alessandro Musesti, docenti presso il Dipartimento di Matematica e Fisica Nicolò Tartaglia dell'Università Cattolica del Sacro Cuore, sede di Brescia. Il video si raggiunge all'indirizzo http://frecceaquiloni.dmf.unicatt.it/.

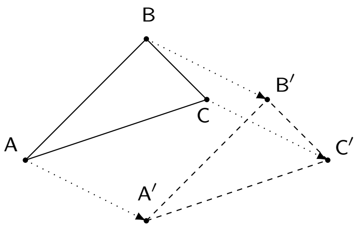
Poiché in questa tassellazione non sono comprese traslazioni, non si tratta di un mosaico né di un fregio, ma più propriamente di un rosone, anche se del tutto poco tradizionale!

A margine segnaliamo la tecnica di realizzazione di questo video che utilizza l'importante software *Persistence of Vision Raytracer*, abbreviato in *POV-Ray*. Il software, che è un Free Software (!!), realizza spettacolari effetti grafici tridimensionali di altissima qualità, come si può vedere nel citato video di unicatt. Tutte le informazioni sul sito ufficiale http://www.povray.org/. Solo per stimolare l'appetito proponiamo qui tre immagini, due più propriamente "artistiche" e una di carattere matematico, interamente realizzate con POV-Ray.



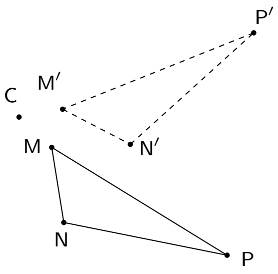

N2
F2
F1
N
N1
C

In ultima di copertina: *Una traslazione, una rotazione, una riflessione e una glissoriflessione*.



Cenni sulle simmetrie

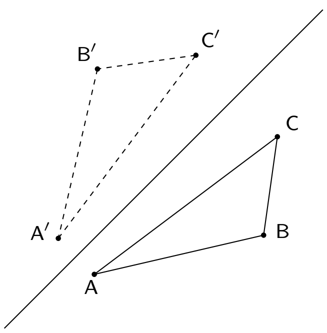
Appunti dalle lezioni del corso di Matematica per il Design
per l'ISIA di Roma, sede di Pordenone



Luciano Battaia

http://www.batmath.it

Versione 1.0 del 22 novembre 2018



Questo fascicoletto è rivolto agli studenti del secondo anno del corso di Matematica per il Design dell'ISIA di Roma, Sede di Pordenone. Contiene solo un'integrazione al testo in uso e alcune immagini.

Luciano Battaia
Già docente di matematica e fisica presso il Liceo Scientifico Grigoletti di Pordenone. Già titolare di corsi di insegnamento e di corsi di esercitazioni di Matematica di Base, Analisi Matematica, Istituzioni di Analisi, Matematica Generale, Matematica e Statistica, Matematica e Biomatematica, Meccanica Razionale, Fisica Matematica, presso le Università di Padova, Trieste e Udine. Attualmente docente di Matematica presso l'Università Ca' Foscari di Venezia e di Matematica per il Design presso l'Istituto Superiore per le Industrie Artistiche di Roma, sede di Pordenone.