Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

4 dicembre 2008

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero

Serie numeriche

Successioni

Successioni

Definizione. *Sia* A *un sottoinsieme infinito di* $\mathbb{N}$*; una funzione* $a\colon A \to \mathbb{R}$ *si chiama una* successione *o anche una successione in* $\mathbb{R}$*.*

Per questo tipo di funzioni si usano generalmente le lettere a, b, ..., anziché le lettere f, g, ... Inoltre l'immagine di un naturale n tramite la funzione stessa si indica di solito con a_n anziché con $a(n)$. L'elemento a_n è anche detto il *termine generale* o termine n-esimo della successione.

La successione stessa si indica spesso con la scrittura

$$(a_n)_{n\in A} \quad \text{o anche semplicemente} \quad (a_n)_n\,, \quad \text{o ancora} \quad (a_n)\,.$$

Successioni-2

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

L'immagine della successione si indica con

$$\{\, a_n \mid n \in A \subseteq \mathbb{N} \,\}\ .$$

In molti casi per indicare una successione si scrivono esplicitamente i "primi" termini, cioè le immagini dei primi elementi del dominio, come nel seguente esempio.

Esempio. La successione $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$, si indica anche con la scrittura

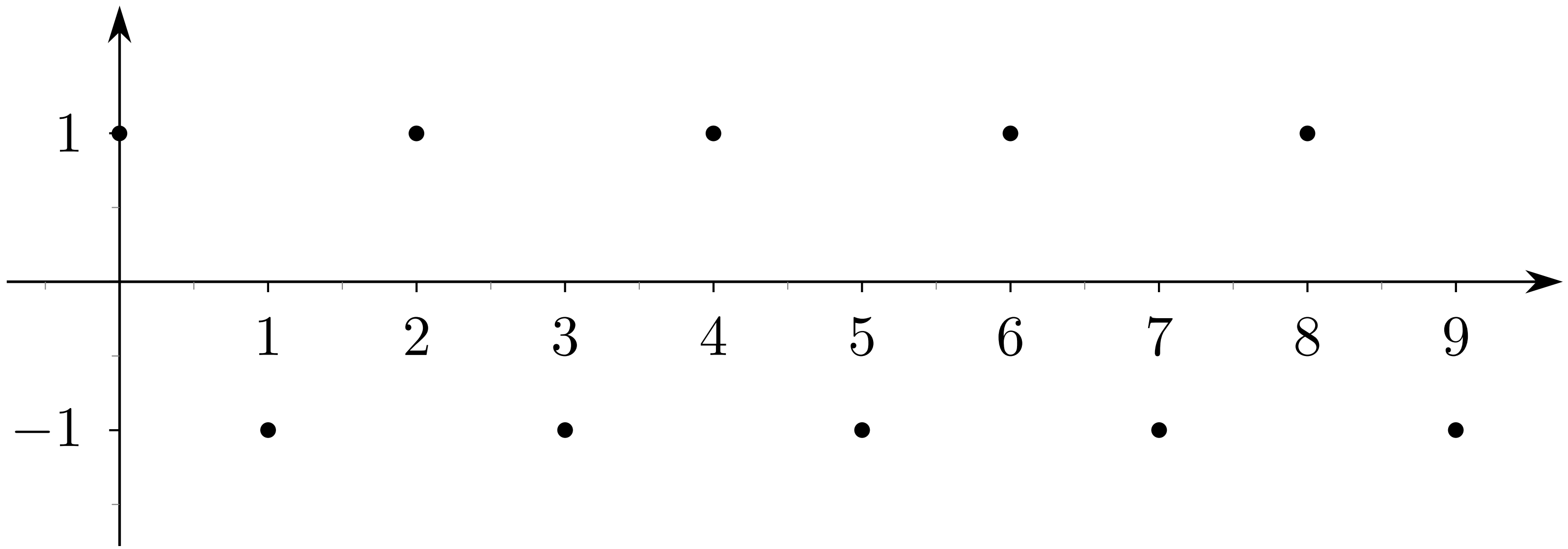
$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{5},\ \dots$$

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

Definizione. *Se è data una successione* $a\colon A \to \mathbb{R}$ e B *è un sottoinsieme infinito di* A*, anche la restrizione della funzione* a *all'insieme* B *è ancora una successione, che si chiama una* sottosuccessione*. Nel caso che il sottoinsieme* B *sia costituito da tutti gli elementi di* A *maggiori o uguali a un determinato naturale* p*, si parla anche di* coda *della successione, o di coda che inizia con* p*.*

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

Di una successione, come di ogni funzione di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, possiamo fare un grafico cartesiano. Per esempio il grafico della successione $a_n = (-1)^n$ ha l'andamento seguente.



