

Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

14 novembre 2008

Proprietà locali

- ❖ Cr-decr-max-min
- ❖ Esempio 1
- ❖ Esempio 2
- ❖ Esempio 3
- ❖ Teor.locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

Proprietà locali

Cresc., decr., Max e min.relativi

Proprietà locali

❖ Cr-decr-max-min

❖ Esempio 1

❖ Esempio 2

❖ Esempio 3

❖ Teor.locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

Definizione. Sia data una funzione f e un punto x_0 del suo dominio. Se esiste un intorno I_{x_0} tale che per ogni suo punto (che stia naturalmente anche nel dominio della funzione si abbia

- da $x < x_0$ segue $f(x) \leq f(x_0)$ e contemporaneamente da $x > x_0$ segue $f(x) \geq f(x_0)$, allora la funzione si dice *crescente in x_0* (crescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);
- da $x < x_0$ segue $f(x) \geq f(x_0)$ e contemporaneamente da $x > x_0$ segue $f(x) \leq f(x_0)$, allora la funzione si dice *decrescente in x_0* (decrescente in senso stretto se le disuguaglianze valgono senza l'uguale);
- $f(x) \leq f(x_0)$, allora il punto x_0 si dice di *massimo relativo* (di *massimo relativo proprio* se la disuguaglianza vale in senso stretto);
- $f(x) \geq f(x_0)$, allora il punto x_0 si dice di *minimo relativo* (di *minimo relativo proprio* se la disuguaglianza vale in senso stretto).

Esempio 1

Proprietà locali

❖ Cr-decr-max-min

❖ **Esempio 1**

❖ Esempio 2

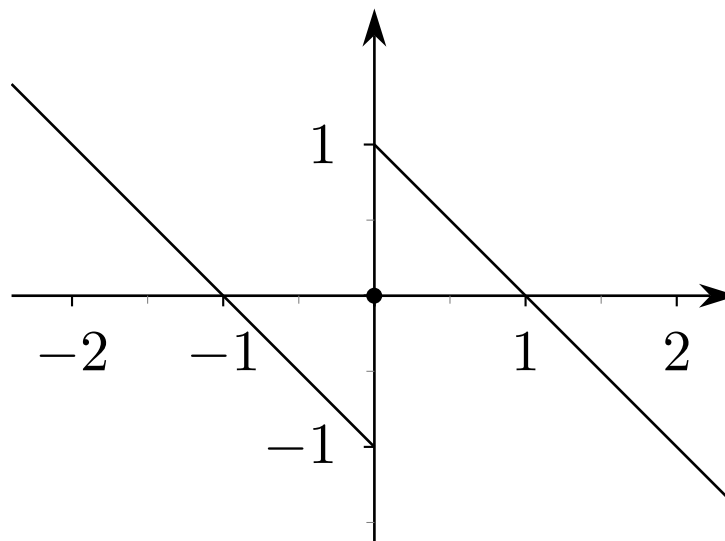
❖ Esempio 3

❖ Teor.locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

Esempio. La funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x) - x$ è crescente in 0, perchè a sinistra di 0 ha valori negativi e a destra di 0 ha valori positivi. Si veda il grafico che segue.



Esempio 2

Proprietà locali

❖ Cr-decr-max-min

❖ Esempio 1

❖ **Esempio 2**

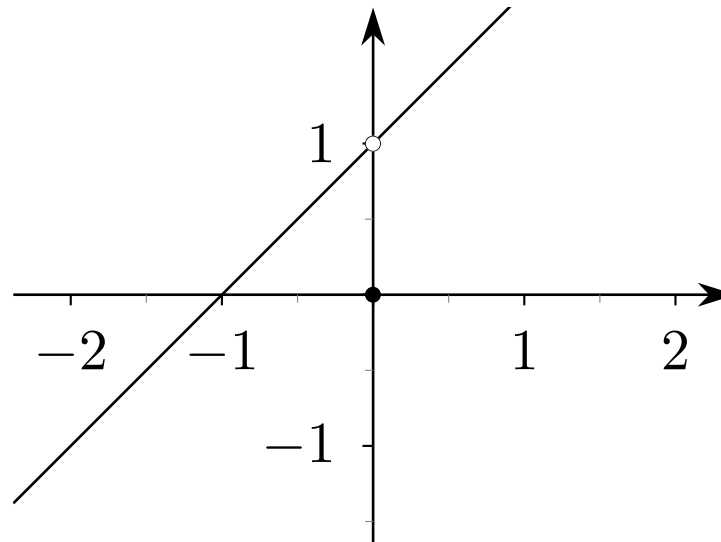
❖ Esempio 3

❖ Teor.locali

Asintoti

Teoremi fondamentali

Esempio. La funzione $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|(x + 1)$ ha un minimo nell'origine, perché nell'origine vale 0, e nei pressi dell'origine è positiva. Si veda il grafico che segue.



