Ottimizzazione vincolata

Luciano Battaia

Questi appunti[1], ad uso degli studenti del corso di Matematica (A-La) del corso di laurea in Commercio Estero dell'Università Ca' Foscari di Venezia, campus di Treviso, contengono un'integrazione al testo "Metodi matematici per l'analisi economica e finanziaria" di K.Sydsæter, P.Hammond e A.Strøm e si inseriscono dopo il paragrafo 10.5.

Cominciamo ricordando che il problema che si vuole trattare è quello di trovare il massimo e minimo assoluto di una funzione[2] f, reale di due variabili reali, che supponiamo continua e dotata di derivate prime e seconde continue, supponendo la funzione definita in un sottoinsieme[3] S chiuso e limitato (ovvero compatto) di $\mathbb{R}^2$.

Il problema si può risolvere seguendo i tre passi seguenti.

1. Determinare i punti stazionari della funzione f all'interno di S.
2. Determinare il più piccolo e il più grande valore di f sulla frontiera di S e i relativi punti dove questi valori sono assunti.
3. Calcolare la funzione in tutti i punti trovati in 1 e 2 (punti che nei casi di nostro interesse sono in numero finito) e, mediante confronto diretto, trovare il massimo e minimo di f in S.

Sappiamo già come trattare il punto 1, qui ci vogliamo occupare del punto 2, segnalando che il problema può essere molto complesso in generale, anche se noi ci limiteremo solo a casi molto semplici.

Per renderci conto del tipo di problema consideriamo una funzione $f(x,y)$, definita su tutto $\mathbb{R}^2$, e il cui grafico è rappresentato nella figura 1.

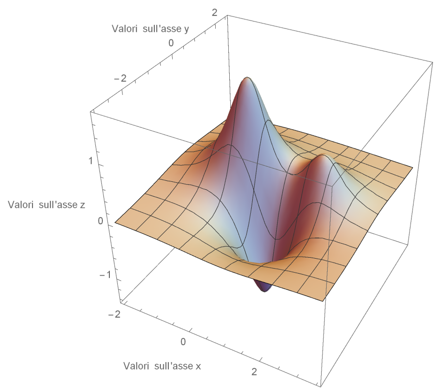

Figura 1 *Una funzione di due variabili con due massimi relativi (due "cime") e un minimo relativo (un "fondo valle").*

[1] Versione del 9 novembre 2015.

[2] La funzione f da massimizzare si chiama abitualmente "funzione obiettivo".

[3] L'insieme S o, a volte, la sua frontiera, si chiama "vincolo".

Le figure successive 2 e 3 mostrano come la ricerca del massimo e minimo su un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ (un cerchio in tutti e quattro gli esempi), sia un problema completamente diverso.

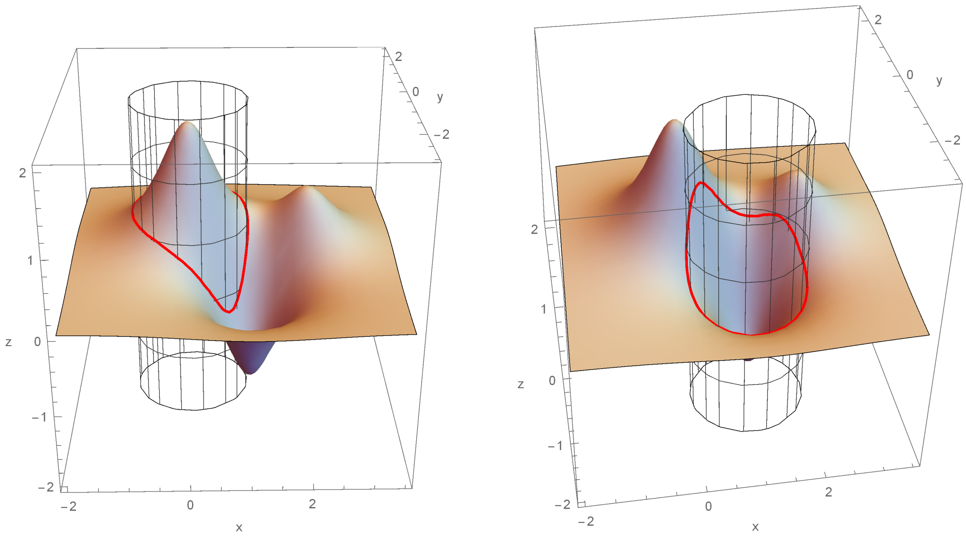

Figura 2 *La funzione della figura 1, ristretta a cerchi del piano* $\mathbb{R}^2$.

