# Esercizi sul principio di induzione

**Esercizio 1.** *Dimostrare per induzione che*

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\,,\quad n\geq 1\,.$$

*Risoluzione.* Le dimostrazioni di una proprietà $\mathcal{P}(n)$ per induzione si basano sempre sul seguente schema:

1. Considera il più piccolo valore ammissibile per $n$, diciamolo $\overline{n}$ e prova che $\mathcal{P}(\overline{n})$ è vera.
2. Dimostra il teorema costituito dalle seguenti ipotesi e tesi.
   - *Hp.*: $\mathcal{P}(n)$ (cioè la proprietà da dimostrare);
   - *Th.*: $\mathcal{P}(n+1)$ (cioè la proprietà da dimostrare, ma corrispondente al valore $n+1$).

Nel nostro caso:

1. $\mathcal{P}(1)$ si scrive: $1=\dfrac{1\cdot 2}{2}$ che è banalmente vera.
2. - *Hp.*: $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}\,,\quad n\geq 1\,;$
   - *Th.*: $1+2+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\,,\quad n\geq 1\,.$

Non esistono strategie univoche per procedere nella dimostrazione. In casi come quello proposto dove si tratta di provare una uguaglianza (o anche una disuguaglianza) l'idea base è quella di cercare di esaminare la tesi ed eventualmente di riscriverla in modo da farvi comparire le parti della formula che compaiono nell'ipotesi, così da poter sfruttare l'ipotesi stessa.

Nel nostro caso abbiamo

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n+(n+1)&=(1+2+\cdots+n)+(n+1)\overset{(*)}{=}\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\\&=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,;\end{aligned}$$

abbiamo usato l'ipotesi (cioè la $\mathcal{P}(n)$) nel passaggio segnato con $(*)$. A questo punto non ci resta che osservare che il risultato ottenuto è esattamente quello che si voleva provare. □

**Esercizio 2.** *Dimostrare che se $a$ è un numero reale con $a>-1$, allora*

$$(1+a)^n\geq 1+na\,,\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

*Risoluzione.* Seguendo lo schema indicato dobbiamo procedere con i seguenti due passi.

1. Dimostrare $\mathcal{P}(0)$: $(1+a)^0\geq 1+0\cdot a$, cosa che è banalmente vera.
2. Dobbiamo procedere con la dimostrazione
   - *Hp.*: $(1+a)^n\geq 1+na$;
   - *Th.*: $(1+a)^{n+1}\geq 1+(n+1)a$.

È chiaro che per poter utilizzare l'ipotesi occorre che nella formula da dimostrare compaia $(1+a)^n$. Si può procedere come di seguito indicato.

$$\begin{aligned}(1+a)^{n+1}&=(1+a)^n(1+a)\overset{(*_1)}{\geq}(1+na)(1+a)=\\&=1+a+na+na^2\overset{(*_2)}{=}1+a(n+1)+na^2\overset{(*_3)}{\geq}1+(n+1)a\end{aligned}$$

Nel passaggio segnato con $(*_1)$ abbiamo usato sia l'ipotesi che il fatto che $(1+a)>0$ in quanto $a>-1$. Nel passaggio segnato con $(*_2)$ abbiamo raccolto $a$ solo tra il secondo e il terzo termine, lasciando isolato il quarto, perché in questo modo abbiamo potuto ottenere un'espressione che contiene tutti gli addendi presenti al secondo membro della tesi. Nel passaggio segnato con $(*_3)$ abbiamo utilizzato il fatto che $na^2>0$ e dunque trascurando questo addendo la somma diminuisce. Abbiamo così provato la tesi. □

**Esercizio 3.** *Dimostrare che*

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 , \quad \forall n \geq 1 .$$

*Risoluzione.* Procediamo con lo schema ormai abituale.

1. $\mathcal{P}(1)$: $1^3 = 1^2$, che è banalmente vera.
2. – *Hp.*: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$;
   – *Th.*: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = (1 + 2 + \cdots + n + (n+1))^2$.

La formula da dimostrare contiene, sia al primo che al secondo membro, una somma con un numero variabile di addendi, espressione che è quasi sempre difficile da gestire. Possiamo però ricordare la formula provata nell'esercizio 1[1], riscrivendo sia l'ipotesi che la tesi come segue.

