ARGOMENTI

DI

MATEMATICA PER L'INGEGNERIA

VOLUME 2°

Esercizi proposti

A.A.2010-2011

Quando non diversamente precisato, nel seguito si intenderà sempre che nel piano sia stato introdotto un sistema cartesiano ortogonale monometrico $\mathcal{S} = \left(O;\ \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}\right)$ e nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico $\mathcal{S} = \left(O;\ \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}\right)$. Inoltre le variabili e i parametri, quando non diversamente specificato, variano nel loro dominio naturale.

1) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per $P_0(1,0,1)$ e parallelo ai vettori $\vec{\mathbf{u}} = (1,1,-1)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (1,-1,2)$.

2) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per $P(2,0,-1)$ e parallelo al piano coordinato O_{XY}.

3) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per il punto $P(2,0,-1)$ e parallelo alle rette

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{X}-3}{2} = \dfrac{\mathrm{Z}+2}{3} \\ \mathrm{Y} = 1 \end{cases}, \qquad \begin{cases} 4\mathrm{X} = \mathrm{Y}+2 \\ \mathrm{X} = \mathrm{Z}-1 \end{cases}.$$

4) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano contenente la retta

$$\frac{\mathrm{X}-1}{2} = \frac{\mathrm{Y}-2}{6} = \frac{\mathrm{Z}+3}{-3},$$

e parallelo alla retta

$$\frac{\mathrm{X}-1}{4} = \frac{\mathrm{Y}+2}{3} = \mathrm{Z}.$$

5) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per il punto $P(1,-2,1)$ e parallelo al piano

$$\begin{cases} x = 1 + t - u \\ y = 2 + t + 3u \\ z = 2t + u \end{cases}.$$

6) Determinare l'equazione (nelle diverse forme studiate) del piano passante per i punti $P_1(2,1,0)$, $P_2(0,-1,2)$, $P_3(2,1,-3)$.

7) Sono dati nello spazio i punti $P_1(1,3,4)$, $P_2(-2,2,3)$, $P_3(-2,,4,3)$ e il vettore $\vec{\mathbf{u}} = (3,1,1)$. Determinare le equazioni della retta s per P_1, P_2 e della retta r per P_3 e di vettore direttore $\vec{\mathbf{u}}$. Determinare le equazioni della mediana della striscia individuata da r ed s, dopo avere verificato che le due rette sono parallele. Determinare le equazioni della retta s' simmetrica di s rispetto a r.

8) Sono date le rette

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = -1 + u \\ y = 1 + u \\ z = -1 + 2u \end{cases}.$$

Verificare che le due rette sono complanari, determinare il loro punto di incidenza e l'equazione del piano che le contiene. Determinare le equazioni delle due bisettrici degli angoli da esse individuate (nel loro piano comune). Determinare le equazioni dei due piani che hanno distanza 1 dal piano delle due rette.

9) Siano dati il piano π di equazione $2\mathrm{X} - 6\mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} - 3 = 0$ e il punto $P(2, 0, -1)$. Tra i piani per P e ortogonali a π, trovare le equazioni di quelli formanti un angolo di $\dfrac{\pi}{6}$ con il piano π' di equazione $2\mathrm{X} + 2\mathrm{Z} - 3 = 0$.

10) Sono dati i piani $\mathrm{X}+\mathrm{Y}+2\mathrm{Z}+2 = 0$ e $\mathrm{X}+\mathrm{Y}+2\mathrm{Z}-10 = 0$. Verificare che sono paralleli e determinare l'equazione del piano mediano della striscia da essi individuata. Trovare l'equazione del luogo dei punti aventi distanza $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ dal primo dei due piani dati.

11) Dati il piano π di equazione $2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} + \mathrm{Z} - 1 = 0$ e il punto $P(3, -2, 3)$ determinare il punto P' proiezione di P su π e il simmetrico P'' di P rispetto a π.

12) Dati il piano π di equazione $2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} + \mathrm{Z} - 1 = 0$, determinare le equazioni della retta proiezione ortogonale della retta

$$\begin{cases} x = 7 + t \\ y = 2t \\ z = 1 + 4t \end{cases}$$

su π.