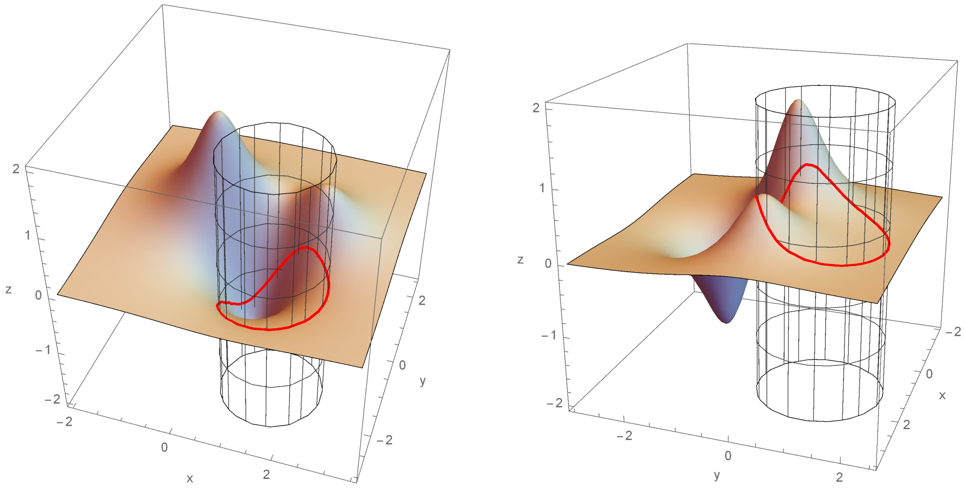

Figura 3 *La funzione della figura 1, ristretta a cerchi ancora diversi del piano* $\mathbb{R}^2$.

Il testo di Sydsæter, Hammond e Strøm tratta un metodo generale per risolvere questo tipo di problemi, detto "Metodo dei moltiplicatori di Lagrange", di cui qui non ci occuperemo. Considereremo invece una tecnica di carattere elementare che consiste nel ricondurre il problema in due variabili a un problema in una sola variabile, tecnica che tuttavia è applicabile in un limitato numero di casi. Proponiamo alcuni esempi per capire di che si tratta.

Esempio 1.

Sia $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ e supponiamo di voler trovare il massimo e il minimo di f sulla circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$. Se sostituiamo, nella f, x^2+y^2 con 1, la f stessa si riduce alla funzione, detta "restrizione di f alla circonferenza",

$$f|_{x^2+y^2=1}=g(y)=y, \quad -1\le y\le 1,$$

dove abbiamo evidenziato il fatto che questa è una funzione della sola y: di questa funzione è molto semplice trovare il massimo e il minimo: come vedremo questo ci consentirà di trovare il massimo e il minimo di f su questa circonferenza. In questo caso (e in quelli che ci interesseranno) la circonferenza è un insieme chiuso e limitato e dunque, in base al teorema di Weierstrass, il massimo e minimo assoluti esistono sicuramente.

Esempio 2.

Sia $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$ e supponiamo di voler trovare il massimo e il minimo sul bordo del quadrato di vertici $\mathsf{O} = (0,0)$, $\mathsf{A} = (4,0)$, $\mathsf{B} = (4,4)$ e $\mathsf{C} = (0,4)$. Basterà trovare l'espressione della funzione ristretta ai quattro segmenti che costituiscono il perimetro del quadrato.

1. Sul segmento $\overline{\mathsf{OA}}$ si ha $0 \le x \le 4$ e $y = 0$, quindi $f|_{\mathsf{OA}} = g(x) = x^3 + 27, \quad 0 \le x \le 4$.
2. Sul segmento $\overline{\mathsf{AB}}$ si ha $x = 4$ e $0 \le y \le 4$, quindi $f|_{\mathsf{AB}} = h(y) = y^3 - 36y + 91, \quad 0 \le y \le 4$.
3. Sul segmento $\overline{\mathsf{BC}}$ si ha $0 \le x \le 4$ e $y = 4$, quindi $f|_{\mathsf{BC}} = l(x) = x^3 - 36x + 91, \quad 0 \le x \le 4$.
4. Sul segmento $\overline{\mathsf{CO}}$ si ha $x = 0$ e $0 \le y \le 4$, quindi $f|_{\mathsf{CO}} = m(y) = y^3 + 27, \quad 0 \le y \le 4$.

