

Corso di Matematica e Statistica - Domande tipiche nei temi d'esame
Gruppo 1

1. Della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1},$$

trovare quali sono i punti in cui la tangente al grafico è orizzontale.

2. Dare la definizione di asintoto obliquo per una funzione e dire se la funzione seguente ha oppure no asintoti obliqui:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 - 1}.$$

3. Se in corrispondenza a un punto x_0 del dominio di una funzione si ha $f'(x_0) = 0$, si può dire che la funzione ha sicuramente in x_0 un punto di massimo o minimo relativo?

4. Della funzione

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad -2 \leq x \leq 2,$$

dire se esistono “punti di Rolle” e, se si, trovarli.

5. Della funzione

$$f(x) = -2x^2 + x + 3, \quad -3 \leq x \leq 0,$$

dire se esistono “punti di Lagrange” e, se si, determinarli.

6. Della funzione

$$f(x) = |x|, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

dire se esistono “punti di Rolle” e, se si, trovarli.

7. Calcolare i seguenti limiti sia usando la regola di l'Hôpital che senza:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1};$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x+1};$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x}.$

8. Enunciare il teorema di Rolle e dire se le condizioni dell'enunciato sono necessarie, oppure sufficienti, oppure necessarie e sufficienti per la validità del teorema. Spiegare con grafici opportuni il perché della risposta data.
9. Dare la definizione di funzione continua in un intervallo e portare un esempio grafico di una funzione che sia definita in tutto un intervallo, senza essere continua.
10. Tracciare, usando solo le funzioni elementari e senza l'ausilio delle derivate, il grafico delle seguenti funzioni; dire, solo sulla base dei grafici tracciati, se si tratta di funzioni continue oppure no, e perché.

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{se } x < 0 \\ x^2, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -x+2, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x+1, & \text{se } x \leq 1 \\ \ln x, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

11. Eseguire, sulla retta reale estesa, i seguenti calcoli, se possibile; se non possibile spiegare perché.

a) $(+\infty - 5)(3 - (-\infty)) \frac{1}{0^+}$.

b) $\frac{1}{0^+} \frac{1}{0^-} (-5)(7 - (-\infty))$.

c) $\frac{\left(\frac{+\infty}{0^-}\right)}{+\infty}$.

d) $\frac{1}{0^+} + \frac{1}{0^-}$.

e) $\frac{1}{0^+} - \frac{1}{0^-}$.

f) $+\infty \left(\frac{1}{-\infty} - \frac{7}{+\infty} \right)$.

12. Dare la definizione di funzione iniettiva, suriettiva, biiettiva. Portare un esempio grafico per ciascuno dei casi seguenti, evidenziando il perché della risposta data.

a) Una funzione iniettiva ma non suriettiva.

b) Una funzione suriettiva ma non iniettiva.

c) Una funzione biiettiva.

13. Spiegare perché una circonferenza nel piano cartesiano non può mai essere il grafico di una funzione.

14. Una parabola nel piano cartesiano è sempre il grafico di una funzione? Spiegare.

15. Esplicitare le scritture seguenti e calcolarne il valore numerico.

a) $\sum_{i=5}^8 \frac{2}{i}$;

b) $\sum_{i=2}^4 \frac{i+1}{i-1}$;

c) $\prod_{i=1}^7 (i+1)$;

d) $\sum_{i=2}^4 \sum_{j=1}^3 (2i-j)$.

16. Come si può scrivere $100!$ usando il simbolo di produttoria?

17. Come si può definire $n!$ usando una definizione ricorsiva?

18. Ha senso la scrittura seguente?

$$\sum_{i=10}^{20} \sqrt{i^2 - 101} ?$$

19. Quanti elementi ha l'insieme $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$? Elencarli esplicitamente.

20. Dare la definizione di differenza tra due insiemi e calcolare la differenza $A \setminus B$, dove A e B sono gli insiemi seguenti:

$$A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{e} \quad B = \{0, -1, -2, -3, \dots\} = \text{Insieme degli interi } \leq 0.$$