

Limiti e dimostrazioni “grafiche”

Nel memorizzare le dimostrazioni dei teoremi via via proposti, è spesso utile visualizzare graficamente il senso dei passaggi effettuati: l’abbiamo segnalato più volte negli appunti. Qui vogliamo proporre un’ulteriore considerazione.

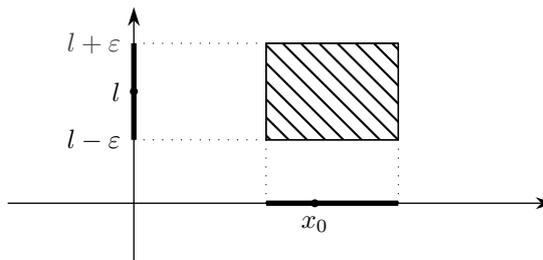
Il teorema sul limite del modulo

Si fa riferimento al teorema 4.19 nella pagina 59 degli appunti.

Il fatto che dall’ipotesi che una funzione abbia limite l segua che ha limite anche il modulo della funzione, si può vedere dalle seguenti considerazioni grafiche.

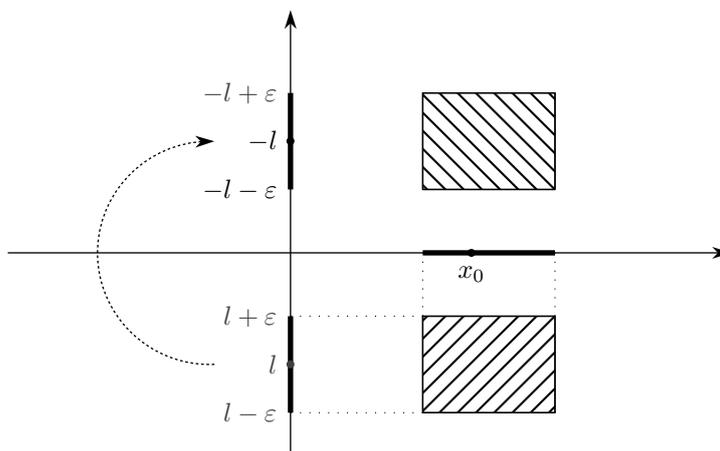
1 - Il limite l è un reale positivo

In questo caso prendere il modulo della funzione, almeno “vicino” a x_0 , non modifica nulla se si è avuta l’accortezza di prendere un intorno di l tutto sopra l’asse delle ascisse, come è possibile, dunque la conclusione è ovvia.



2 - Il limite l è un reale negativo

In questo caso passare da una funzione al suo modulo significa “ribaltare” la parte di grafico che sta sotto all’asse delle x , facendone la simmetrica rispetto all’asse x . Siamo interessati solo agli x vicini a x_0 e se abbiamo avuto l’accortezza di considerare un intorno di l situato tutto sotto l’asse delle ascisse, come è possibile, risulterà evidente che si passerà dal limite l al limite $-l$, cioè $|l|$, visto che l è negativo.



3 - Il limite l vale 0

In questo caso è sufficiente avere l’accortezza di prendere un intorno di l centrato su l , come è sempre possibile (anzi conveniente nel caso di limiti finiti). L’unica modifica che si ha nel passaggio dalla funzione f al suo modulo (sempre per gli x vicino a x_0) sta nel fatto che i valori della funzione modulo di f , anziché essere contenuti in tutto l’intorno fissato di l , saranno contenuti solo nella metà superiore di questo intorno: ma questo va ancora meglio, in quanto nella definizione di limite si chiede solo che questi valori siano contenuti nell’intorno prefissato di l .

