Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

30-31 ottobre 2008

Intervalli - Punti interni, ecc.

Nelle applicazioni che ci interesseranno, i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che incontreremo più spesso saranno gli intervalli (di qualunque tipo) e le unioni di intervalli. Per questo tipo di insiemi la determinazione dei punti interni, esterni, ecc., è abbastanza semplice. In particolare segnaliamo i fatti seguenti.

– In un qualunque intervallo sono interni tutti i punti dell’intervallo stesso tranne gli eventuali estremi.
– In un qualunque intervallo sono di accumulazione tutti i punti dell’intervallo con l’eventuale aggiunta degli estremi.
– In un qualunque intervallo sono di frontiera solo gli eventuali estremi.
– In un qualunque intervallo non ci sono punti isolati.

Accumulazioni all'infinito

Poiché in ogni intorno di $+\infty$ cadono sempre infiniti punti di un insieme che sia superiormente illimitato), diremo spesso, con un certo abuso di linguaggio, che $+\infty$ è un punto di accumulazione per un insieme superiormente illimitato. Analogo discorso per $-\infty$ nel caso di insiemi inferiormente illimitati. Si tenga però sempre ben presente che $\pm\infty$ non sono numeri reali, e quindi non corrispondono ad alcun punto della retta.
In alcune questioni avremo bisogno anche del concetto di *intorno di* ∞ (infinito senza segno). Daremo pertanto la seguente definizione.

Definizione. *Si dice* intorno di ∞ *l'unione di due arbitrari intorni, uno di* $+\infty$ *e uno di* $-\infty$*.*

Avendo dato questa definizione potremo, con ancora maggior abuso di linguaggio, dire a volte che ∞ è un "punto" di accumulazione per un insieme illimitato sia superiormente che inferiormente.

La definizione di limite

Definizione (Definizione generale di limite). *Sia data una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con eventualmente x_0 anche $\in \{\, +\infty,\, -\infty,\, \infty \,\}$. Diremo che l, con eventualmente l anche $\in \{\, +\infty,\, -\infty,\, \infty \,\}$, è il* limite *di f per x tendente a x_0 se fissato comunque un intorno U_l di l è possibile in corrispondenza trovare un intorno I_{x_0} di x_0 tale che i valori della funzione calcolati in tutti i punti di I_{x_0},* tranne *eventualmente x_0 stesso, cadano nel prefissato intorno U_l di l. In formule*

$$\forall U_l\ \exists I_{x_0}\ \text{tale che}\ \forall x \in I_{x_0} \setminus \{x_0\}\ \text{si abbia}\ f(x) \in U_l\,.$$

In questo caso si scrive

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{o anche} \quad f(x) \to l \text{ se } x \to x_0\,.$$

Osservazioni

Si noti come la definizione di limite *non* fornisca alcuna informazione su come calcolare il limite l, ma semplicemente un metodo per verificare se un certo l è oppure no il limite di una funzione quando x tende a x_0.
Si noti altresì che, in questa definizione, il valore che la funzione assume in corrispondenza di x_0 *non ha alcun interesse*, anzi, in x_0 la funzione potrebbe benissimo non essere definita. Per evidenziare questo fatto qualcuno usa la scrittura seguente

