Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

28 novembre 2008

Concavità, convessità, flessi

Insiemi convessi. Sopragrafico

Concavità, convessità, flessi
Ins. convessi
Funz.convesse
Condiz.conv.
Teor.fond.
Conv.locale
Flessi
Comv.loc - 2
Der.succ.
Der.succ.2

Definizione (Insieme convesso). *Un sottoinsieme (di* $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$*) si dice* convesso *se ogni volta che contiene due punti, contiene anche il segmento che li unisce.*

Gli unici sottoinsiemi convessi della retta sono gli intervalli. Gli angoli convessi (non superiori all'angolo piatto) sono insiemi convessi del piano, un cerchio è un insieme convesso del piano,. . .

Definizione. *Se* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *è una funzione , si chiama* sopragrafico *di* f *l'insieme dei punti* $P(x, y)$ *del piano tali che*

$$x \in I, \quad y \geq f(x)\,.$$

ovvero l'insieme dei punti che "stanno sopra" al grafico di f*. Analoga la definizione di* sottografico.

Funzioni convesse e concave

Definizione. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, dove I è un intervallo, si dice* convessa *se il suo sopragrafico è convesso,* concava *se il suo sottografico è convesso.*
Al posto di funzione convessa si può anche usare l'espressione "funzione che volge la concavità verso l'alto", al posto di funzione concava quella di "funzione che volge la concavità verso il basso".

La condizione di convessità in un intervallo è una condizione molto restrittiva per una funzione. Si può per esempio dimostrare che una funzione convessa in un intervallo è sempre continua nell'intervallo e addirittura ammette derivata sinistra e destra in ogni punto dell'intervallo con la derivata sinistra minore o uguale alla derivata destra. Noi qui ci limiteremo a considerare condizioni sufficienti per la convessità.

Condizione per la convessità

Osservazione. Per verificare la convessità di una funzione è sufficiente dimostrare che il segmento che congiunge due punti qualunque del suo grafico sta tutto nel sopragrafico della funzione. Se x_1 e x_2 sono due punti qualunque del dominio I (un intervallo) della funzione, la retta che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ ha equazione

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Dunque la condizione di convessità si scrive come segue:

$$\forall x \in]x_1\,,\, x_2[,\ f(x) \le f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)\,.$$

Se la disuguaglianza precedente vale in senso stretto la funzione si dice *strettamente convessa*.

Il teorema fondamentale

Teorema. *Sia I un intervallo e $f\colon I \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile in I. Se è*

$$f''(x) \geq 0$$

in ogni punto interno di I, allora la funzione è convessa in I; se

$$f''(x) \leq 0$$

in ogni punto interno di I, allora la funzione è concava in I.

Convessità locale

Definizione. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo* I*, derivabile in un punto* x_0 *di* I*. La funzione si dice* (localmente) convessa [(localmente) concava] *in* x_0 *se esiste un intorno* U_{x_0} *tale che in ogni suo punto si abbia*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$
$$\left[f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\right].$$

Se le disuguaglianze valgono in senso stretto (ovviamente per $x \neq x_0$*) allora la funzione si dice strettamente convessa o concava.*

Flessi

Definizione. *Sia* f *una funzione definita in un intervallo* I, *derivabile in un punto* x_0 *di* I. *Se esiste un intorno* U_{x_0} *tale che*

$$\begin{aligned} f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &\text{ per } x < x_0 \quad \text{e} \\ f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &\text{ per } x > x_0 \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &\text{ per } x < x_0 \quad \text{e} \\ f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) &\text{ per } x > x_0 \end{aligned}$$

allora il punto x_0 *si dice di* flesso *per la funzione* f.

Convessità locale - 2

È facile provare che se una funzione è derivabile e convessa in un intervallo è (localmente) convessa in ogni punto dell'intervallo.
Può però succedere che una funzione sia convessa in un punto, senza esserlo in un intorno del punto.
È poi evidente che se un punto x_0 interno a I, dove la funzione è derivabile, è estremo comune di due intervalli in uno dei quali la funzione è convessa e nell'altro concava, o viceversa, allora x_0 è di flesso.

Teorema. *Se una funzione è due volte derivabile in un intervallo I e x_0 è un punto interno di I, allora*

1. *se $f''(x_0) > 0$ la funzione è convessa in x_0;*
2. *se $f''(x_0) < 0$ la funzione è concava in x_0;*
3. *se x_0 è di flesso, $f''(x_0) = 0$.*

Teorema. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto I, e sia x_0 un punto di I dove*

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$$

Allora

- *se n è pari la funzione ha in x_0 un massimo (se $f^{(n)}(x_0) < 0$), un minimo (se $f^{(n)}(x_0) > 0$);*
- *se n è dispari la funzione è crescente in x_0 (se $f^{(n)}(x_0) > 0$), decrescente (se $f^{(n)}(x_0) < 0$).*

Teoremi con le derivate successive - 2

Teorema. *Sia f una funzione definita in un intervallo aperto I, e sia x_0 un punto di I dove*

$$f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0\,, \quad \textit{mentre} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0\,.$$

Allora

– *se n è pari la funzione è in x_0 concava (se $f^{(n)}(x_0) < 0$), convessa (se $f^{(n)}(x_0) > 0$);*
– *se n è dispari la funzione ha un flesso in x_0.*