Di tutte queste quattro funzioni è facile trovare il massimo e il minimo.

Esempio 3.

Sia $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + x - 1$ e supponiamo di voler trovare il massimo e il minimo sulla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x = 0$. Se sostituiamo, nella f, y^2 con $-x^2 - 2x$, otteniamo la funzione

$$f|_{x^2+y^2+2x=0} = g(x) = 3x^2 + 3x - 1.$$

Poiché la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x = 0$ ha centro in $(-1,0)$ e raggio 1, la x varia da -2 a 0. Basterà dunque trovare il massimo e minimo della precedente funzione $g(x)$ della sola variabile x, nell'intervallo $[-2,0]$.

Notiamo esplicitamente che se invece della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x = 0$ avessimo considerato, per esempio, la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x + y = 0$, la risoluzione del corrispondente problema di massimo e minimo non sarebbe stata così agevole: non è facile[4] eseguire una sostituzione nella funzione $f(x,y)$ in modo da ottenere una funzione di una sola variabile.

Passiamo alla risoluzione dettagliata dei problemi di massimo e minimo introdotti negli esempi precedenti.

Esempio 1 - risoluzione.

Il problema si completa ora in quello di trovare il massimo e minimo assoluto della funzione f data sul cerchio S che ha per bordo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$. Per i punti interni calcoliamo le derivate parziali prime e cerchiamo i punti dove sono entrambe nulle.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 2x + 1 = 0 \\ f'_y(x,y) = 2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = \left(0, -\frac{1}{2}\right).$$

Il punto trovato è interno al dominio S in esame, quindi è un punto stazionario ammissibile per il problema. Non è necessario fare il test delle derivate seconde per controllare se si tratta effettivamente di un minimo o un massimo: poiché i punti che troveremo sono in numero finito, basterà un confronto diretto per trovare quelli di massimo assoluto e di minimo assoluto. In questo punto troviamo

$$f\left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}.$$

Per la frontiera consideriamo la funzione $g(y)$ ad essa ristretta, funzione che abbiamo già trovato: anche senza usare le derivate troviamo che il suo minimo si raggiunge in $y = -1$ e il suo massimo in $y = 1$.

[4] La cosa sarebbe tuttavia possibile usando, per esempio, una sostituzione trigonometrica che però esula dal nostro contesto.

Sostituendo i valori 1 e -1 nell'equazione della circonferenza troviamo sempre $x=0$. Sulla frontiera abbiamo dunque due punti "candidati" ad essere di estremo assoluto. Essendo

$$f\left(0,-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4},\quad f(0,1)=1,\quad f(0,-1)=-1,$$

possiamo concludere che il massimo[(5)] di f in S è 1 e viene raggiunto in $(0,1)$ (sul bordo di S), mentre il minimo è $-5/4$ e viene raggiunto in $(0,-1/2)$ (all'interno di S).

La figura 4 illustra la situazione tridimensionale.

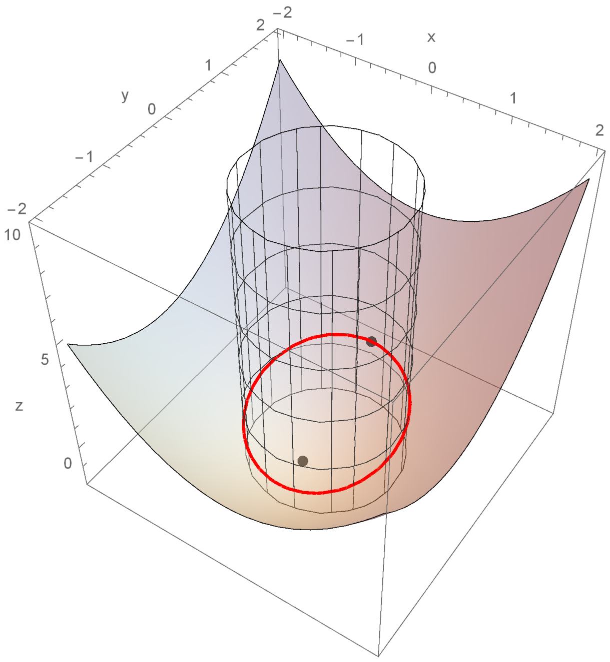

Figura 4 *Massimo e minimo vincolato per la funzione dell'esempio* 1.