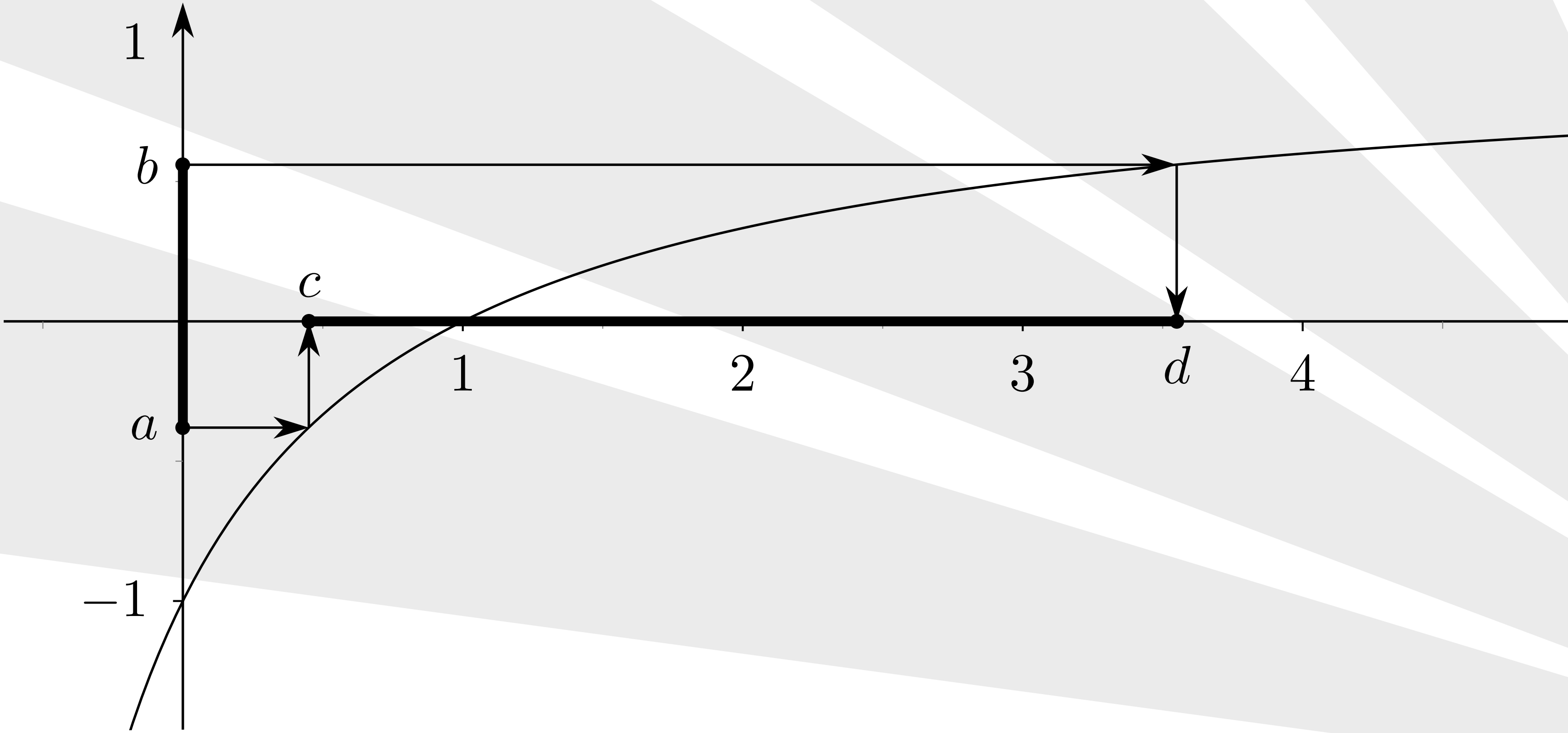
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = l\,;$$

questa scrittura sarebbe quanto mai opportuna, ma troppo pesante da implementare, per cui non la useremo.

Esempio

Si verifichi se è vero oppure no che

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0\,.$$



Definizione dell'ε-δ

Definizione (Limite finito per x tendente a un valore finito). *Sia data una funzione $f \colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con $x_0 \in \mathbb{R}$. Diremo che l, con $l \in \mathbb{R}$, è il* limite *di f per x tendente a x_0 se, fissato comunque un $\varepsilon > 0$, è possibile in corrispondenza ad esso trovare un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che*

$$\forall x \in A \text{ tale che } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \text{ si abbia } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Questa definizione è anche nota con il nome di *definizione dell'$\varepsilon - \delta$*. Agli effetti pratici, in particolare nelle verifiche dei limiti e nelle dimostrazioni di molti teoremi, è quasi sempre conveniente, nel caso di limiti finiti, scegliere gli intorni di l centrati su l, mentre di solito è più conveniente lasciare completa arbitrarietà per gli intorni di x_0.

Un teorema “semplificativo”

Il seguente teorema facilita notevolmente i calcoli nelle dimostrazioni di molti teoremi.

Teorema. *Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$$

se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ esiste un intorno } U \text{ di } x_0$$

$$\text{tale che } \forall x \in U \setminus \{x_0\}, |f(x) - l| < k\varepsilon$$

dove k è un numero reale positivo.

