Lezioni di Matematica 1 - I modulo

Luciano Battaia

6-7 novembre 2008

Limiti notevoli - Teoremi sulla continuità

Funzioni elementari e continuità

Le funzioni elementari sono continue.

- Funzioni razionali e radici
- Funzioni trigonometriche
  - Continuità del seno e conseguenze
- Esponenziali e logaritmi
  - Continuità dell'esponenziale e conseguenze

Un metodo per costruire funzioni non elementari.

Limiti notevoli

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,.$$

$$\left(\lim_{x^\circ\to 0^\circ}\frac{\sin x^\circ}{x^\circ}=\frac{\pi}{180}\,.\right)$$

$$\left(\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0\,.\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\,.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0.$$

Teorema (Zeri di una funzione continua). *Sia* $f : [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua, tale che*

$$f(a_0) \cdot f(b_0) < 0,$$

cioè tale che $f(a_0)$ *e* $f(b_0)$ *abbiano segno opposto.*
Allora esiste almeno un punto c *di* $[a_0, b_0]$ *tale che* $f(c) = 0$.

Teorema (Di connessione, o "Di tutti i valori", o "Dei valori intermedi"). *Sia f una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, $f\colon [a_0, b_0] \to \mathbb{R}$. Allora f assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$.*

Teorema (Di Weierstrass). *Se una funzione f è continua in un insieme A* chiuso e limitato, *allora assume massimo e minimo, cioè esistono un punto c e un punto d di A tali che $f(c)$ sia il massimo e $f(d)$ il minimo dell'insieme immagine della funzione.*

Derivate

Rapporto incrementale - Derivata

Definizione. *Data una funzione* $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e un punto* $x_0 \in A$, *la funzione*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}\,,$$

si chiama rapporto incrementale *della funzione* f *relativa al punto* x_0 *e all'incremento* $x - x_0$.

Definizione. *Nelle ipotesi della definizione precedente, se il limite del rapporto incrementale (eventualmente solo destro o solo sinistro)* esiste *ed* è finito, *la funzione* f *si dice* derivabile *in* x_0 *e il valore di tale limite si chiama* derivata *di* f *in* x_0 *e si indica con uno dei simboli*

$$f'(x_0)\,, \quad (\mathrm{D}f)(x_0)\,, \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\,.$$

Naturalmente se il limite vale solo da destra o da sinistra si parlerà di derivata destra o sinistra rispettivamente.

Continuità delle funzioni derivabili

Teorema (Continuità delle funzioni derivabili). *Se una funzione f è derivabile nel punto x_0 del suo dominio, allora f è continua in x_0.*

Osservazione. Se il limite del rapporto incrementale fosse infinito, nulla si potrebbe dire del limite di $f(x) - f(x_0)$, in quanto si otterrebbe la forma di indecisione $\infty \cdot 0$. Nel caso di limite del rapporto incrementale infinito la funzione può essere continua oppure no.

Tangente al grafico

La derivabilità di una funzione in un punto x_0 del suo dominio può essere interpretata come la condizione per l'esistenza della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0\,,\ f(x_0))$.

Se ne deduce che se f è una funzione derivabile in x_0 l'equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0\,,\ f(x_0))$ è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,. \tag{1}$$

Funzione derivata

Può naturalmente succedere che una funzione f sia derivabile in tutti i punti del suo dominio, o almeno in un sottoinsieme dello stesso. Si dà per questo la seguente definizione.

Definizione. *Sia $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $B \subseteq A$. Allora la funzione*

$$x \mapsto f'(x),\ \textit{di } B \textit{ in } \mathbb{R}$$

si chiama funzione derivata *di f e si indica con uno dei simboli seguenti*

$$f',\quad \mathrm{D}f,\quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

Altre scritture per la derivata

Se, nella definizione di rapporto incrementale e successivamente di derivata, poniamo $x - x_0 = \Delta x = h$, possiamo riscrivere la definizione di derivata come

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \text{ o anche } \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Questa scrittura, perfettamente equivalente alla precedente, facilita le cose (solo dal punto di vista formale!) in alcuni casi.

Condizione per la derivabilità

Teorema. *Una funzione f è derivabile in un punto x_0 se e solo se esistono una costante a e una funzione $\omega(h)$ tale che $\omega(h) \to 0$ se $h \to 0$ per cui si abbia:*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = ah + h\omega(h)\,,$$

Attenzione!

Il dominio delle funzioni via via considerate, quando non precisato, è quello che "naturalmente" di deduce dal contesto. Per esempio la funzione ω che stiamo considerando avrà come dominio tutti gli h tali che $x_0 + h$ stia nel dominio della funzione f.

Algebra delle derivate

Limiti notevoli - Teoremi sulla continuità
Derivate
- R. incr. - Derivata
- Continuità
- Tangente
- Funz.derivata
- Altre scritture
- Condizione
- Algebra

Teorema. *Se due funzioni* f *e* g *sono derivabili in un punto* x_0*, anche la somma, il prodotto e il quoziente (quest'ultimo se* g *è non nulla in* x_0*) sono derivabili e si ha precisamente quanto segue.*

1. $\mathrm{D}(f+g)(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. $\mathrm{D}(f \cdot g)(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$.
3. $\mathrm{D}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

Teorema (Linearità dell'operatore derivata)**.** *Se* f *e* g *sono funzioni derivabili in un insieme* A*, anche ogni loro combinazione lineare è derivabile e si ha*

$$\mathrm{D}(\lambda f + \mu g) = \lambda\, \mathrm{D}(f) + \mu\, \mathrm{D}(g)\,, \quad \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R}\,.$$