La figura 5 illustra invece la situazione nel piano Oxy.

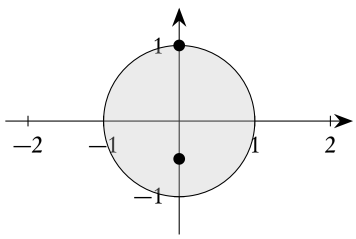

Figura 5 *Massimo e minimo vincolato per la funzione dell'esempio* 1.

Esempio 2 - risoluzione.

Il problema si completa ora in quello della ricerca del massimo e minimo assoluto della funzione f sull'intero quadrato S il cui perimetro abbiamo già indicato. Per i punti stazionati interni procediamo

[5] Poiché sappiamo che $(0,1)$ è di massimo sulla frontiera e $(0,-1)$ è di minimo, avremmo anche potuto separare la ricerca dei punti di massimo da quelli di minimo (e la cosa è conveniente se i punti sono tanti), il massimo andava ricercato tra $(0,-1/2)$ e $(0,1)$, il minimo tra $(0,-1/2)$ e $(0,-1)$: anche facendo un confronto tra tutti i punti, comunque, si perviene allo stesso risultato.

come al solito a calcolare i punti in cui le due derivate prime si annullano contemporaneamente.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 3x^2 - 9y = 0 \\ f'_y(x,y) = 3y^2 - 9x = 0 \end{cases}.$$

Per risolvere il sistema si può, ad esempio, ricavare y dalla prima e sostituirlo nella seconda. Si trova facilmente:

$$y = \frac{x^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^4}{9} - 3x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 27x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 27) = 0,$$

da cui $x = 0$ oppure $x = 3$. In corrispondenza si trovano i valori di y, concludendo che i punti stazionari di f sono due

$$(0,0) \quad \text{e} \quad (3,3).$$

Solo il secondo punto è ammissibile per il problema, in quanto è l'unico interno al dominio S. Si ha poi $f(3,3) = 0$.

Per la frontiera esaminiamo le quattro funzioni di una sola variabile già determinate.

1. Segmento $\overline{OA}$: $g(x) = x^3 + 27$, $0 \le x \le 4$. Poiché $g'(x) = 3x^2$, la funzione g è strettamente crescente e il suo minimo si raggiunge nell'estremo sinistro, il suo massimo nell'estremo destro: $x = 0$, $x = 4$. Su questo segmento la y vale 0, quindi due punti candidati a risolvere il nostro problema sono $(0,0)$ (per il minimo) e $(4,0)$ (per il massimo).
2. Segmento $\overline{AB}$: $h(y) = y^3 - 36y + 91$, $\quad 0 \le y \le 4$. Si ha $h'(y) = 3y^2 - 36$, da cui si deduce che la funzione h, nell'intervallo considerato, decresce da 0 a $2\sqrt{3}$ e cresce da $2\sqrt{3}$ a 4. Essa raggiunge sicuramente il minimo in $2\sqrt{3}$, mentre raggiunge il massimo in 0: infatti $h(0) = 91$, mentre $h(4) = 11$. Poiché in questo segmento $x = 4$, i due punti candidati per il nostro problema sono $(4,0)$ (per il massimo) e $(4, 2\sqrt{3})$ (per il minimo).
3. Segmento $\overline{BC}$: $l(x) = x^3 - 36x + 91$, $\quad 0 \le x \le 4$. Con gli stessi calcoli del punto precedente si trova facilmente che $(0,4)$ e $(2\sqrt{3}, 4)$ sono i punti candidati, rispettivamente per il massimo e il minimo.
4. Segmento $\overline{CO}$: $m(y) = y^3 + 27$, $\quad 0 \le y \le 4$. Come nel punto 1 si trova ora che $(0,0)$ e $(0,4)$ sono, rispettivamente per il minimo e il massimo i due nuovi punti candidati.

