Soluzione degli esercizi proposti nel tema d'esame del 12/02/2009, Temi A e B

Esercizio 1. *Risolvere, in $\mathbb{C}$, la seguente equazione, esprimendo le radici in forma algebrica.*

$$|z|^2 - z^2 - 2\mathrm{i}z = 0\,.$$

Risoluzione. Conviene usare la forma algebrica di z, $z = x + \mathrm{i}y$. Si ha

$$|z|^2 - z^2 - 2\mathrm{i}z = x^2 + y^2 - x^2 + y^2 - 2\mathrm{i}xy - 2\mathrm{i}x + 2y\,,$$

da cui si deduce

$$\begin{cases} 2y^2 + 2y = 0 \\ -2xy - 2x = 0\,, \end{cases}$$

che ha come soluzioni $(0, 0)$ e $(x, -1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. □

Esercizio 2. *Al variare del numero reale α, determinare il carattere della seguente serie.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2 + n + 1}\right)\,.$$

Risoluzione. La serie è a termini tutti positivi, inoltre si ha quanto segue.

- n^α è un infinito di ordine α (rispetto al campione n) se $\alpha > 0$; n^α è un infinitesimo di ordine $-\alpha$ (rispetto al campione n) se $\alpha < 0$; n^0 vale 1.
- $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{n^2 + n + 1}\right)$ è un infinitesimo di ordine 2.

Dunque il termine generale della serie è infinitesimo di ordine maggiore di 2 se $\alpha < 0$, di ordine 2 se $\alpha = 0$, di ordine $\beta = 2 - \alpha > 1$ se $0 < \alpha < 1$, e quindi per questi valori di α la serie converge. Per valori di $\alpha \geq 1$ il termine generale è infinitesimo di ordine minore o uguale a 1, oppure non è infinitesimo. Per questi valori di α la serie diverge. □

Esercizio 3. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} + \sin(5x), & \textit{se } -1 < x < 0 \\ 1 - x\sqrt[7]{x}, & \textit{se } x \geq 0 \end{cases}\,.$$

Si chiede:

1. *di verificare se f è continua nel suo dominio;*
2. *di verificare se f è derivabile nel suo dominio;*
3. *di dimostrare che f si annulla esattamente una volta nel suo dominio.*
4. *di determinare gli eventuali asintoti al grafico della funzione.*

Risoluzione. La funzione è sicuramente continua e derivabile in tutto il suo dominio tranne $x = 0$. Si ha poi

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 1\,,$$

per cui la funzione è continua anche in 0. Calcoliamo la derivata per $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(x+1)^2} + 5\cos 5x, & \text{se } -1 < x < 0 \\ -\dfrac{8}{7}\sqrt[7]{x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

Poichè il limite sinistro e destro di questa derivata, per $x \to 0$, differiscono, possiamo concludere che la funzione non è derivabile (proprietà di Darboux).

Il calcolo precedente (e le proprietà elementari delle funzioni potenza) mostra che la funzione è strettamente decrescente per $x > 0$; poichè il limite destro in 0 vale 1 e il limite all'infinito è $-\infty$, se ne deduce che la funzione si annulla una sola volta per $x > 0$ (precisamente per $x = 1$). Nell'intervallo $]-1, 0[$ la funzione è strettamente positiva, in quanto il primo addendo è maggiore di 1 e il secondo non può superare 1.

La funzione ha per asintoto verticale la retta $x = -1$. □

Esercizio 4. *Risolvere, in $\mathbb{C}$, la seguente equazione, esprimendo le radici in forma algebrica.*

$$|z|^2 + z = 7 + 2\mathrm{i}\,.$$

Risoluzione. Posto $z = x + \mathrm{i}y$ si ottiene

$$(x^2 + y^2 + x - 7) + \mathrm{i}(y - 2) = 0\,,$$

da cui si trova facilmente

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\,, \quad y = 2\,.$$

□

Esercizio 5. *Determinare il carattere della seguente serie.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Risoluzione. Si può applicare il criterio della radice

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \ldots = \frac{1}{\mathrm{e}}\,.$$

La serie converge (assolutamente). □

Esercizio 6. *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(ax) - 1, & \textit{se } x \le 0 \\ \\ x^2 + b\mathrm{e}^{-x} - 3, & \textit{se } x > 0 \end{cases},$$

dove a e b sono numeri reali. Si chiede:

1. *di determinare i valori di a e b per cui f è continua nel suo dominio;*
2. *di determinare i valori di a e b per cui f è derivabile nel suo dominio;*
3. *per i valori di a e b per cui f è derivabile, di determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(0, f(0))$.*

Risoluzione. La funzione è chiaramente continua e derivabile fuori dall'origine. Si ha poi quanto segue.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1\,, \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = b - 3\,,$$

da cui si deduce che la funzione è continua anche nell'orgine se $b = 2$, e per ogni valore di a.

Calcoliamo la derivata fuori dall'origine.

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{a}{1 + a^2x^2} & \text{se } x < 0 \\ 2x - b\mathrm{e}^{-x}, & \text{se } x > 0 \end{cases}.$$

In base ai noti teoremi sulle derivate, si deduce che la funzione è derivabile nell'origine se $a = -b$. Dunque la funzione è derivabile se $a = -2$ e $b = 2$.

L'equazione della tangente è allora:

$$y + 1 = -2(x - 0) \ \text{ ovvero } y = -2x - 1\,.$$

$\square$