Si tratta di una successione che "oscilla indefinitamente" tra -1 e 1.

Ricorrenza

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

Sulla base del principio di induzione, si possono definire le successioni anche per ricorrenza, come nell'esempio che segue.

Esempio. Si consideri la successione, detta di *Fibonacci*, definita da

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ a_1 = 1, \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n. \end{cases}$$

I primi termini della successione sono i seguenti

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \ldots$$

Proprietà definitive

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

Anche per le successioni si possono introdurre le definizioni di *successione crescente* e *decrescente* e, più in generale, di successione monotona.

Definizione. *Diremo che una certa proprietà è verificata* definitivamente *per una successione se esiste p tale che la coda della successione che inizia con p verifica la proprietà suddetta.*

Esempi.

- La successione $a_n = \frac{1}{(n-2)}$ è definitivamente decrescente, in quanto la coda che inizia con $n = 3$ è decrescente (si veda uno degli esempi sopra considerati).
- La successione $a_n = 1 - \ln n$ è definitivamente negativa, in quanto la coda che inizia con 3 è costituita tutta da numeri negativi.

Limiti

Definizione. *Sia (a_n) una successione.*

1. *Se $l \in \mathbb{R}$, si dice che $\lim a_n = l$ se per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $|a_n - l| < \varepsilon$. È come dire che la successione è definitivamente compresa tra $l - \varepsilon$ e $l + \varepsilon$, qualunque sia $\varepsilon > 0$. In questo caso la successione si dice anche* convergente.
2. *Se $l = +\infty$, si dice che $\lim a_n = l$ se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $a_n > k$. È come dire che la successione è definitivamente maggiore di k, qualunque sia k. In questo caso la successione si dice anche* divergente a $+\infty$ *o* positivamente divergente.
3. *Se $l = -\infty$, si dice che $\lim a_n = l$ se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $a_n < k$. È come dire che la successione è definitivamente minore di k, qualunque sia k. In questo caso la successione si dice anche* divergente a $-\infty$ *o* negativamente divergente.
4. *Se $l = \infty$, si dice che $\lim a_n = l$ se per ogni $k \in \mathbb{R}$, esiste $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, $|a_n| > k$. È come dire che la successione è, in modulo, definitivamente maggiore di k, qualunque sia k.*
5. *Nel caso che sia $l = \infty$ senza essere né $l = +\infty$, né $l = -\infty$, oppure nel caso il limite non esista, la successione si dice* indeterminata.

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero

Serie numeriche

Restrizioni

Osservazione. In molti casi di interesse pratico si può facilmente interpretare una successione come la restrizione a $\mathbb{N}$ (o a un suo sottoinsieme) di una funzione definita in un opportuno sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Esempio. La successione $a_n = \frac{1}{n}$ può essere interpretata come la restrizione a $\mathbb{N}^+$ della funzione, definita in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

In altri casi la cosa non è possibile, o perlomeno non è facile.

L'osservazione è abbastanza importante per quanto riguarda il calcolo dei limiti. Infatti per le funzioni abbiamo delle tecniche che si basano sul calcolo differenziale, cosa che non è possibile con le successioni. Se è possibile calcolare il limite di queste funzioni a $+\infty$, e se questo limite esiste, esisterà anche il limite della successione, in base al teorema sul limite delle restrizioni. Se invece il limite della funzione non esiste, nulla si potrà dire sul limite della successione.

Nepero

Successioni
Successioni
Successioni-2
Sottosuccessioni
Grafici
Ricorrenza
Proprietà definitive
Limiti
Restrizioni
Nepero
Serie numeriche

Abbiamo già considerato il numero di Nepero come limite di una particolare funzione. In realtà l'introduzione di questo numero procede esattamente in senso contrario: si valuta cioè prima il limite di una successione e poi si passa a quello della funzione.

$$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

I passi di questa dimostrazione sono i seguenti.