Limite destro e sinistro

Definizione (Limite destro e sinistro)**.** *Sia data una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A, con eventualmente x_0 anche $\in \{\, +\infty,\, -\infty,\, \infty \,\}$. Diremo che l, con eventualmente l anche $\in \{\, +\infty,\, -\infty,\, \infty \,\}$, è il* limite destro *(rispettivamente* limite sinistro *di f per x tendente a x_0 se fissato comunque un intorno U_l di l è possibile in corrispondenza trovare un intorno destro $I^+_{x_0}$ (rispettivamente sinistro $I^-_{x_0}$) di x_0 tale che i valori della funzione calcolati in tutti i punti di $I^+_{x_0}$ (rispettivamente $I^-_{x_0}$),* tranne *eventualmente x_0 stesso, cadano nel prefissato intorno U_l di l.*

In questo caso si scrive, rispettivamente,

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \quad , \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \,.$$

Limite destro e sinistro (2)

Il seguente teorema è molto utile per le applicazioni.

Teorema. *Se x_0 è di accumulazione per il dominio di una funzione f, si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

se e solo se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l \quad \wedge \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l\,.$$

Limite della restrizione

Teorema. *Se per una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$$

e se B è un sottoinsieme di A avente ancora x_0 come punto di accumulazione, allora

$$\lim_{x \to x_0} f|_B(x) = l$$

Conseguenza importante ai fini applicativi è il seguente teorema.

Teorema. *Se i limiti delle restrizioni di una funzione a due sottoinsiemi diversi del dominio sono diversi, allora la funzione non ha limite per x tendente a x_0.*

Unicità del limite

Teorema (Teorema dell'unicità del limite). *Se* $l_1,\, l_2 \in \mathbb{R}$ *e*

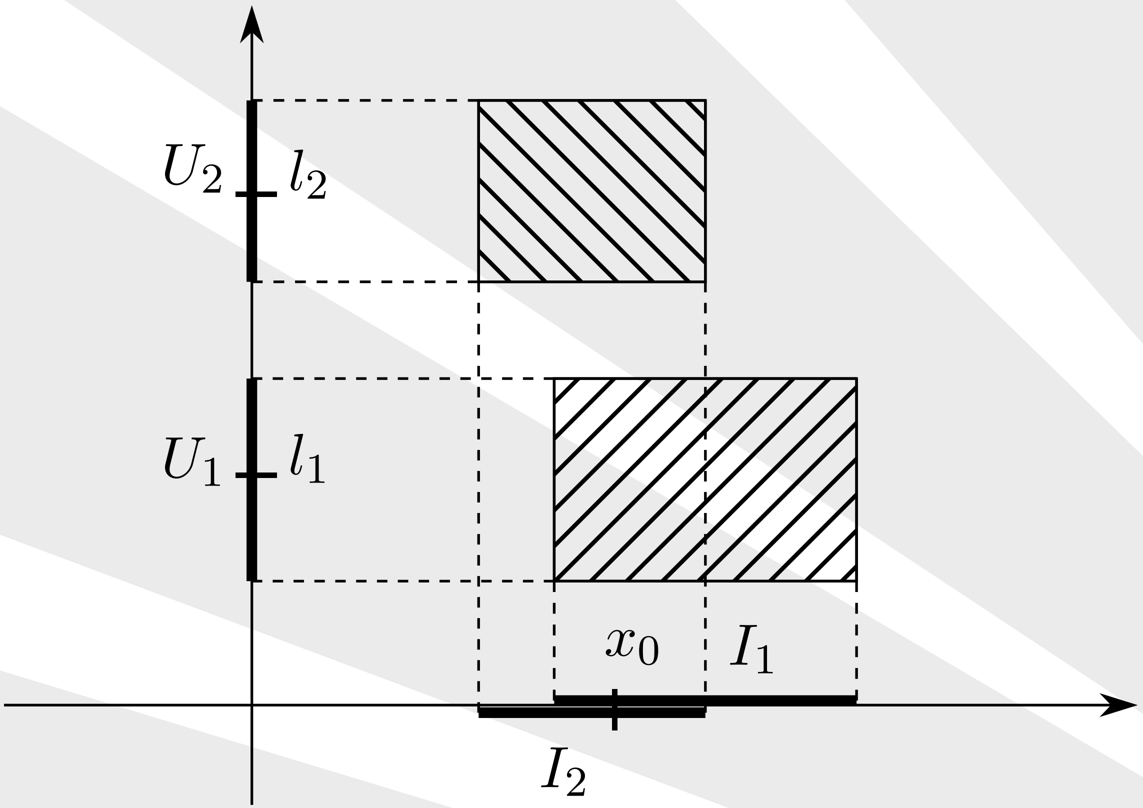
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l_1 \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_2$$