13) Sia dato il punto $Q(3, -3, 1)$. Scrivere l'equazione del piano per Q e parallelo alle rette di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{X} - \mathrm{Y} + 2\mathrm{Z} + 1 = 0 \\ 2\mathrm{X} - \mathrm{Y} + 3\mathrm{Z} + 5 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + 3t \end{cases}.$$

14) Siano dati i punti $Q(3, -3, 1)$ ed $R(2, -1, 3)$. Scrivere l'equazione del piano per Q, R e parallelo alla retta di equazioni

$$\begin{cases} \mathrm{X} = \mathrm{Y} + 1 \\ \mathrm{Z} = -2\mathrm{Y} \end{cases}.$$

15) Tra i piani aventi distanza 1 dall'origine, determinare le equazioni di quelli che contengono la retta

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases}.$$

16) Tra i piani aventi distanza 1 dall'origine, determinare le equazioni di quelli paralleli al piano

$$2\mathrm{X} - 3\mathrm{Y} + 6\mathrm{Z} - 5 = 0\,.$$

17) Dati i punti $P(1,0,4)$ e $Q(-1,4,2)$, determinare l'equazione dell'asse del segmento PQ appartenente al piano di equazione $3\mathrm{X}+2\mathrm{Y}+\mathrm{Z}-7=0$.

18) Sia dato un tetraedro, le cui facce appartengono ai piani di equazione

$$\begin{array}{ll} 2\mathrm{X}+6\mathrm{Y}+\mathrm{Z}-2=0\,, & 2\mathrm{X}-\mathrm{Y}+\mathrm{Z}-2=0 \\ \mathrm{X}-4\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}+6=0\,, & \mathrm{X}+3\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}-1=0 \end{array}$$

Determinare i vertici del tetraedro, le lunghezze degli spigoli, le aree dell facce, il volume; determinare poi le equazioni dei piani assiali degli spigoli verificando che questi piani appartengono a una stessa stella di piani (ovvero che hanno tutti un punto in comune).

19) Dati il punto $P(3,3,2)$ e la retta r

$$\begin{cases} \mathrm{X}+\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}-1=0 \\ \mathrm{X}-\mathrm{Y}-\mathrm{Z}+3=0 \end{cases},$$

scrivere le equazioni della retta s per il punto P, complanare con r, e parallela al piano di equazione $2\mathrm{X}-\mathrm{Y}-3\mathrm{Z}-2=0$.

20) Siano date le rette r ed s di equazioni, rispettivamente,

$$\begin{cases} \mathrm{X}=\mathrm{Y}+1 \\ \mathrm{Z}=-2\mathrm{Y}+2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathrm{Y}=\mathrm{X} \\ \mathrm{Z}=-\mathrm{X}+3\,. \end{cases}$$

Scrivere le equazioni della retta p, passante per $P(1,0,3)$ e incidente entrambe le rette r es s.

21) Siano date le rette r ed s di equazioni, rispettivamente,

$$\begin{cases} \mathrm{X}=\mathrm{Y}+1 \\ \mathrm{Z}=-2\mathrm{Y}+2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \mathrm{Y}=\mathrm{X} \\ \mathrm{Z}=-\mathrm{X}+3\,. \end{cases}$$

Verificare che le rette sono sghembe, trovare la loro minima distanza e le equazioni dei due piani passanti per una delle due rette e paralleli all'altra. Determinare l'equazione della retta p ortogonale comune alle due rette date.

22) Sia dato il punto $P(1,1,-2)$. determinare le equazioni delle rette uscenti da P, incidenti la retta

$$\begin{cases} \mathrm{Y}=\mathrm{Z} \\ \mathrm{X}=0 \end{cases},$$

e formanti con quest'ultima un angolo di $\dfrac{\pi}{6}$.

23) Data la curva

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases},$$

si chiede di determinare i suoi eventuali punti ove la retta tangente è perpendicolare al vettore $\vec{\mathbf{u}}=(0,1,1)$, e di scrivere le equazioni delle rette tangenti in questi punti.

24) Scrivere l'equazione del piano tangente la superficie di equazione $z = \ln(2x + y)$ nel punto $P(-1, 3, 0)$.

25) Calcolare le derivate parziali e la derivata direzionale rispetto alla direzione orientata individuata dal vettore $\vec{\mathbf{u}} = (1, 1)$, nell'origine, per la funzione data da

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Detto $\vec{\mathbf{v}}$ il versore di $\vec{\mathbf{u}}$, controllare se vale oppure no la formula

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(0, 0) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(F)(0, 0) \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

giustificando il risultato.

26) Siano $G(x, y) = xy - 1$ e $F = (F_1, F_2)$, con $F_1(x, y) = xy - e^x$ e $F_2(x, y) = x \sin(xy)$. Calcolare le derivate parziali della funzione $G \circ F$ sia a partire dalla espressione esplicita, che utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte.

27) Si consideri la funzione data da

$$F(x, y) = \begin{cases} y^2 \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right), & \text{se} \quad y \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad y = 0 \end{cases} .$$

Si calcolino le derivate parziali e le derivate lungo una generica direzione individuata dal versore (l, m) in un punto arbitrario dell'asse x.