Calcolando la funzione f su tutti questi punti si trova che $(4,0)$ e $(0,4)$, sulla frontiera, sono punti di massimo dove la funzione vale 91, mentre $(3,3)$, che si trova all'interno, è punto di minimo dove la funzione vale 0.

La figura 6 illustra la situazione tridimensionale.

La figura 7 illustra invece la situazione nel piano Oxy.

Esempio 3 - risoluzione.

Il problema si completa ora in quello della ricerca del massimo e minimo assoluto della funzione f sul cerchio S che ha per bordo la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 + 2x = 0$. Per i punti stazionari interni procediamo come al solito a calcolare i punti in cui le due derivate prime si annullano contemporaneamente.

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 4x + 1 = 0 \\ f'_y(x,y) = -2y = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = \left(-\frac{1}{4}, 0\right).$$

Il punto trovato è ammissibile, in quanto interno al cerchio S. Si ha

$$f\left(-\frac{1}{4}, 0\right) = -\frac{9}{8}.$$

Sulla frontiera basta studiare la funzione $g(x) = 3x^2 + 3x - 1$ che abbiamo già trovato. Trattandosi di una parabola si potrebbe studiare senza usare le derivate; facendo la derivata si trova comunque che

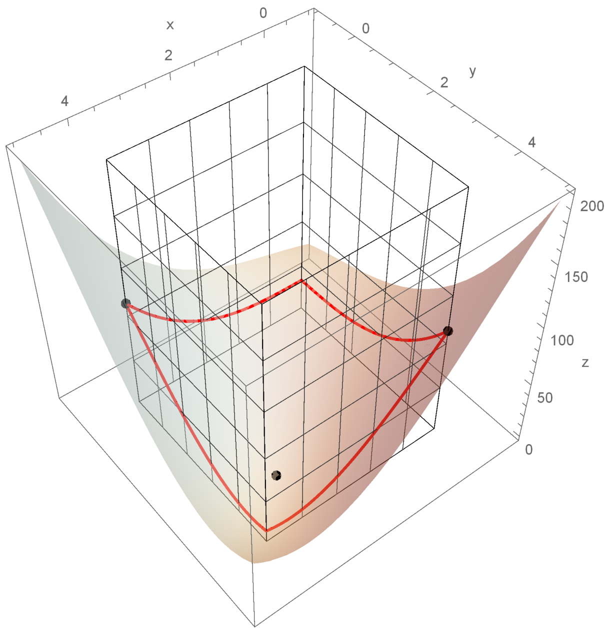

Figura 6 *Massimi e minimo vincolati per la funzione dell'esempio 2.*

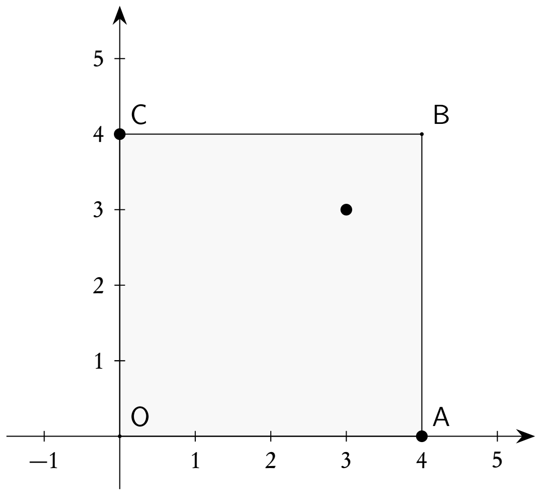

Figura 7 *Massimi e minimo vincolati per la funzione dell'esempio 2.*

essa cresce per $x > -1/2$, mentre decresce per $x < -1/2$. La funzione g raggiunge dunque il minimo per $x = -1/2$ e il massimo per $x = -2$ (in -2 vale 5, mentre in 0 vale 1). Per $x = -2$ sostituendo nell'equazione della circonferenza si ottiene $y = 0$, mentre per $x = -1/2$ si ottiene $y = \pm\sqrt{3}/2$. I tre nuovi punti candidati per il nostro problema sono dunque

$$(-2,0), \quad \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Essendo

$$f(-2,0) = 5, \quad f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{7}{4},$$

si trova che il massimo è raggiunto nel punto $(-2,0)$ sulla frontiera e il minimo nei due punti

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

sempre sulla frontiera. Il massimo e il minimo valgono, rispettivamente, 5 e $-7/4$.

