Corso Estivo Matematica/Mathematics

Luciano Battaia

3 luglio 2016

Esercitazione del 30/06/2016

1 Esercizi

Esercizio 1. *È data la funzione*

$$f(x)=x^3-x^2-\frac{x^4}{4}.$$

a) Trovarne il dominio naturale.
b) Trovare per quali valori di x si ha $f(x)>0$.
c) Trovare i limiti

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad e \quad \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

d) Determinare gli intervalli in cui è crescente o decrescente.
e) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti.
f) Determinare gli intervalli in cui è concava o convessa.
g) Determinarne gli eventuali punti di flesso.
h) Supposto di limitare il dominio all'intervallo $[0,3]$, dire perché la funzione deve avere un massimo e un minimo assoluto e determinarli.

Risoluzione.

a) Il dominio naturale è tutto l'insieme dei numeri reali (non c'è alcuna limitazione da imporre alla x).
b) Si tratta di risolvere la disequazione

$$x^3-x^2-\frac{x^4}{4}>0.$$

Raccogliendo x^2 si ottiene

$$x^2\left(x-1-\frac{x^2}{4}\right)>0.$$

La disequazione è stata scomposta nel prodotto di due fattori: di ciascuno dei due possiamo trovare il segno e poi fra un grafico di segno (utilizzando la regola sul segno del prodotto) per concludere.
Il fattore x^2 è positivo per $x\neq 0$, si annulla per $x=0$.

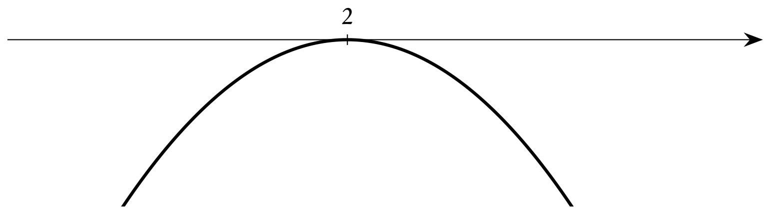
Per il secondo fattore si può usare il grafico della parabola

$$y = -\frac{x^2}{4} + x - 1.$$

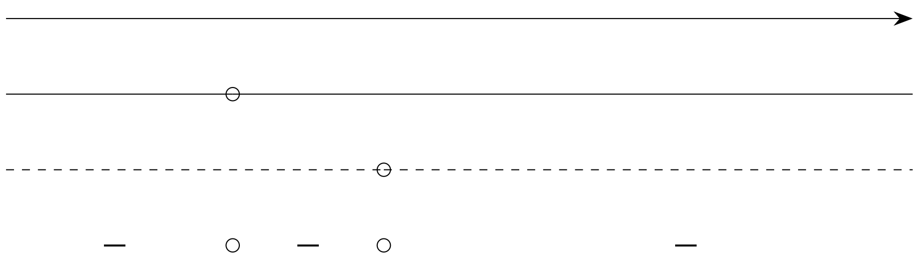
L'equazione associata

$$-\frac{x^2}{4} + x - 1 = 0$$

ha $\Delta = 0$ e ha come unica soluzione $x = 2$, quindi la parabola è del tipo



Se ne deduce che esso è sempre negativo tranne per $x = 2$ dove vale 0. Si possono riportare i risultati in un grafico (dove dobbiamo valutare il segno!).



La funzione proposta non è mai maggiore di 0.

c) Per il primo limite conviene raccogliere il termine di grado massimo:

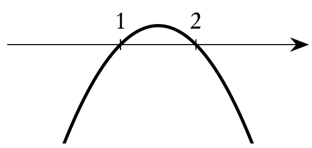
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right) = +\infty\left(0 - 0 - \frac{1}{4}\right) = -\infty.$$

Il secondo limite è invece elementare (non c'è forma indeterminata) e vale $-\infty$.