– *Hp.*: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$;

– *Th.*: $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$.

Ora possiamo procedere seguendo lo stesso schema dei precedenti esempi, cioè cercando di riscrivere la tesi in modo da poter facilmente utilizzare l'ipotesi.

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) + (n+1)^3 \overset{(*)}{=} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \\
&= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) = \\
&= (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 .
\end{aligned}$$

Nel passaggio segnato con $(*)$ abbiamo usato l'ipotesi. Il risultato ottenuto è esattamente quanto si voleva provare. □

**Esercizio 4.** *Provare che*

$$n^2 > 2n + 1 , \quad \forall n > 2 .$$

*Risoluzione.*

1. $\mathcal{P}(3)$: $3^2 > 2 \times 3 + 1$, che è banalmente vera[2].
2. – *Hp.*: $n^2 > 2n + 1$;
   – *Th.*: $(n+1)^2 > 2(n+1) + 1 = 2n + 3$.

Per poter utilizzare l'ipotesi dobbiamo far comparire il termine $n^2$ nella tesi.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \overset{(*_1)}{>} (2n+1) + 2n + 1 \overset{(*_2)}{=} 2n + 3 + 2n - 1 \overset{(*_3)}{>} 2n + 3$$

Nel passaggio segnato con $(*_1)$ abbiamo usato l'ipotesi. Nel passaggio segnato con $(*_2)$ abbiamo operato in modo da far comparire gli addendi che sono presenti al secondo membro della formula da dimostrare. Nel passaggio segnato con $(*_3)$ abbiamo utilizzato il fatto che $2n - 1 > 0$, visto che $n > 2$, e quindi trascurando l'addendo $2n - 1$ si ottiene una quantità più piccola. □

**Esercizio 5.** *Provare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$*

$$9^{n+1} + 2^{6n+1} \quad \textit{è divisibile per } 11.$$

*Risoluzione.*

[1] La formula provata nell'esercizio 1 è molto importante e andrebbe memorizzata. Si tratta di ua formula storicamente famosa in quanto pare che Gauss, all'età di 8 anni, ne avesse provato il caso particolare con $n = 100$ durante un esercizio assegnato in classe, forse per punizione, dal suo maestro.

[2] Si osservi che la proprietà da dimostrare non è vera per $n = 2$

1. $\mathcal{P}(0)$: $9^1 + 2^1 = 11$, che è chiaramente divisibile per 11.
2. – *Hp.*: $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11.
   – *Th.*: $9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1}$ è divisibile per 11.

In questo caso abbiamo una prima difficoltà rispetto agli esercizi precedenti, dove la proprietà da dimostrare era già espressa da una formula sulla quale abbiamo fatto delle manipolazioni algebriche: anche in questo caso converrà riscrivere sia l'ipotesi che la tesi traducendo la proprietà data con una formula.

– *Hp.*: $9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11k$ per un opportuno valore di $k \in \mathbb{N}$.
– *Th.*: $9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 11h$ per un opportuno valore di $h \in \mathbb{N}$.

Possiamo ora procedere seguendo lo schema più volte adottato.

$$9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 9 \times 9^{n+1} + 2^6 \times 2^{6n+1} \,. \tag{\#}$$

Abbiamo operato in modo da fare comparire gli stessi addendi che compaiono nell'ipotesi. Purtroppo non possiamo usare direttamente il primo membro della formula che compare nell'ipotesi; possiamo però riscrivere riscrivere l'ipotesi stessa in uno dei due modi che seguono:

$$9^{n+1} = 11k - 2^{6n+1} \quad \text{oppure} \quad 2^{6n+1} = 11k - 9^{n+1} \,.$$

Utilizzando la prima di queste due espressioni (ma sarebbe lo stesso se utilizzassimo la seconda), possiamo procedere con la formula (#).