- Si prova che la successione è strettamente compresa tra 2 e 3.
- Si prova che la successione è crescente.
- Si deduce (teorema sul limite delle funzioni monotone) che il limite esiste finito.
- Si prova che il limite è un numero irrazionale, addirittura trascendente, che si indica con "e".
- Con opportuni procedimenti se ne calcola un'approssimazione, con il grado voluto di approssimazione.

Successioni

Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Serie numeriche

Successioni
Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Definizioni-1

Supponiamo sia data una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e, a partire da essa, costruiamo una nuova successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nel modo seguente.

$$
\begin{aligned}
s_0 &= a_0;\\
s_1 &= a_0 + a_1;\\
s_2 &= a_0 + a_1 + a_2;\\
&\dots\\
s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n;\\
&\dots
\end{aligned}
$$

Definizione. *La successione (s_n) costruita come indicato dalla formula precedente si chiama* successione delle ridotte *(o anche delle somme parziali) associata alla successione (a_n), o* serie *associata alla successione (a_n).*

Definizioni-2

Successioni
Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Definizione. *Gli elementi della successione* (a_n) *si chiamano* termini della serie *e la serie si indica anche con la notazione*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \textit{o anche} \quad \sum_{n} a_n\,,$$

quando sia chiaro dal contesto quale sia il "valore iniziale" della somma e il fatto che la somma stessa si estenda "fino all'infinito". Naturalmente si scriverà anche

$$s_n = \sum_{p=0}^{n} a_p\,.$$

Definizioni-3

Successioni

Serie numeriche
- Definizioni-1
- Definizioni-2
- Definizioni-3
- Serie di Mengoli
- Mengoli-2
- Serie geometrica
- Criteri
- Algebra
- Confronto
- Armonica
- Rapporto
- Radice
- Serie alterne
- Oss.conclusive
- Oss.conclusive-2

Definizione. *Se la successione* (s_n) *ha un limite finito* l, *allora* l *si chiama* somma della serie *e si scrive*

$$l = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,.$$

In questo caso si dice che la serie converge. Se la successione delle ridotte diverge si dice che la serie diverge, se la successione delle ridotte è indeterminata si dice che la serie è indeterminata. La caratteristica di una serie di essere convergente, divergente o indeterminata, si chiama il carattere *della serie.*

Serie di Mengoli

Successioni
Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Esempio. Sia data la successione

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}\,, \quad n > 0\,.$$

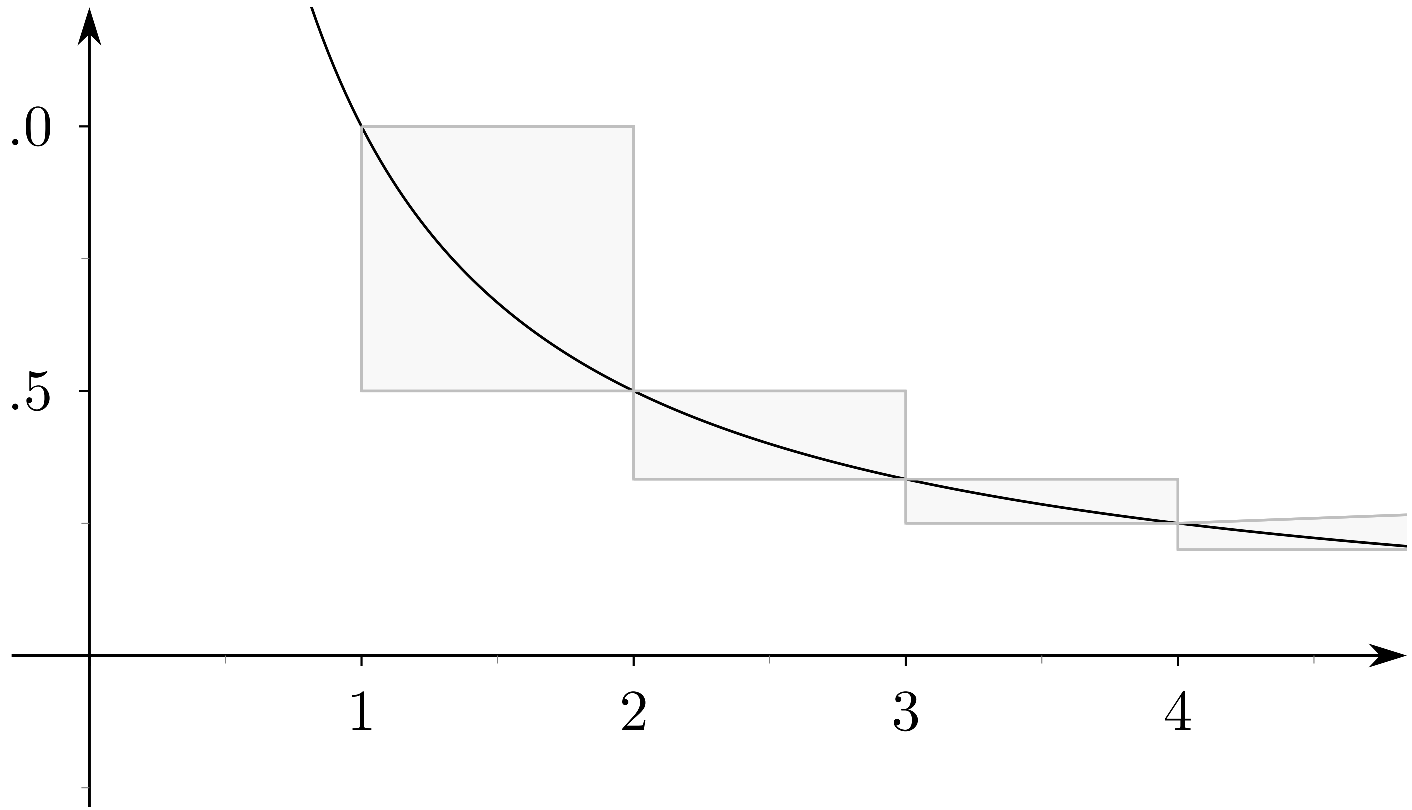
La serie di termine generale a_n si può costruire abbastanza facilmente osservando che