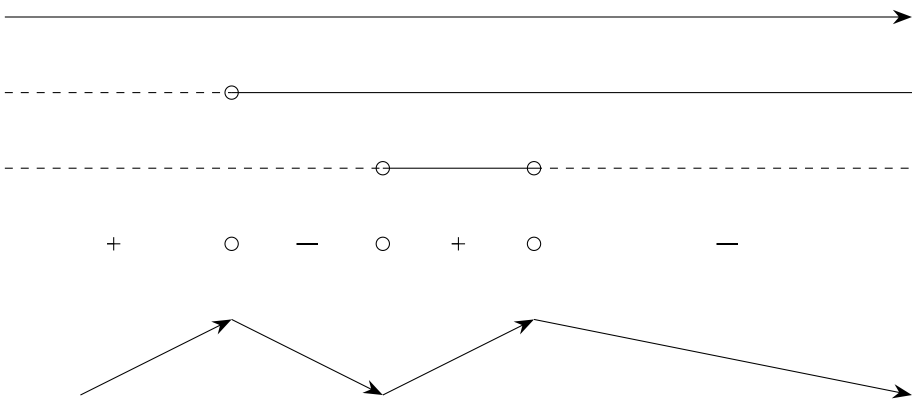
d) La derivata prima della funzione è

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - x^3 = x(-x^2 + 3x - 2).$$

Il primo fattore x è positivo per $x > 0$, negativo per $x < 0$, si annulla per $x = 0$. Per il secondo fattore l'equazione associata ha $\Delta > 0$ e ha come soluzioni $x = 1$ e $x = 2$. Si tratta dunque di una parabola del tipo



Per il prodotto si deduce ora facilmente il segno. Da qui anche gli intervalli di crescenza e decrescenza che sono rappresentati nel grafico.



e) Dal punto precedente si deduce subito che la funzione non ha mimimo assoluto, mentre ha massimo assoluto 0, che raggiungo nei penti 0 e 2. Ha invece un minimo relativo di valore $-1/4$, raggiunto nel punto 1.

f) La derivata seconda della funzione vale

$$f''(x) = -3x^2 + 6x - 2.$$

Con il solito metodo si trova che essa è positiva nell'intervallo

$$\left]1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$$

mentre è negativa all'esterno di tale intervallo. La funzione è dunque convessa nell'intervallo citato, concava all'esterno e ha due flessi negli estremi di tale intervallo: questo basta perché il testo non chiede di trovare i valori dei flessi, ma solo i punti di flesso. Non serve quindi sostituire per trovare le ordinata corrispondenti ai due punti di flesso trovati.

g) Se si considera la funzione solo nell'intervallo $[0, 3]$, tutti i risultati precedenti rimarranno validi e utilizzabili. In più potremo osservare che essendo ora il dominio chiuso e limitato e la funzione continua, ci sarà sia il massimo assoluto che il minimo assoluto, in base al teorema di Weierstrass. Poiché si ha $f(0) = 0$, mentre $f(3) = -9/4$, il massimo assoluto è ancora 0, mentre il minimo assoluto vale $-9/4$.

□

Esercizio 2. *È data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) + 2b, & \text{se } x < 0; \\ 5x^2 + a, & \text{se } 0 \le x \le 1; \\ 2^x - 3, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Si chiede di trovare i valori di a e b, in modo che la funzione sia continua in tutto $\mathbb{R}$.

Risoluzione. Gli unici problemi si potranno avere nei punti di passaggio da un'espressione all'altra della funzione: basterà imporre che in quei punti i due rami della curva-grafico si saldino perfettamente. In 0 si ha

$$\lim_{x\to 0^-} \ln(1-x) + 2b = 2b\,, \quad \lim_{x\to 0^+} 5x^2 + a = a,$$

mentre in 1 si ha

$$\lim_{x\to 1^-} 5x^2 + a = 5 + a\,, \quad \lim_{x\to 1^+} 2^x - 3 = -1.$$

Uguagliando i limiti sinistro e destro in 0 e 1 si trova facilmente $a = -6$, $b = -3$. □

Esercizio 3. *È data la funzione*

$$f(x) = 2(1 - \mathrm{e}^{-6x}), \quad x \geq 0$$

Determinare gli intervalli di crescenza e decrescenza, gli eventuali massimi e minimi relativi e assoluti, gli intervalli di concavità e convessità.

