Osservazioni sui numeri razionali

Procedimento diagonale di Cantor e proprietà dell'ordine

Come è noto, vedi *Appunti di Matematica 1, I modulo*, l'insieme delle frazioni con numeratore e denominatore positivo può essere facilmente "numerato" con il procedimento diagonale di Cantor, di cui riportiamo qui solo la visualizzazione grafica.

$$
\begin{array}{llllllll}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & \cdots & \cdots & (1,n) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & \cdots & \cdots\,(2,n-1)\cdots & & & \\
(3,1) & (3,2) & \cdots & & & & & \\
(4,1) & \cdots & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
\cdots\,(n-1,2)\cdots & & & & & & & \\
(n,1) & \cdots & & & & & &
\end{array}
$$

Se cancelliamo dalla tabella tutte le frazioni che rappresentano lo stesso numero razionale, avremo una "numerazione" dei razionali positivi, i quali dunque potranno essere pensati come un insieme ordinato con un ordine, che possiamo indicare con $\preceq$. Precisamente i primi elementi di $\mathbb{Q}^+$ con questo ordine sono:

$$1 \prec \frac{1}{2} \prec 2 \prec \frac{1}{3} \prec 3 \prec \frac{1}{4} \prec \frac{2}{3} \prec \frac{3}{2} \prec 4 \prec \frac{1}{5} \prec 5 \prec \frac{2}{5} \prec \frac{3}{4} \prec \frac{4}{3} \prec \frac{5}{2} \prec \frac{3}{5} \prec \frac{5}{3} \prec \frac{4}{5} \prec \frac{5}{4} \prec \dots$$

Osserviamo che si tratta ancora di un ordine totale, ma con caratteristiche completamente diverse dall'ordine "naturale" di $\mathbb{Q}^+$. In particolare $\mathbb{Q}^+$ con questo ordine non è denso (esattamente come succede per i naturali) e ogni suo sottoinsieme limitato ha sia massimo che minimo (ancora esattamente come succede per i naturali).

È da segnalare però il fatto che questo ordine non è compatibile con la somma. Infatti si ha, per esempio

$$2 \prec \frac{1}{4}\,,$$

mentre

$$2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \succ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\,.$$

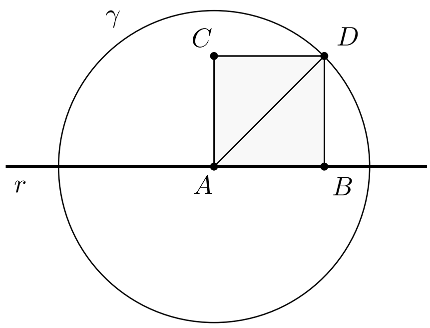
Si tratta dunque di un tipo di ordine, pur perfettamente legittimo, ma di nessuna utilità pratica.

Questo esempio dovrebbe far capire l'importanza dell'assioma $\mathcal{A}_3$ dei reali in cui si chiede esplicitamente che l'ordine sui reali sia totale e *compatibile* sia con la somma che con il prodotto.

Assioma di completezza e densità

Come più volte segnalato nel testo, l'assioma di completezza gioca un ruolo cruciale tra le proprietà dei reali. Il fatto che l'insieme dei razionali non soddisfi questo assioma è un handicap molto grave. Per valutarne a fondo l'importanza si consideri la costruzione grafica che segue.

Su una retta r si prenda un segmento AB, costituente l'unità di misura e, su di esso, si costruisca il quadrato $ABCD$: se sulla retta r ci sono solo i punti P tali che AP abbia misura razionale rispetto all'unità scelta, il circolo di centro A e passante per D non interseca la retta r stessa in nessun punto. Questo fatto è palesemente insoddisfacente per gli scopi applicativi.



In sostanza possiamo esprimere geometricamente la mancanza di completezza di $\mathbb{Q}$ dicendo che se su una retta piazziamo solo i punti che hanno ascissa razionale, rispetto a un prefissata unità di misura, rimangono sulla retta stessa moltissime "lacune". Tuttavia il fatto che $\mathbb{Q}$ sia denso in $\mathbb{R}$ fa si che queste lacune siano "puntiformi": non ci può essere nessun segmento, per quanto piccolo, della retta in cui non ci sono punti con ascissa razionale. Anche se ingrandiamo con una potentissima lente un piccolo tratto della retta le lacune "non si allargano".

La non completezza di $\mathbb{Q}$ si può anche visualizzare con la costruzione che segue. Nel piano cartesiano segnamo l'insieme di tutti i punti con entrambe le coordinate razionali. Immaginiamo di "piantare", verticalmente al piano, una palizzata (con pali privi di spessore) mettendo un palo su ognuno dei punti segnati. È chiaro che si otterrà una palizzata fittissima e apparentemente impenetrabile. Ebbene se spariamo un proiettile (puntiforme) dall'origine secondo la direzione che forma un angolo di 60° con il semiasse positivo delle x, questo proiettile procederà in linea retta senza incontrare alcun palo! Infatti il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa di ogni punto P su cui sono piantati i pali è razionale e questo rapporto fornisce, come è noto, la tangente trigonometrica dell'angolo tra la semiretta OP e il semiasse positivo delle ascisse: se l'angolo è di 60°, però, questa tangente è irrazionale (vale $\sqrt{3}$).