28) Siano date la funzione $F(x, y) = x^2 y - x$ e la curva

$$\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 \\ z = t^3 - \sqrt{t} \end{cases} , \quad t \in]0, +\infty[$$

Si determini l'equazione della retta tangente alla curva nel punto $P(1, 1, 0)$. Si dimostri poi che la curva giace interamente sopra il grafico della funzione F e si verifichi che la tangente alla curva prima trovata giace interamente nel piano tangente al grafico della funzione nel punto P.

29) Si scriva l'equazione della sfera $\mathcal{S}$ di centro $C(1, 2, 1)$ e raggio 2. Si determini l'equazione del suo piano tangente α nel punto $P(2, 3, 1 + \sqrt{2})$. Si consideri poi la circonferenza intersezione tra la sfera $\mathcal{S}$ e il piano per P parallelo al piano O_{xy}. Si trovino analiticamente il centro e il raggio di questa circonferenza. Si trovino le equazioni parametriche della retta s tangente a questa circonferenza nel punto P e della retta perpendicolare a s e appartenente al piano tangente α.

30) Si consideri l'ellisse

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} , \quad t \in [0, 2\pi[.$$

Sia P_0 un suo generico punto, corrispondente al valore t_0 del parametro. Detti F_1 ed F_2 i due fuochi, si verifichi che la bisettrice dell'angolo $F_1\widehat{P_0}F_2$ è perpendicolare all'ellisse.

31) Sia data la funzione

$$\mathrm{F}(x, y) = \frac{x^2 y + x}{x^2 + y^2 + 1},$$

e il punto $P(1, 1)$ del suo dominio. Scrivere l'equazione della linea di livello

$$\mathrm{F}(x, y) = \mathrm{F}(1, 1).$$

Tenendo conto della proprietà del vettore gradiente, scrivere l'equazione della retta tangente a questa curva di livello (nel piano O_{xy}) nel punto P. Scrivere poi l'equazione della retta tangente alla stessa curva di livello tracciata sul grafico della funzione F.

32) Riconsiderata la funzione dell'esercizio **31**), si determinino, nel punto $Q(0, 1)$, le derivate rispetto a una generica direzione orientata per Q. Si determini poi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione in corrispondenza al punto Q e l'equazione della retta perpendicolare al piano tangente e passante per $(0, 1, \mathrm{F}(0, 1))$.

33) Riconsiderata ancora la funzione dell'esercizio **31**), e la curva

$$\begin{cases} x = \mathrm{f}_1(t) = 3\sqrt{t} \\ y = \mathrm{f}_2(t) = t^2 \end{cases}, \quad t \in [1, 2],$$

si calcoli la derivata della funzione composta $\mathrm{F}(\mathrm{f}_1(t), \mathrm{f}_2(t))$, sia in modo diretto, che usando la regola di derivazione delle funzioni composte.

34) Sia data la funzione $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + x \sin y$. Calcolare la derivata direzionale nel punto $P_0(1, \pi/2)$, secondo la direzione orientata individuata dal vettore $\vec{\mathbf{v}} = (3, 4)$. Dire se esiste, ed eventualmente determinarla, una direzione orientata $\vec{\mathbf{w}}$ tale che

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \vec{\mathbf{w}}}(1, \pi/2) = 0.$$

35) Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico delle funzioni seguenti, nel punto indicato.

(a) $\mathrm{F}(x, y) = e^x + y, \quad (x_0, y_0) = (1, 3)$
(b) $\mathrm{F}(x, y) = yx^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (1, -1)$
(c) $\mathrm{F}(x, y) = \sin x - y, \quad (x_0, y_0) = (\pi/2, 0)$
(d) $\mathrm{F}(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + 3, \quad (x_0, y_0) = (1, -1)$

36) Siano dati la funzione $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + 4y^2$ e il punto $P_0(1, 0)$. Tracciare la curva di livello $\mathrm{F}(1, 0)$, scrivere il gradiente della funzione nel punto P_0 e verificare che il gradiente risulta perpendicolare alla curva di livello prima tracciata, nel punto P_0.

37) Sia data la curva

$$\gamma\colon \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t < 2\pi.$$

Calcolare sia direttamente, sia usando la regola di derivazione delle funzioni composte, la derivata di $\mathrm{F}(\gamma(t))$, dove $\mathrm{F}(x, y) = x^2 + 4y^2$.

38) Siano $F(x, y) = x^2y + 3x$ e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Calcolare il gradiente della funzione $\varphi(F(x, y))$ nel punto $(-1, 1)$ sapendo che $\varphi'(-2) = 5$.

39) Siano $F(x, y) = x^2y + 3x$ e $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Calcolare la derivata di $F(x(t), y(t))$ in 0, sapendo che $\gamma(0) = (-1, 1)$ e $\gamma'(0) = (2, -3)$.