Risoluzione. Si ha $f(0) = 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2(1 - \mathrm{e}^{-\infty}) = 2(1 - 0) = 2.$$

Inoltre $f'(x) = 12\mathrm{e}^{-6x}$, $f''(x) = -72\mathrm{e}^{-6x}$. Se ne deduce che la funzione è sempre crescente nell'intervallo assegnato $x \geq 0$, è sempre concava, ha minimo assoluto 0 (raggiunto per $x = 0$), mentre *non* ha massimo assoluto. Si noti che la funzione tende, crescendo, al valore 2, ma *senza mai* raggiungerlo e per questo non ha massimo assoluto. □

Esercizio 4. *Sia data la funzione*

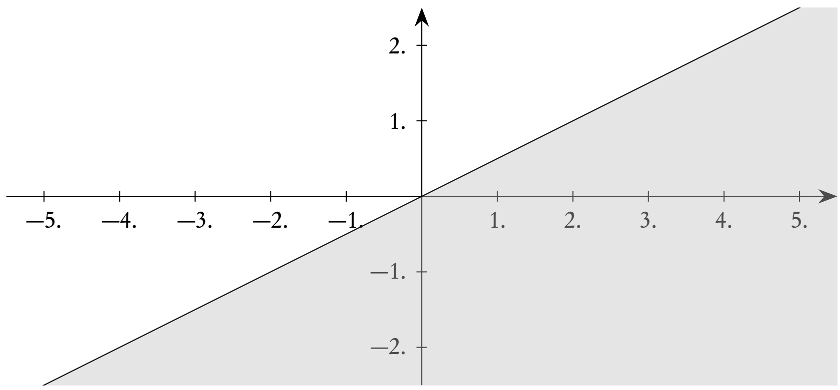
$$f(x, y) = 2\ln(x - 2y) + x^2 - y.$$

Si rappresenti il dominio e se ne determinino i massimi e minimi relativi, se esistono.

Risoluzione. Per il dominio si deve avere

$$x - 2y > 0.$$

Poiché $y - 2y = 0$ (equazione associata) ha come grafico una retta del piano cartesiano, per trovare il dominio basterà provare con un punto che non stia sulla retta, per esempio il punto $(1, 0)$. Sostituendo le sue coordinate nella disequazione si trova $1 - 0 > 0$ che è vera: la disequazione sarà allora vera per tutti i punti del piano che si trovano, rispetto alla retta, nella stessa condizione del punto scelto, ovvero al disotto della retta stessa, esclusa la retta.



Si ha poi

$$\begin{cases} f'_x(x, y) = \dfrac{2}{x - 2y} + 2x = \dfrac{2 + 2x^2 - 4xy}{x - 2y} \\ f'_y(x, y) = \dfrac{-4}{x - 2y} - 1 = \dfrac{-4 - x + 2y}{x - 2y} \end{cases}.$$

Per trovare i punti critici devo uguagliare a zero le due derivate parziali, ovvero i loro numeratori, ottenendo un sistema di 2 equazioni in 2 incognite. Il sistema è di facile risoluzione ricavando y o x dalla seconda e sostituendo nella prima. Si trova l'unica soluzione

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{17}{8}\right),$$

che non appartiene al dominio: la funzione non avrà né massimi né minimi relativi. □

Esercizio 5. *Sia data la funzione*

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y^2}\frac{xy}{2}.$$

Si determini il dominio e i punti critici, se esistono.

Risoluzione. Il dominio è costituito dall'intero piano $\mathbb{R}^2$. Si ha poi

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y^2}2xy^2\dfrac{xy}{2}+\mathrm{e}^{x^2y^2}\dfrac{y}{2}=\dfrac{y}{2}\mathrm{e}^{x^2y^2}(1+2x^2y^2) \\ f'_y(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y^2}2x^2y\dfrac{xy}{2}+\mathrm{e}^{x^2y^2}\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{x^2y^2}(1+2x^2y^2) \end{cases}.$$

Le due derivate si annullano contemporaneamente solo nel punto $(0,0)$, che è dunque l'unico punto critico.

Il testo del problema non lo chiede, ma con un po' di pazienza si potrebbero calcolare le derivate seconde e in particolare il loro valore in $(0,0)$, che è ciò che interessa. Si troverebbe

$$f''_{xx}(0,0)=0,\quad f''_{yy}(0,0)=0,\quad f''_{xy}(0,0)=\frac{1}{2},\quad f''_{yx}(0,0)=\frac{1}{2}.$$

Dunque $H(0,0)=-1/4$ e il punto trovato è di sella. □