Esempio 3

Proprietà locali

❖ Cr-decr-max-min

❖ Esempio 1

❖ Esempio 2

❖ **Esempio 3**

❖ Teor.locali

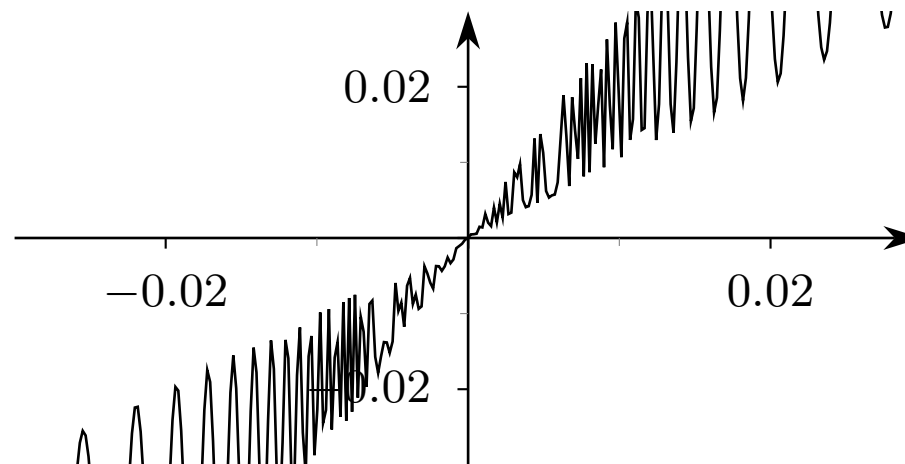
Asintoti

Teoremi
fondamentali

Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è crescente nell'origine, in quanto a destra dell'origine è positiva, a sinistra è negativa. Si veda il grafico che segue, necessariamente molto approssimato.



Teoremi su propr.locali

Proprietà locali

❖ Cr-decr-max-min

❖ Esempio 1

❖ Esempio 2

❖ Esempio 3

❖ Teor.locali

Asintoti

Teoremi fondamentali

Teorema. *Sia f una funzione derivabile in un punto x_0 .*

1. *Se f ha derivata positiva in x_0 , allora è crescente in x_0 .*
2. *Se f ha derivata negativa in x_0 , allora è decrescente in x_0 .*
3. *Se f è crescente in x_0 allora $f'(x_0) \geq 0$ (attenzione: ≥ 0 , non > 0).*
4. *Se f è decrescente in x_0 allora $f'(x_0) \leq 0$ (attenzione: ≤ 0 , non < 0).*

Teorema. *Se una funzione è derivabile in un punto x_0 che sia interno al dominio, e ha un massimo o minimo relativo in x_0 , allora si ha necessariamente $f'(x_0) = 0$.*

Proprietà locali

Asintoti

- ❖ As.vert
- ❖ Osservazioni 1
- ❖ Osservazioni 2
- ❖ Altri asint.
- ❖ Asint.-teor
- ❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Asintoti

Asintoti verticali

Proprietà locali

Asintoti

❖ As.vert

❖ Osservazioni 1

❖ Osservazioni 2

❖ Altri asint.

❖ Asint.-teor

❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Definizione. Se x_0 è un punto di accumulazione per il dominio di una funzione e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty,$$

con qualunque segno, allora la retta

$$x = x_0$$

si dice un asintoto verticale per la funzione. La stessa definizione vale anche se il limite è solo destro o solo sinistro.

Esempi.

- Se $f(x) = \operatorname{tg}(x)$, tutte le rette di equazione $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ sono asintoti verticali.
- Se $f(x) = \ln(x)$, la retta $y = 0$ è asintoto verticale.
- Se $f(x) = \frac{1}{(x+1)}$, la retta $x = -1$ è asintoto verticale.