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,.$$

Allora . . .
Dunque

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Successioni
Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2



Serie geometrica

Successioni

Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Esempio. Sia $a_n = a^n$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, con $a \neq 1$.
Usando le proprietà delle progressioni geometriche si trova subito che

$$s_n = \frac{1 - a^n}{1 - a} \, .$$

Se ne deduce che

- se $|a| < 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1-a}$;
- se $a > 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge;
- se $a \leq 1$ la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ è indeterminata.

Successioni

Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Criteri di convergenza

Teorema (Condizione necessaria per la convergenza). *Se una serie converge, allora il suo termine generale è infinitesimo.*

Quindi una serie il cui termine generale non sia infinitesimo non può convergere. Per esempio la serie

$$\sum_n \frac{n}{n+1}$$

non può convergere perché il termine generale tende a 1.

Purtroppo la condizione espressa non è sufficiente.

Algebra

Successioni

Serie numeriche
- Definizioni-1
- Definizioni-2
- Definizioni-3
- Serie di Mengoli
- Mengoli-2
- Serie geometrica
- Criteri
- Algebra
- Confronto
- Armonica
- Rapporto
- Radice
- Serie alterne
- Oss.conclusive
- Oss.conclusive-2

Teorema. *Siano date due serie*

$$\sum_n a_n \quad \text{e} \quad \sum_n b_n \,.$$

– *Se esse convergono rispettivamente a l ed m, allora si ha*

$$\sum_n (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda l + \mu m, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R};$$

– *se entrambe divergono a $+\infty$ oppure a $-\infty$, anche la serie $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$;*

– *se una delle due diverge a $+\infty$ oppure a $-\infty$, mentre l'altra converge, anche la serie $\sum_n (a_n + b_n)$ diverge rispettivamente a $+\infty$ e a $-\infty$.*

Serie resto

Successioni

Serie numeriche
- Definizioni-1
- Definizioni-2
- Definizioni-3
- Serie di Mengoli
- Mengoli-2
- Serie geometrica
- Criteri
- Algebra
- Confronto
- Armonica
- Rapporto
- Radice
- Serie alterne
- Oss.conclusive
- Oss.conclusive-2

Definizione. *Se è data una serie*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \,,$$

la serie

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} a_n \,,$$

cioè la serie ottenuta tralasciando i primi p termini della precedente si chiama serie resto *p-esimo.*

Poiché le somme parziali delle due serie differiscono solo per una costante (la somma dei primi p termini), è chiaro che le due serie hanno lo stesso carattere (ma non la stessa somma!). Si usa esprimere questo fatto dicendo che il carattere di una serie *non* è influenzato dai primi p termini della serie stessa.