$$\begin{aligned} 9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} &= 9 \times 9^{n+1} + 2^6 \times 2^{6n+1} = 9 \times (11k - 2^{6n+1}) + 2^6 \times 2^{6n+1} = \\ &= 99k - 9 \times 2^{6n+1} + 2^6 \times 2^{6n+1} = 99k + 55 \times 2^{6n+1} = \\ &= 11 \times (9k + 5 \times 2^{6n+1}) = 11h \,, \end{aligned}$$

che è esattamente quanto si voleva provare. □

# Esercizi su estremo superiore e inferiore in $\mathbb{R}$

**Esercizio 6.** *Si determinino gli estremi superiore e inferiore del seguente insieme di reali, precisando anche se si tratta oppure no di massimo o minimo.*

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \right\} .$$

*Risoluzione.* Cominciamo con l'osservare che l'insieme $A$ è limitato sia superiormente che inferiormente. Proviamo ora, come conviene spesso fare in situazioni come questa, a scrivere esplicitamente alcuni elementi dell'insieme (cioè a tentare di scrivere l'insieme stesso per elencazione, anziché mediante proprietà caratteristica): in molti casi (ma non sempre!) questo aiuta a comprendere la struttura dell'insieme stesso.

| valori di $n$ | elementi di $A$ |
|---|---|
| 1 | $1/2$ |
| 2 | $2/3$ |
| 3 | $3/4$ |

La tabella suggerisce che, al crescere di $n$, gli elementi dell'insieme crescono avvicnandosi sempre più a 1, senza mai arrivarci. La cosa è confermata se si riscrive il generico elemento di $A$ nella forma seguente:

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \;:$$

ora la supposta crescenza è resa evidente dal fatto che $1/(n+1)$ decresce (si tratta di ua frazione con numeratore costante e denominatore crescente). L'estremo inferiore dell'insieme, che coincide con il minimo, sarà allora $1/2$, mentre l'estremo superiore sarà 1 e l'insieme non ha massimo.

La verifica che 1 è proprio l'estremo superiore si può fare direttamente utilizzando le due proprietà dell'estremo superiore stesso:

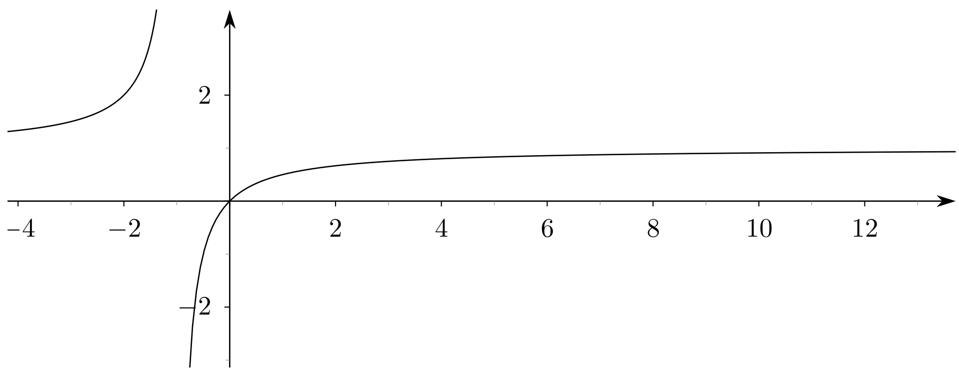
1. $\sup(A) \geq x\,,\ \forall x \in A$;
2. $\forall \varepsilon > 0$ esiste almeno un $x \in A$ tale che $x > \sup(A) - \varepsilon$ (cioè se mi piazzo appena a sinistra di $\sup(A)$ devo trovare alla mia destra almeno un elemento di $A$ (che potrebbe anche essere $\sup(A)$ stesso nel caso che $\sup(A)$ sia contemporaneamente massimo).

