Soluzione degli esercizi proposti nel tema d'esame del 29/01/2009, Temi A e B

Esercizio 1. *Risolvere, in $\mathbb{C}$, la seguente equazione, esprimendo le radici in forma algebrica.*

$$\mathrm{i}z^2 - 2\sqrt{3}\mathrm{i}z - 9 = 0\,.$$

Risoluzione. Si può applicare la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado.

$$z_{1,2} = \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{i} + \sqrt{-3+9\mathrm{i}}}{\mathrm{i}} = \sqrt{3}\,\frac{\mathrm{i} + \sqrt{-1+3\mathrm{i}}}{\mathrm{i}}\,.^{(1)}$$

Si tratta ora di trovare le due radici quadrate di $-1+3\mathrm{i}$. Si ha

$$-1+3\mathrm{i} = \left(\sqrt{10}\,;\vartheta\right),\ \text{con}\ \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{-1}{\sqrt{10}} \\ \sin\vartheta = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \end{cases}.$$

L'argomento ϑ è dunque nel secondo quadrante, per cui $\vartheta/2$ sarà nel primo quadrante e avrà sia il seno che il coseno positivi e dati da:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\vartheta}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\vartheta}{2}} \\ \sin\dfrac{\vartheta}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\vartheta}{2}} \end{cases}.$$

Quindi le due radici quadrate cercate saranno:

$$\left\{ \left(\sqrt[4]{10}\,;\,\frac{\vartheta+2k\pi}{2}\right),k=0,\,1 \right\} = \pm\sqrt[4]{10}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\,.$$

A questo punto le radici dell'equazione assegnata sono immediate. □

Esercizio 2. *Al variare del numero reale a, determinare il carattere della seguente serie.*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a\,n + \ln n)\left(\cos\frac{1}{n} - 1\right)\,.$$

[1] Rispetto alla formula risolutiva analoga in uso nel campo dei reali, abbiamo fatto precedere la radice del discriminante solo dal segno "+". In effetti nei complessi il simbolo di radice deve essere usato con cautela e prestando attenzione al fatto che *ogni* complesso z ha esattamente n radici n-esime distinte (tranne 0 che ne ha una sola). Dunque la scrittura $\sqrt[n]{z}$, dove z è un complesso, indica non un numero complesso, ma un insieme di complessi. In generale si tratta di un simbolo da evitare, anche se in molte situazioni è comodo.

Risoluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$\cos\frac{1}{n} - 1$$

è negativo per ogni $n \geq 1$, mentre

$$a\,n + \ln n$$

è positivo per ogni $n \geq 1$ se $a \geq 0$, è negativo almeno per n grandi se $a < 0$ (n è infinito di ordine superiore a $\ln n$, se $n \to +\infty$). Dunque la serie è a termini di segno costante, almeno da un certo n in poi.

Possiamo poi ragionare sugli ordini di infinito e infinitesimo (rispetto al campione $1/n$).

- $\cos 1/n - 1$ è infinitesimo di ordine 2;
- $a\,n + \ln n$ è infinito di ordine 1 se $a \neq 0$, di ordine minore di ogni reale positivo se $a = 0$.

Se ne conclude che la serie diverge se $a \neq 0$, converge se $a = 0$. □

Esercizio 3. *Data la funzione*

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^3 - x^2}\,,$$

1. *determinare il più grande intorno di $x = 1$ dove è invertibile;*
2. *detta $g(x)$ l'inversa di $f(x)$ nell'intorno di 1 sopra trovato, calcolare*

$$g'(1)\,;$$

3. *trovare gli eventuali asintoti della funzione*

$$h(x) = x\,f(x)\,.$$

Risoluzione. Si ha

$$f'(x) = (3x^2 - 2x)\mathrm{e}^{x^3 - x^2}\,.$$

Se ne deduce che la funzione è crescente in $]-\infty, 0] \cup [2/3, +\infty[$, decrescente in $[0, 2/3]$. Il più grande intorno di 1 in cui è invertibile è dunque $[2/3, +\infty[$.

Poiché $f(1) = 1$, si avrà, per la regola di derivazione delle funzioni inverse,

$$g'(1) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{(3-2)\mathrm{e}^0} = 1\,.$$

La funzione $h(x)$ non ha asintoti verticali od obliqui e ha $y = 0$ come asintoto orizzontale a $-\infty$, in quanto $f(x)$ tende a 0 "più rapidamente" di quanto x tenda a $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x\,f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{x^3-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^{-x^3+x^2}} = 0\,,$$

