Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

17 ottobre 2008

Intervalli

Definizione. *Dati due numeri reali a e b, con $a < b$, si chiamano* intervalli, *con la specificazione a fianco segnata, i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.*

$]a, b[$	$\{ x \mid a < x < b \}$	*intervallo limitato* aperto
$[a, b]$	$\{ x \mid a \le x \le b \}$	*intervallo limitato* chiuso
$[a, b[$	$\{ x \mid a \le x < b \}$	*intervallo limitato* chiuso a sinistra *e* aperto a destra
$]a, b]$	$\{ x \mid a < x \le b \}$	*intervallo limitato* aperto a sinistra *e* chiuso a destra
$]a, +\infty[$	$\{ x \mid x > a \}$	*intervallo superiormente illimitato* aperto
$[a, +\infty[$	$\{ x \mid x \ge a \}$	*intervallo superiormente illimitato* chiuso
$]-\infty, a[$	$\{ x \mid x < a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* aperto
$]-\infty, a]$	$\{ x \mid x \le a \}$	*intervallo inferiormente illimitato* chiuso

I numeri reali a e b, oppure soltanto a o soltanto b, si chiamano estremi dell'intervallo*.*
Gli intervalli limitati si chiamano anche segmenti, *quelli illimitati anche* semirette*.*

I punti a e b si chiamano *estremi*, gli altri *punti interni*. Il punto $x_0 = \frac{a+b}{2}$ (intervalli limitati) si chiama *centro*, $\delta = x_0 - a = b - x_0$ *raggio* o *semiampiezza*.

Teorema (Teorema di Cantor). *Considerata una successione* $(I_n)_n$ *di intervalli chiusi e limitati "inscatolati", ovvero tali che* $I_{n+1} \subseteq I_n$*, esiste almeno un numero reale* c *comune a tutti gli intervalli. Se poi l'ampiezza degli intervalli diventa arbitrariamente piccola al crescere di* n *allora tale numero* c *è unico.*

Notiamo che è indispensabile, per la validità del teorema di Cantor, che gli intervalli siano chiusi. Se si considerano gli intervalli

$$I_n = \left]0, \frac{1}{n}\right] ,$$

la loro intersezione è vuota. Parimenti è indispensabile che gli intervalli siano limitati. Se si considerano gli intervalli $[n, +\infty[$, la loro intersezione è ancora vuota.

Intorni

Definizione. *Dato un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ diremo* intorno di x_0 *un qualunque intervallo aperto $]a, b[$ che contenga il punto stesso. In particolare chiameremo* intorno circolare di centro x_0 e raggio δ *l'intervallo $]x_0 - \delta\,,\, x_0 + \delta[$.*

Definizione. *Nelle stesse ipotesi della definizione precedente, si dice* intorno sinistro *di x_0 un intervallo del tipo $]x_0 - \delta, x_0]$;* intorno destro *un intervallo del tipo $[x_0, x_0 + \delta[$.*

Definizione. *Si dice* intorno di $+\infty$ *ogni semiretta aperta superiormente illimitata,* intorno di $-\infty$ *ogni semiretta aperta inferiormente illimitata.*

Il concetto di intorno consente di dare un significato preciso all'idea di *vicinanza*: dato un punto x_0 e considerato un suo intorno I_{x_0}, i punti di I_{x_0} potranno essere considerati "vicini" a x_0, secondo la misura stabilita da I_{x_0} stesso; cambiando intorno la qualifica di "vicino" può cambiare.

Punti interni ed esterni

Definizione. *Dato un insieme A, un punto x_0 si dice* interno *ad A se esiste un intorno di x_0 tutto contenuto in A. Un punto x_0 si dice* esterno *ad A se è interno al complementare di A (rispetto a $\mathbb{R}$). L'insieme dei punti interni a un insieme A si indica con $\mathring{A}$ e si chiama l'interno di A.*

È ovvio che per un intervallo i punti diversi dagli estremi sono interni all'intervallo stesso, in accordo con una definizione che abbiamo già dato, e di cui questa può essere considerata una generalizzazione.

Non si confonda il concetto di punto interno con quello di appartenenza: gli estremi di un intervallo chiuso appartengono all'intervallo ma non sono interni allo stesso. È però ovvio che un punto interno a un insieme A appartiene ad A, mentre un punto esterno non gli appartiene.

Punti di frontiera

Definizione. *Dato un insieme A, un punto x_0 che non sia né interno né esterno ad A si dice di* frontiera *per A. L'insieme dei punti di frontiera per A si indica con $\mathcal{F}(A)$ e si chiama la* frontiera *di A.*

Teorema. *Un punto x_0 è di frontiera per un insieme A se e solo se ogni intorno di x_0 contiene sia punti di A che punti del complementare.*

Immediata conseguenza di questo teorema è che un insieme e il suo complementare hanno la stessa frontiera.
Si noti che un punto di frontiera per A può appartenere oppure no all'insieme A.

Definizione. *Un insieme A si dice* aperto *se $A = \mathring{A}$, ovvero se è formato solo da punti interni*

È immediato che un intervallo aperto è un insieme aperto, anzi la definizione che abbiamo dato costituisce in un certo senso la generalizzazione del concetto di intervallo aperto a insiemi più complessi.

Definizione. *Un insieme A si dice* chiuso *se il suo complementare è aperto.*

È anche qui immediato che un intervallo chiuso è un insieme chiuso.

Un generico insieme A di solito non è né aperto né chiuso.

Punti di accumulazione

Definizione. *Un punto x_0 si dice di* accumulazione *per un insieme A se in ogni intorno di x_0 cadono infiniti punti di A.*

Si noti che un punto di accumulazione per A può appartenere oppure o no ad A stesso.

Esercizi: dimostrare i teoremi seguenti.

Teorema. *Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi eventuali punti di accumulazione.*

Teorema. *Un insieme è chiuso se e solo se contiene tutti i suoi eventuali punti di frontiera.*

Bolzano Weierstrass

Esercizio: dimostrare il teorema seguente.

Teorema (di Bolzano-Weierstrass). *Ogni insieme A infinito e limitato ha almeno un punto di accumulazione.*

Definizione. *Sia A un insieme e x_0 un suo punto. Se x_0 non è di accumulazione per A, si dice* isolato *in A.*