Università Ca' Foscari di Venezia
Corso Estivo di Matematica

Tema di Matematica - Prof. Luciano Battaia
1 agosto 2017 - Soluzione schematica

Cognome: ______________________________ Nome: ______________________

Matricola: | | | | | | |

Firma **leggibile** dello studente: ____

Istruzioni.

1. Non è consentito l'uso di calcolatrici programmabili e/o grafiche.
2. Non sono ammessi dispositivi di comunicazione di alcun tipo.
3. Ogni esercizio correttamente risolto vale 6 punti. La risposta deve essere motivata e argomentata con calcoli e richiami di risultati teorici, altrimenti verrà assegnato punteggio nullo.

Valutazione (per il docente)

Es.1	
Es.2	
Es.3	
Es.4	
Es.5	

Esercizio 1. *Data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} a\ln(x), & se\ x \geq 1 \\ x^2 + bx, & se\ x < 1 \end{cases},$$

determinare $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ in modo che la funzione sia continua e derivabile in tutto il dominio. Trovare poi l'area della regione finita di piano compresa tra il grafico della funzione, l'asse delle ascisse e le rette $x = 0$ e $x = 3$.

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 + b$, $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0$

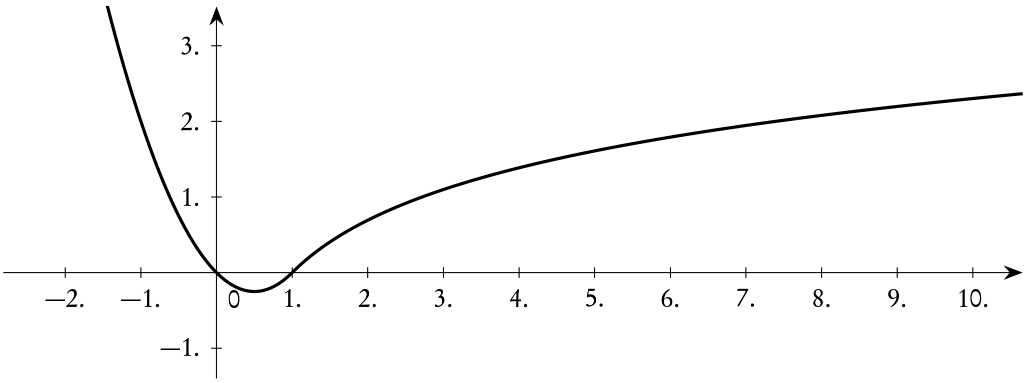
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{x}, & \text{se } x > 1 \\ 2x + b, & \text{se } x < 1 \end{cases},$$

$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = 2 + b$, $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = a$

Dunque $a = 1$, $b = -1$ e quindi

$$f(x) = \begin{cases} \ln(x), & \text{se } x \geq 1 \\ x^2 - x, & \text{se } x < 1 \end{cases},$$

Grafico sommario (non richiesto dal testo):



L'area richiesta è data da

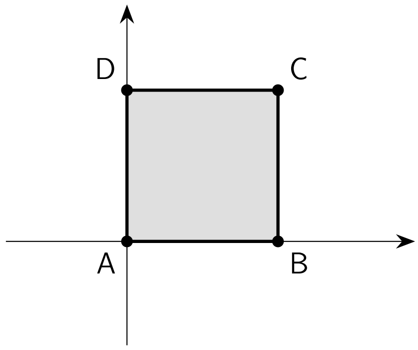
$$\int_0^1 \big(0 - (x^2 - 1)\big)\,\mathrm{d}x + \int_1^3 \big((\ln(x) - 0)\big)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \Big[x\ln(x) - x\Big]_1^3 = 3\ln(3) - \frac{11}{6}.$$

Esercizio 2. *Data la funzione*

$$f(x,y)=x^3+y^3-3xy+2$$

determinarne il massimo e minimo assoluto nel quadrato del piano $\mathsf{O}xy$ *delimitato dai punti* $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$.

Il quadrato richiesto è



Si ha

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2-3y=0 \\ f'_y = 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=x^2 \\ x^4-x=0 \end{cases}$$

Si trovano i due punti $(0,0)$ e $(1,1)$ che stanno sul bordo del quadrato richiesto. Su $\overline{\mathsf{AB}}$ si ha $g(x)=x^3+2$ che è crescente nel tratto richiesto; su $\overline{\mathsf{BC}}$ si ha $h(y)=y^3-3y+3$, che è decrescente sul tratto richiesto; sul tratto $\overline{\mathsf{DC}}$ si ha $l(x)=x^3-3x+3$ che è decrescente sul tratto richiesto; infine su $\overline{\mathsf{AD}}$ si ha $m(y)=y^3+2$ che è crescente sul tratto richiesto. Basta allora confrontare i valori nei quattro punti vertici del quadrato.

Il minimo assoluto vale 1, il massimo assoluto vale 3

Esercizio 3. *Data la funzione*

$$f(x,y) = e^{x^3+y^2-3x},$$

a) *calcolarne le derivate parziali prime;*
b) *determinare gli eventuali massimi e minimi relativi e gli eventuali punti di sella.*

Si ha

$$\begin{cases} f'_x = (3x^2-3)e^{x^3+y^2-3x} \\ f'_Y = 2ye^{x^3+y^2-3x} \end{cases}$$

Uguagliando a zero si trovano facilmente i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$.
Calcolando le ferivate seconde e i due hessiani nei punti trovati si ottiene

$$H(1,0) = \begin{vmatrix} 6e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{-2} \end{vmatrix} \quad , H(-1,0) = \begin{vmatrix} -6e^{2} & 0 \\ 0 & 2e^{2} \end{vmatrix}$$

Il primo è un punto di minimo, il secondo di sella.
Si poteva anche osservare che sarebbe stato sufficiente studiare la funzione $g(x,y) = x^3+y^2-3x$, con una certa semplificazione dei calcoli.

Esercizio 4. *Dire se il seguente sistema*

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+2z=-1 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$$

ha soluzioni e, in caso affermativo, trovarle.

Il determinante della matrice incompleta è zero, ed essa ha rango due (basta prendere il minore formato dalle prime due righe e colonne).

Per la matrice completa ci sono altri tre minori di ordine tre, e sono tutti tre nulli, dunque anch'essa ha rango due. Il sistema è compatibile: avendo scelto le prime due righe e colonne posso tralasciare la terza equazione e portare a secondo membro la z, che rimarrà arbitraria. Si ottiene facilmente, per esempio con Cramer,

$$x=\frac{1-4z}{3}, \quad y=\frac{2+z}{3}, \quad z=z\,.$$

Esercizio 5. *Dire se la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, calcolarne l'inversa.

Il determinante di A vale 1, quindi la matrice è invertibile. Si ottiene, con calcoli standard,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 31 & -19 & 3 & -4 \\ -23 & 14 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$