Osservazioni 1

Proprietà locali

Asintoti

❖ As.vert

❖ Osservazioni 1

❖ Osservazioni 2

❖ Altri asint.

❖ Asint.-teor

❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Osservazione. Se f è una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi), allora può avere un asintoto verticale solo in corrispondenza di una radice del denominatore. La condizione non è però sufficiente: anche in corrispondenza di una radice del denominatore può non esserci un asintoto verticale, come mostra l'esempio della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x + 1},$$

per la quale si ha

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{x + 1} = 3.$$

Il grafico di questa funzione coincide con quello della parabola $y = x^2 - x + 1$, privato però del punto $(-1, 3)$.

Questa circostanza è comunque legata, nel caso delle funzioni razionali fratte, al fatto che il numeratore e il denominatore abbiano un fattore comune. Per le funzioni diverse da queste, la situazione è completamente diversa, come mostra l'esempio della funzione $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ che, pur avendo un denominatore che si annulla per $x = 0$ e che “non si semplifica” con il numeratore, non ha asintoti verticali.

Osservazioni 2

Proprietà locali

Asintoti

- ❖ As.vert
- ❖ Osservazioni 1
- ❖ **Osservazioni 2**
- ❖ Altri asint.
- ❖ Asint.-teor
- ❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Osservazione. Per le funzioni diverse dalle funzioni razionali fratte, l'esistenza di un asintoto verticale è indipendente dalla presenza di eventuali denominatori, come mostra la funzione $f(x) = \ln(x)$ che ha per asintoto l'asse delle y senza avere alcun denominatore.

Altri asintoti

Proprietà locali

Asintoti

❖ As.vert

❖ Osservazioni 1

❖ Osservazioni 2

❖ Altri asint.

❖ Asint.-teor

❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Definizione. Due funzioni f e g , continue e definite in un insieme superiormente illimitato, si dicono asintotiche per $x \rightarrow +\infty$ oppure asintotiche per $x \rightarrow -\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - g(x)) = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - g(x)) = 0$$

In particolare se $g(x) = mx + q$, allora la retta $y = mx + q$ si dice un asintoto per la f , precisamente un asintoto orizzontale se $m = 0$, un asintoto obliquo se $m \neq 0$.

Asintoti: teoremi

Proprietà locali

Asintoti

❖ As.vert

❖ Osservazioni 1

❖ Osservazioni 2

❖ Altri asint.

❖ Asint.-teor

❖ As.:esempi

Teoremi
fondamentali

Teorema. *La retta $y = q$ è un asintoto orizzontale per la funzione continua f e solo se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = q, \quad \text{oppure} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = q.$$

Teorema. *La retta $y = mx + q$ ($m \neq 0$) è un asintoto obliquo a $+\infty$ per la funzione continua f se e solo se*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q. \tag{2}$$

Analogo discorso per $-\infty$.

Asintoti: esempi

Proprietà locali

Asintoti

- ❖ As.vert
- ❖ Osservazioni 1
- ❖ Osservazioni 2
- ❖ Altri asint.
- ❖ Asint.-teor
- ❖ As.:esempi

Teoremi fondamentali

Esempi.

- La funzione $f(x) = e^x$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale a $-\infty$.
- La funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ha le rette $y = \pm \frac{\pi}{2}$ come asintoti orizzontali (uno a $+\infty$ e uno a $-\infty$).
- La funzione $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ ha l'asse delle x come asintoto orizzontale (a $-\infty$), e la retta $y = 2x$ come asintoto obliquo (a $+\infty$).
- La funzione $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ha la retta $y = \pm x$ come asintoti obliqui (una a $-\infty$ e l'altra a $+\infty$).

Proprietà locali

Asintoti

**Teoremi
fondamentali**

- ❖ Lagrange
- ❖ Corollari
- ❖ Osservazioni
- ❖ Cauchy
- ❖ Hôpital
- ❖ Osservazione
- ❖ Limite deriv.