allora

$$l_1 = l_2\,,$$

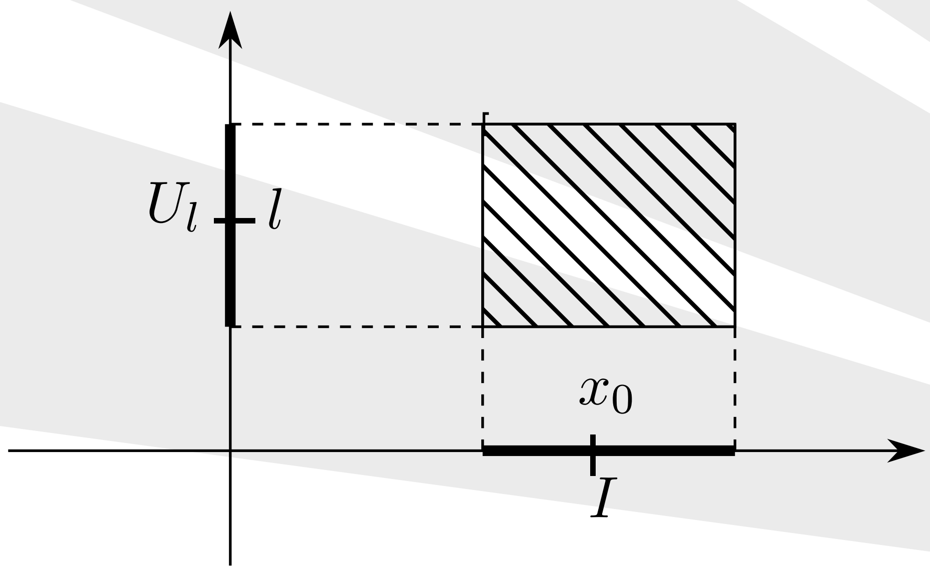
cioè "se il limite esiste, è unico".

Unicità del limite(2)



Permanenza del segno

Teorema (Teorema della permanenza del segno). *Se una funzione ha limite positivo (anche $+\infty$), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale si ha $f(x) > 0$ (purché naturalmente x stia nel dominio); analogamente se il limite è negativo (anche $-\infty$), allora esiste un intorno di x_0 per ogni x del quale si ha $f(x) < 0$ (purché naturalmente x stia sempre nel dominio).*



Limitatezza locale e confronto

Teorema (Teorema di limitatezza locale). *Se una funzione ha un limite finito per x tendente a x_0, allora esiste un intorno di x_0 dove la f è limitata.*

Teorema (Teorema di confronto). *Siano f, g e h tre funzioni che, in un opportuno intorno di x_0, soddisfano le disuguaglianze*

$$f(x) \le g(x) \le h(x)\,.$$

1. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = l$, *allora anche* $\lim_{x\to x_0} g(x) = l\,.$
2. *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, *allora anche* $\lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty\,.$
3. *Se* $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$, *allora anche* $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty.$

Limite di somma, prodotto e reciproca

Teorema. *Se è*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = m \in \mathbb{R}\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) + g(x)\big) = l + m\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x) \cdot g(x)\big) = l \cdot m\,.$$

Teorema. *Se è*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}\,.$$

Estensioni per i teoremi sull'algebra

Con ovvio significato dei simboli, si hanno i seguenti fatti.

1. $l \pm (+\infty) = \pm\infty\,, \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
2. $l \pm (-\infty) = \mp\infty\,, \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
3. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.
4. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.
5. $l \cdot (\infty) = \infty\,, \quad \forall l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
6. $(\infty)(\infty) = \infty$.
7. $\dfrac{l}{0} = \infty\,, \quad \forall l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
8. $\dfrac{l}{\infty} = 0\,, \quad \forall l \in \mathbb{R}$.
9. $\dfrac{\infty}{l} = \infty\,, \quad \forall l \in \mathbb{R}$.

Estensioni per i teoremi sull'algebra(2)

Valgono poi anche i teoremi seguenti.