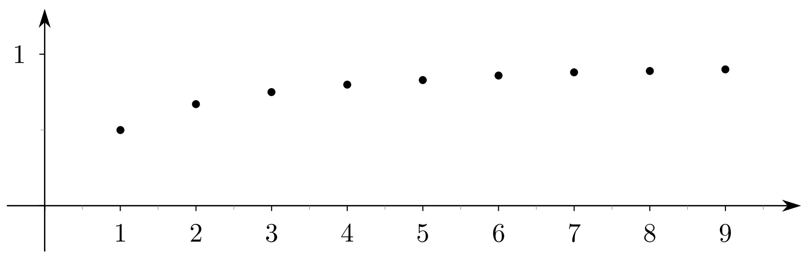
La prima propietà è ovvia in questo caso; per la seconda scegliamo $\varepsilon > 0$ e cerchiamo, se ve ne sono, tutti gli elementi di $A$ che sono maggiori di $1 - \varepsilon$.

$$\frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon \Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow n + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1\,,$$

e di $n$ siffatti ce ne sono addirittura infiniti (si ricordi che l'insieme dei naturali maggiori di un qualunque naturale è sempre infinito). □

**Osservazione.** La difficoltà nella risoluzione di esercizi sulla ricerca di estremi superiore e inferiore è legata al fatto che, a questo punto del corso, non sono disponibili gli strumenti fondamentali dell'analisi (limiti e derivate) e quindi bisogna fare solo ragionamenti elementari. Disponendo delle tecniche che saranno successivamente studiate, si sarebbe potuto tracciare il grafico della funzione $f(x) = {}^{x}/_{(x+1)}$ per dedurne poi quello della successione ${}^{n}/_{n+1}$, dal cui esame sarebbe stato elementare trarre le conclusioni per questo problema. Si vedano i grafici qui di seguito.




**Esercizio 7.** *Si determinino gli estremi superiore e inferiore del seguente insieme di reali, precisando anche se si tratta oppure no di massimo o minimo.*

$$A = \left\{ \frac{x}{x^2+1} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$$

*Risoluzione.* La strategia risolutiva non può ripercorrere quella dell'esercizio precedente. Possiamo intanto osservare che l'estremo superiore e inferiore di $A$ esistono sicuramente perché $A$ è limitato sia superiormente che inferiormente. Dodiché possiamo provare a valutare quali siano i reali che appartengono a questo insieme (in termini della funzione $f(x) = x/(x^2+1)$ si tratta di trovarne l'insieme immagine), andando a vedere per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ è possibile trovare un $x$ tale che

$$\frac{x}{x^2+1} = \lambda\,.$$

Si trova, successivamente,

$$\frac{x}{x^2+1} = \lambda \Rightarrow x = \lambda(x^2+1) \Rightarrow \lambda x^2 - x + \lambda = 0\,.$$

Quest'equazione ha soluzioni se $\lambda = 0$ (nel qual caso ha la soluzione $x = 0$) e, se $\lambda \neq 0$, quando il discriminante è non negativo, ovvero per

$$-\frac{1}{2} \leq \lambda \leq \frac{1}{2}\,.$$

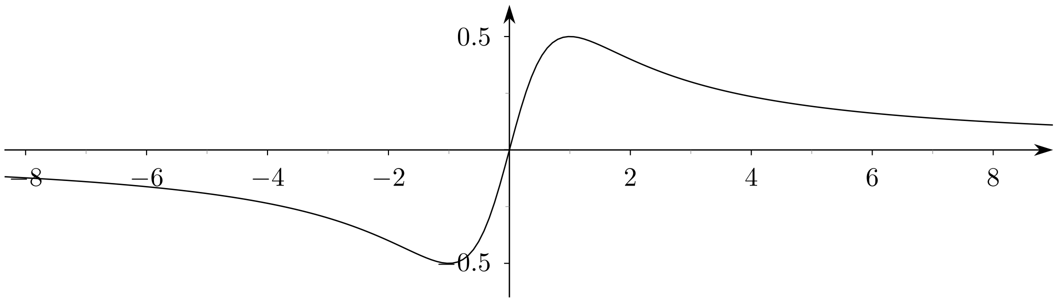
Se ne deduce che l'insieme $A$ può essere scritto come

$$A = \left[-\frac{1}{2}\,,\,\frac{1}{2}\right].$$

Questo premette di concludere immediatamente che

$$\sup(A) = \max(A) = \frac{1}{2}\,,\quad \inf(A) = \min(A) = -\frac{1}{2}\,.$$

Anche in questo caso il tracciamento del grafico della funzione $f(x) = x/(x^2+1)$ avrebbe risolto subito tutti i problemi.