Teoremi fondamentali

Teorema di Lagrange

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

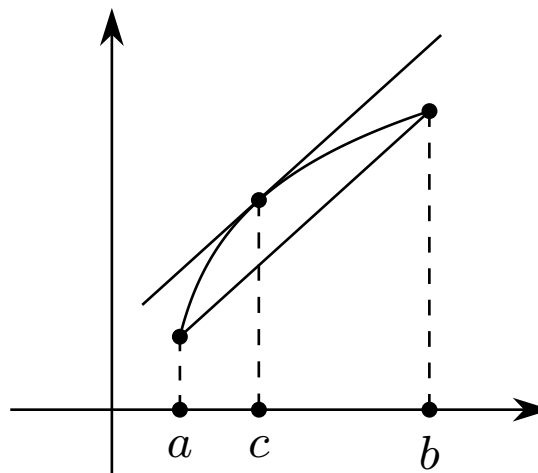
❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Teorema (Teorema di Lagrange). Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile almeno in $]a, b[$. Allora esiste almeno un $c \in]a, b[$ tale che

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Il grafico che segue mostra l'interpretazione geometrica del teorema appena dimostrato: esiste un punto interno ad $[a, b]$ dove la tangente risulta parallela alla secante passante per $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.



Corollari del teorema di Lagrange

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Corollario (Teorema di Rolle). *Se alle ipotesi del teorema di Lagrange si aggiunge quella che $f(a) = f(b)$, allora esiste $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$*

Corollario (Funzioni a derivata nulla). *Se una funzione ha derivata nulla in un intervallo allora è costante sull'intervallo.*

Corollario (Funzioni con la stessa derivata). *Se due funzioni f e g hanno la stessa derivata in un intervallo, allora differiscono per una costante.*

Corollario (Funzioni a derivata di segno costante). *Se una funzione ha derivata positiva in un intervallo, allora cresce nell'intervallo. Se ha derivata negativa allora decresce nell'intervallo.*

Osservazioni

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Osservazione. Negli ultimi tre corollari è indispensabile che il dominio sia un intervallo. Lo si può vedere dagli esempi che seguono.

Esempi.

– La funzione

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

ha derivata nulla nel suo dominio naturale, ma non è costante.

– La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ ha derivata sempre positiva, ma non è crescente nel suo dominio naturale.

Teorema di Cauchy

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Teorema (Teorema di Cauchy). *Sia f e g due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili almeno nei punti interni di $[a, b]$ e con $g'(x) \neq 0$ in tutto $]a, b[$. Allora esiste almeno un punto c interno ad $[a, b]$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

È ovvio che il teorema di Lagrange discende da questo teorema: basta porre $g(x) = x$.

Teoremi di l'Hôpital

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Teorema. Siano f e g due funzioni definite in un intorno I di un punto x_0 (eventualmente anche $\pm\infty$ o ∞), tranne al più x_0 stesso. Si supponga inoltre che entrambe le funzioni siano derivabili in I , eventualmente privato di x_0 , e che

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Si hanno i seguenti fatti.

1. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ e se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (anche $\pm\infty$)
anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

2. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ e se $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ (anche $\pm\infty$)
anche

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Osservazione

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Si osservi che i teoremi esprimono solo una condizione sufficiente per l'esistenza del limite del rapporto delle due funzioni.

Esempio. Siano $f(x) = x + \cos x$ e $g(x) = x + \sin x$. Se consideriamo il

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

ci troviamo nella possibilità di applicare il secondo dei due teoremi di l'Hôpital. Il limite del rapporto delle derivate però non esiste, e quindi non possiamo trarre alcuna conclusione. È invece immediato che il limite del rapporto delle funzioni vale 1.

Teorema sul limite della derivata

Proprietà locali

Asintoti

Teoremi
fondamentali

❖ Lagrange

❖ Corollari

❖ Osservazioni

❖ Cauchy

❖ Hôpital

❖ Osservazione

❖ Limite deriv.

Teorema. *Sia f un funzione definita e continua in un intorno I di un punto x_0 (compreso x_0), e derivabile almeno in $I \setminus \{x_0\}$. Se esiste il limite, diciamolo l , per $x \rightarrow x_0$ di $f'(x)$, anche infinito, allora*

- *se il limite è finito, la funzione è derivabile in x_0 e la sua derivata è uguale a l ;*
- *se il limite è infinito, allora il limite del rapporto incrementale di f in x_0 è infinito.*