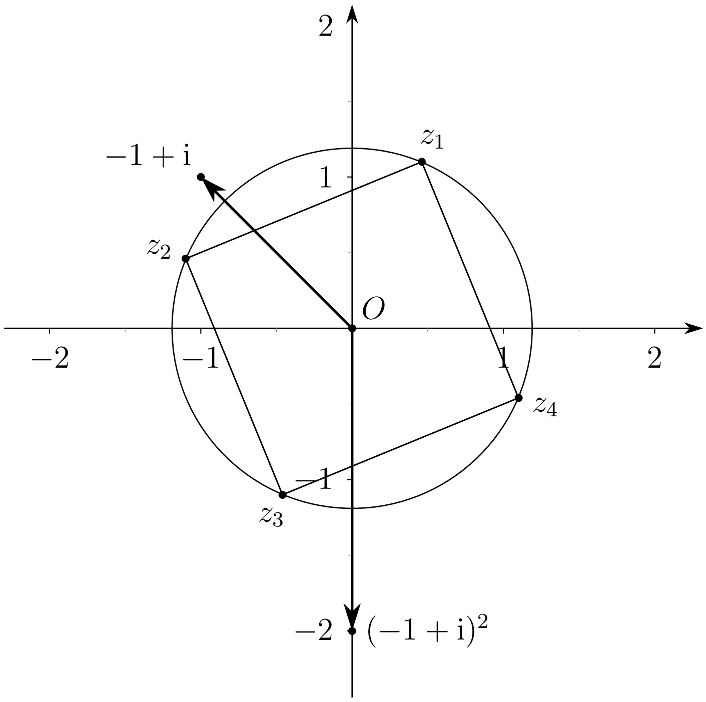
per il solito ragionamento sull'ordine di infinito dell'esponenziale. □

Esercizio 4. *Trovare le radici quarte del numero complesso*

$$z = (-1+i)^2\,,$$

esprimendole in forma algebrica e rappresentandole nel piano di Argand-Gauss.

Risoluzione. Si ha
$$-1+\mathrm{i}=\left(\sqrt{2}\,;\,\frac{3\pi}{4}\right)\,,$$
da cui
$$(-1+\mathrm{i})^2=\left(2\,;\,\frac{3\pi}{2}\right)\,.$$
Le quattro radici quarte richieste sono allora
$$\left\{\,\left(\sqrt[4]{2}\,;\,\frac{3\pi/2+2k\pi}{4}\right),k=0,\,1,\,2,\,3\,\right\}\,.$$
Si tratta di quattro numeri complessi che hanno modulo $\sqrt[4]{2}$ e argomenti, rispettivamente,
$$\frac{3\pi}{8}\,,\ \frac{3\pi}{8}+\frac{\pi}{2}\,,\ \frac{3\pi}{8}+\pi\,,\ \frac{3\pi}{8}+\frac{3\pi}{2}.$$
La scrittura algebrica è immediata, in quanto il coseno e seno di questi angoli si trovano in qualunque tabella e, all'occorrenza, possono essere determinati con le formule di bisezione. Nel piano di Argand-Gauss si possono rappresentare come segue.



□

Esercizio 5. *Dire per quali* $x\in\mathbb{R}$ *converge la serie*
$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^n\,,$$
e, nell'insieme di convergenza, calcolarne la somma.

Risoluzione. Intanto si può osservare che deve essere $x > 0$. La serie proposta è una serie geometrica, di ragione

$$\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)},$$

ragione che risulta positiva per ogni $x > 0$. Come è ben noto la serie stessa converge se e solo se la ragione é compresa strettamente tra -1 e 1, ovvero se è minore di 1 in questo caso. Dunque

$$\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} < 1 \Rightarrow \ln\left(1+\sqrt{x}\right) > 1 \Rightarrow x > (\mathrm{e}-1)^2 .$$

Per trovare la somma della serie basta osservare che mancano, rispetto all formula generale della somma di una serie geometrica, i termini con $n = 0$ e $n = 1$. Si avrà perciò, nell'insieme di convergenza appena trovato,

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)}} - 1 - \frac{1}{\ln\left(1+\sqrt{x}\right)} = \dots$$

□

Esercizio 6. *Trovare l'ordine dei seguenti infinitesimi, per $x \to 0$,*

1. $f(x) = \mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1$ *;*
2. $g(x) = x\sin x - \sin^2 x$ *.*

Utilizzando anche i risultati trovati, calcolare il seguente limite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1 + \sin^5 x}{x\sin x - \sin^2 x - x^5} .$$

Risoluzione. Si ha

$$\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1 = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1}{\sin^4 x}\,\sin^4 x .$$

Il primo fattore ha per limite 1, mentre il secondo è, banalmente, di ordine 4. Dunque l'infinitesimo richiesto è di ordine 4.

Si ha poi

$$x\sin x - \sin^2 x = \sin x(x - \sin x) .$$

Il primo fattore è infinitesimo di ordine 1, il secondo (come è ampiamente noto!) di ordine 3, dunque $g(x)$ è di ordine 4.

A questo punto nel calcolo del limite richiesto si possono trascurare sia a numeratore che a denominatore gli infinitesimi di ordine 5 e si ottiene quanto segue.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1 + \sin^5 x}{x\sin x - \sin^2 x - x^5} &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1}{x\sin x - \sin^2 x} = \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1}{\sin^4 x}\,\sin^4 x\,\frac{1}{\sin x(x - \sin x)} =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1}{\sin^4 x} \, \frac{\sin^3 x}{(x - \sin x)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{\sin^4 x} - 1}{\sin^4 x} \, \frac{\sin^3 x}{x^3} \, \frac{x^3}{(x - \sin x)} = 6\,,
\end{aligned}
$$

dove per l'ultimo calcolo si può applicare la regola di l'Hôpital o gli sviluppi di Taylor all'ultimo fattore (gli altri due hanno chiaramente limite 1). □