La figura 8 illustra la situazione tridimensionale.

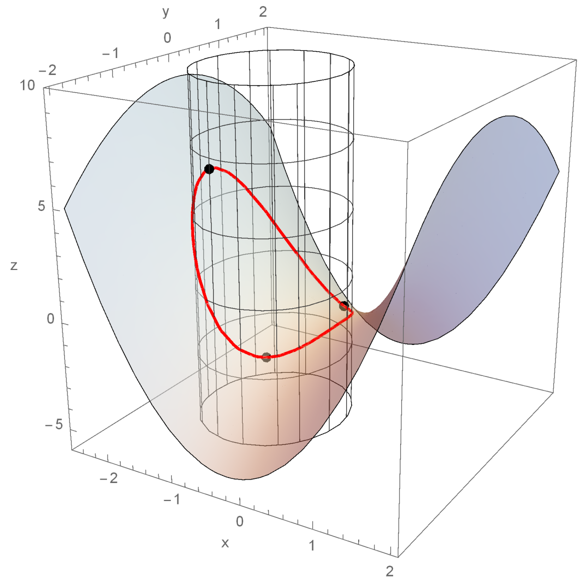

Figura 8 *Massimo e minimi vincolati per la funzione dell'esempio* 3.

La figura 9 illustra invece la stessa situazione nel piano Oxy.

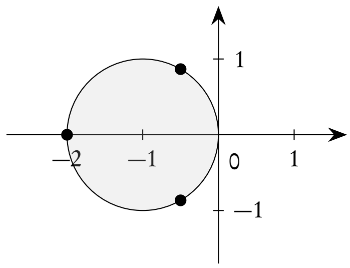

Figura 9 *Massimo e minimi vincolati per la funzione dell'esempio* 3.

È opportuno segnalare che le figure tridimensionali qui proposte servono a evidenziare il significato geometrico dei risultati ottenuti, mentre per la risoluzione pratica di un esercizio di massimo e minimo vincolato per funzioni di variabili, è sufficiente la rappresentazione grafica della situazione nel piano Oxy, dove conviene visualizzare sia l'insieme S che i punti di estremo trovati.

Proponiamo ora due esercizi di applicazione del metodo esposto, con indicazione schematica del metodo risolutivo.

Esercizio 1.

Trovare il massimo e minimo assoluto di $f(x,y)=3x^2+4y^2-6x-12$ sul cerchio di centro l'origine e raggio 2.

Indicazioni per la risoluzione: All'interno si trova il punto $(1,0)$; sulla frontiera la funzione si riduce a $g(x) = -x^2 - 6x + 4$, con $-2 \le x \le 2$. La funzione $g(x)$ è decrescente in $[-2,2]$, quindi ha massimo in -2 e minimo in 2. Il massimo assoluto per f è raggiunto in $(-2,0)$, il minimo in $(1,0)$.

Esercizio 2.

Trovare il massimo e minimo assoluto di $f(x,y) = e^{xy}$ su $S = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 1 \le y \le 3 \}$.
Indicazioni per la risoluzione: Il dominio S è costituito dalla parte di piano compresa tra la parabola $y = x^2 - 1$ e la retta $y = 3$. All'interno si trova il punto $(0,0)$. Bisogna poi dividere la frontiera in due parti. Su $y = 3$ la funzione si riduce a $g(x) = e^{3x}$, con $-2 \le x \le 2$; su questo tratto la funzione è crescente e il minimo si raggiunge per $x = -2$, il massimo per $x = 2$. Su $y = x^2 - 1$ la funzione si riduce a $h(x) = e^{x^3 - x}$, con $-2 \le x \le 2$. Studiando la derivata di questa funzione si trova che il massimo di h si raggiunge per $x = 2$, il minimo per $x = -2$. Si trova che il minimo assoluto per f si raggiunge in $(-2,3)$, il massimo assoluto in $(2,3)$.