□

**Esercizio 8.** *Si determinino gli estremi superiore e inferiore del seguente insieme di reali, precisando anche se si tratta oppure no di massimo o minimo.*

$$A = \left\{\, \frac{3n^2}{4n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\, n > 0 \,\right\}.$$

*Risoluzione.* Osserviamo che l'insieme è evidentemente inferiormente limitato mentre sempre non essere superiormente limitato, perché al crescere di $n$ il numeratore della frazione $3n^2/(4n+1)$ cresce molto più rapidamente del denominatore. Proviamo anche qui a costruire una tabella contenente gli elementi dell'insieme $A$ corrispondenti ai primi valori di $n$.

| valori di $n$ | elementi di $A$ |
|---|---|
| 1 | $3/5$ |
| 2 | $4/3$ |
| 3 | $27/13$ |

La tabella suggerisce che si tratta successione crescente al crescere di $n$. Proviamo a riscriverla in un altro modo, eseguendo la divisione del numeratore per il denominatore, con la regola della divisione di polinomi.

$$3\frac{n^2}{4n+1} = 3\left[\frac{1}{4}\,n - \frac{1}{16} + \frac{1/16}{4n+1}\right] = 3\left[\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{16(4n+1)} - \frac{1}{16}\right].$$

Questa scrittura mostra che gli elementi dell'insieme si ottengono, a parte il fattore moltiplicativo 3, sommando il valore costante $-1/16$ a

$$\frac{1}{4}\,n + \frac{1}{16(4n+1)}.$$

Quest'ultima è la somma tra una quantità che cresce al crescere di $n$, con una distanza costante di $1/4$ tra un termine e il successivo, e una quantità che decresce al crescere al crescere di $n$, ma con ciascun termine largamente inferiore a $1/4$: la somma risulta essere quindi crescente al crescere di $n$.

Dunque si ha

$$\min(A) = \frac{3}{5}, \quad \sup(A) = +\infty.$$

La crescenza della successione $a_n = n^2/(4n+1)$ poteva anche essere verificata con calcolo diretto, mostrando che $a_{n+1} > a_n$:

$$a_{n+1} > a_n \Leftrightarrow \frac{(n+1)^2}{4n+5} > \frac{n^2}{4n+1} \Leftrightarrow 4n^2 + 6n + 1 > 0,$$

la qual cosa è palesemente vera. □

**Esercizio 9.** *Si determinino gli estremi superiore e inferiore del seguente insieme di reali, precisando anche se si tratta oppure no di massimo o minimo.*

$$A = \left\{ \frac{3n - |\sin n|}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ n > 0 \right\}.$$

*Risoluzione.* Poiché

$$\frac{3n - |\sin n|}{n} = 3 - \frac{|\sin n|}{n},$$

l'insieme risulta essere limitato ($0 \le |\sin n|/n \le 1$). Inoltre, al crescere di $n$, $|\sin n|/n$ tende sicuramente a 0. Quindi 3 è candidato a essere il $\sup(A)$. Proviamone direttamente la seconda proprietà (la prima è evidente). Fissato $\varepsilon > 0$, andiamo a controllare se ci sono elementi dell'insieme che superano $3 - \varepsilon$:

$$3 - \frac{|\sin n|}{n} > 3 - \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|\sin n|}{n} < \varepsilon.$$

Poiché

$$\frac{|\sin n|}{n} \le \frac{1}{n},$$

basterà risolvere

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \text{ ovvero } n > \frac{1}{\varepsilon},$$

che ha infinite soluzioni. Dunque 3 è il sup dell'insieme ma non è il max perché $|\sin n| > 0$ per ogni $n$. Per la ricerca dell'inf, o del min, basterà trovare il più grande dei numeri $|\sin n|/n$. Ora

$$\frac{|\sin 1|}{1} = \frac{\sin 1}{1} > \frac{1}{2}, \text{ perché } \frac{\pi}{6} < 1 < \frac{\pi}{2} \text{ e } \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per tutti gli altri $n$ si ha

$$\frac{|\sin n|}{n} < \frac{1}{n} \le \frac{1}{2}.$$

Questo basta per concludere che $3 - \sin 1$ è il minimo dell'insieme. □