Confronto

Una serie a termini positivi può solo convergere o divergere. Dal teorema sul confronto dei limiti, si deduce il seguente importantissimo criterio di convergenza, da cui sostanzialmente dipendono gli altri che considereremo.

Teorema (Criterio del confronto). *Se*

$$\sum_n a_n \quad \textit{e} \quad \sum_n b_n \,.$$

sono due serie a termini positivi e se $a_n \leq b_n$ per ogni n, allora

- *se $\sum_n b_n$ converge, converge anche $\sum_n a_n$;*
- *se $\sum_n a_n$ diverge, diverge anche $\sum_n b_n$.*

Il risultato di questo teorema si usa esprimere dicendo che

- la minorante a termini positivi di una serie convergente converge;
- la maggiorante di una serie a termini positivi e divergente diverge.

Armonica

Successioni

Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Esempio. La cosiddetta *serie armonica*, cioè

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è divergente.

Si può invece provare che vale il seguente teorema.

Teorema. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha},$$

detta serie armonica generalizzata, *converge se* $\alpha > 1$, *diverge se* $0 < \alpha \leq 1$.

Rapporto

Successioni

Serie numeriche
- Definizioni-1
- Definizioni-2
- Definizioni-3
- Serie di Mengoli
- Mengoli-2
- Serie geometrica
- Criteri
- Algebra
- Confronto
- Armonica
- Rapporto
- Radice
- Serie alterne
- Oss.conclusive
- Oss.conclusive-2

Teorema (Criterio del rapporto). *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini positivi e

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l\,.$$

- *Se* $l < 1$, *la serie converge.*
- *Se* $l > 1$, *la serie diverge.*
- *Se* $l = 1$, *nulla si può dire circa il carattere della serie.*

Radice

Successioni

Serie numeriche
- Definizioni-1
- Definizioni-2
- Definizioni-3
- Serie di Mengoli
- Mengoli-2
- Serie geometrica
- Criteri
- Algebra
- Confronto
- Armonica
- Rapporto
- Radice
- Serie alterne
- Oss.conclusive
- Oss.conclusive-2

Teorema (Criterio della radice). *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini positivi e

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = l\,.$$

- *Se* $l < 1$, *la serie converge.*
- *Se* $l > 1$, *la serie diverge.*
- *Se* $l = 1$, *nulla si può dire circa il carattere della serie.*

Successioni

Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Serie alterne

La trattazione delle serie a termini di segno qualunque è decisamente più complessa, in generale. Il primo risultato importante è il seguente.

Teorema. *Se una serie è assolutamente convergente è anche convergente.*

Teorema (Criterio di Leibniz). *Sia*

$$\sum_n a_n$$

una serie a termini di segno alterno. Se

- $\lim_n a_n = 0$;
- $|a_{n+1}| < |a_n|$,

la serie converge.

Osservazioni conclusive

Successioni
Serie numeriche
Definizioni-1
Definizioni-2
Definizioni-3
Serie di Mengoli
Mengoli-2
Serie geometrica
Criteri
Algebra
Confronto
Armonica
Rapporto
Radice
Serie alterne
Oss.conclusive
Oss.conclusive-2

Una serie è un concetto completamente diverso da una somma. In particolare in generale non si possono applicare le proprietà associativa e commutativa tipiche della somma.
Esempio. Si consideri la serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots$$

Sappiamo che non può convergere perchè il suo termine generale non è infinitesimo. Se però la scriviamo così (associando i termini)

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

otteniamo chiaramente una serie che converge a 0.
Se invece la scriviamo così (associando i termini in un altro modo)

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

otteniamo chiaramente una serie che converge a 1.
Se la scriviamo così (permutando i termini pari con i dispari e poi associando i termini)

$$-1 + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

otteniamo una serie che converge a -1.

Osservazioni conclusive - 2

La situazione può però essere ancora più drammatica.
Consideriamo per esempio di nuovo la serie armonica a segno alterno, che abbiamo detto essere convergente a $\ln 2$. Ebbene è possibile provare che se riordiniamo i suoi termini come segue

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots$$

(uno positivo e due negativi), la serie è ancora convergente ma a $\frac{\ln 2}{2}$. Si può addirittura provare che è possibile riordinare i termini in modo da ottenere una serie divergente, oppure una serie convergente a un reale qualsiasi.
Solo per le serie assolutamente convergenti (in particolare quelle positive) le proprietà associativa e commutativa continuano a valere: è questo il motivo principale della loro importanza applicativa.