1. La somma tra una funzione che tende a $+\infty$ e una inferiormente limitata tende a $+\infty$.
2. La somma tra una funzione che tende a $-\infty$ e una superiormente limitata tende a $-\infty$.
3. La somma tra una funzione che tende a ∞ e una limitata tende a ∞.
4. Il prodotto tra una funzione che tende ∞ e una il cui modulo sia maggiore di un $k > 0$ tende all'infinito.
5. Il prodotto tra una funzione che tende a 0 e una limitata tende a 0.

Forme di indecisione

I teoremi sull'algebra dei limiti che abbiamo enunciato *non* ci permettono di trarre alcuna conclusione nei seguenti casi.

1. Somma di due funzioni di cui una tende a $+\infty$ e una a $-\infty$: *caso* $+\infty - \infty$.
2. Prodotto di due funzioni di cui una tende a 0 e l'altra a ∞: *caso* $0 \cdot \infty$.
3. Quoziente di due funzioni che tendono entrambe a 0: *caso* $\frac{0}{0}$.
4. Quoziente di due funzioni che tendono entrambe a ∞: *caso* $\frac{\infty}{\infty}$.

In queste situazioni la determinazione del limite, se esistente, richiede un'analisi caso per caso. Li chiameremo *casi o forme di indecisione* (a volte anche *casi di indeterminazione*). La denominazione può trarre in inganno: non si tratta di casi che non possono essere decisi, ma solo di casi in cui la decisione non può essere presa solo sulla base dei teoremi sui limiti.

Funzioni monotone

Sussiste il seguente importantissimo teorema.

Teorema. *Sia $f: a \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione monotona e sia $\alpha = \sup(A)$ (anche con $\alpha = +\infty$) con l'ulteriore ipotesi che $\alpha \notin A$ (cioè α non è il massimo di A). In queste ipotesi la funzione ha sempre limite per x tendente ad α e si ha*

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \begin{cases} \sup(f(A)), & \text{se } f \text{ è crescente;} \\ \inf(f(A)), & \text{se } f \text{ è decrescente.} \end{cases}$$

Analogo discorso per il limite con x tendente a $\inf(A)$.

Si tenga presente che è molto importante il fatto che $\alpha \notin A$.

Limite del modulo

Teorema. *Se una funzione f ha un dato limite l (anche infinito), allora la funzione $|f(x)|$ ha per limite $|l|$ (intendendosi che $|-\infty| = |\infty| = +\infty$).*

Non è vero il viceversa.

Esempio. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}; \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

non ha limite in corrispondenza a nessun x_0. La funzione $|f(x)|$, essendo costantemente uguale a 1, ha limite 1 in corrispondenza a ogni x_0.

Funzioni continue

Definizione (Funzione continua). *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione, e x_0 un punto qualunque del suo dominio. Si dice che la funzione è* continua *in x_0 se*

$$\forall U_{f(x_0)}\ \exists I_{x_0} \text{ tale che } \forall x \in I_{x_0} \text{ si abbia } f(x) \in U_{f(x_0)}\,. \tag{1}$$

– Nella (1) il valore l è sostituito da $f(x_0)$;
– nella (1) non si richiede che x_0 sia di accumulazione per A, si richiede invece che x_0 appartenga al dominio;
– nella (1) non si esclude il punto x_0 tra quelli dove deve essere vero che $f(x) \in U_{f(x_0)}$.

Se x_0 è isolato la funzione è sempre continua in x_0, se è di accumulazione è continua se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

Teoremi sulle funzioni continue

– La somma di due funzioni continue è continua.
– Il prodotto di due funzioni continue è continuo.
– Il quoziente di due funzioni continue è continuo nei punti dove non si annulla il denominatore.
– Il modulo di una funzione continua è continuo.

Teorema. *Siano f e g due funzioni tali che abbia senso considerare la composta $f \circ g$. Sia poi x_0 un punto di accumulazione per il dominio di g. Allora se*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l \quad \wedge \quad f \text{ è continua in } l$$

esiste anche il limite della funzione composta per $x \to x_0$ e si ha

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(l) \,.$$

$\Rightarrow$ La composta di due funzioni continue è continua.

Continuità dell'inversa

Teorema. *Sia f una funzione strettamente monotona e definita in un intervallo I. Allora l'inversa di f è continua.*

Attenzione!!