40) Determinare gli estremi relativi e i punti di sella delle seguenti funzioni:

(a) $F(x, y) = x^2 + 4xy + 3y^2$

(b) $F(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy$

(c) $F(x, y) = \sin y(e^{-x} + e^x)$

(d) $F(x, y) = \log(x + 2y) - \frac{1}{4}xy$

(e) $F(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$

41) Dire se l'origine è un punto di estremo relativo per la funzione

$$F(x, y) = x^2y^3$$

42) Dire se l'origine è un punto di estremo relativo per la funzione

$$F(x, y) = x^2y - 2xy^2$$

43) Sia data la funzione

$$F(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + 2x^2y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Supposto di aver provato che è continua, si stabilisca

(a) se ha le derivate parziali nell'origine;

(b) se ha le derivate lungo ogni direzione nell'origine;

(c) se è differenziabile nell'origine.

44) Si calcoli la derivata della funzione definita da

$$f(x) = \int_1^x \sqrt{1 + t^4}\, dt$$

45) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 4, di punto iniziale 3, della funzione definita da

$$f(x) = \int_3^x e^{t^2}\, dt$$

46) Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3, di punto iniziale 0 (polinomio di Mac Laurin), della funzione definita da

$$f(x) = \int_0^x \left(\int_0^t e^{-s^2}\, ds \right) dt$$

47) Si calcoli

$$\lim_{x\to 1} \frac{\int_1^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t}{x-1}$$

48) Si calcoli la funzione derivata seconda della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_1^{x^2} \sqrt{1+t^4}\, \mathrm{d}t$$

49) Si calcoli la funzione derivata della funzione definita da

$$\mathrm{f}(x) = \int_{x^2}^{1} t e^{t^3}\, \mathrm{d}t$$

50) Sia data la funzione $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ di componenti

$$\begin{cases} f_1(x,y) = xy - e^x \\ f_2(x,y) = x\sin(xy) \end{cases},$$

e sia $\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{XY} - 1$.

- Si calcoli esplicitamente la funzione composta $\mathrm{H} = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.
- Si calcolino esplicitamente le derivate parziali di H, a partire dalla sua espressione trovata sopra.
- Si calcolino le derivate parziali di H usando il teorema di derivazione delle funzioni composte e si confronti il risultato con quello del punto precedente.

51) Stesse domande dell'esercizio **50**), opportunamente adattate, per le funzioni

$$\mathrm{F}(t) = \begin{cases} \mathrm{f}_1(t) = t+2 \\ \mathrm{f}_2(t) = t^2 + t \\ \mathrm{f}_3(t) = t^3 - t^2 \end{cases}$$

e

$$\mathrm{G}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{XY} - 2\mathrm{Z}\,.$$

52) Stesse domande dell'esercizio **50**), opportunamente adattate, per le funzioni

$$\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X}^2 + 2\mathrm{Y}\,,$$

e

$$\mathrm{G}(t) = \begin{cases} \mathrm{g}_1(t) = te^t \\ \mathrm{g}_2(t) = \sin(2t) \end{cases}.$$

53) Si trovino gli eventuali punti di massimo e minimo relativo per le seguenti funzioni

(a) $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{X} - \mathrm{X}^2 - \mathrm{Y}^2$

(b) $\mathrm{F}(\mathrm{X},\mathrm{Y}) = \mathrm{XY}(\mathrm{X}-1)$

(c) $F(X, Y) = X(Y - 1) - X^2 Y$

(d) $F(X, Y) = X(X - Y)e^{Y-X}$

(e) $F(X, Y) = \cos(X + Y) + \cos(X - Y)$

54) Sviluppare in formula di Taylor, di punto iniziale $(0, 0)$, fino al secondo ordine, le funzioni

(a) $F(X, Y) = Xe^{XY}$

(b) $F(X, Y) = \sin X \cos(XY)$

(c) $F(X, Y) = \log \dfrac{1 + X}{1 + Y}$

55) Sia data la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2 + 1} \qquad t \in \mathbb{R}\,. \\ z(t) = t^3 \end{cases}$$

(a) Si dica se si tratta di una curva regolare o no.

(b) Si trovi l'equazione della retta s tangente alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

(c) Si trovi l'equazione del piano π perpendicolare alla curva nel punto corrispondente a $t = 1$.

(d) Si trovino gli angoli formati dal piano normale con i piani coordinati.

(e) Si trovino le equazioni dei due piani a distanza 1 dal piano normale precedentemente trovato.

(f) Sia r la retta intersezione tra π e il piano O_{XY}; si trovi la minima distanza tra s ed r.

56) Si consideri la funzione data da

$$f(x) = \int_1^x \left(\int_t^{2t} \cos(2u)\, du \right) dt\,.$$

Senza calcolare gli integrali si trovi

(a) il dominio di f;

(b) $f'(0)$;

(c) $f''(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$.

Successivamente si ritrovino gli stessi risultati calcolando esplicitamente gli integrali.

57) Si consideri la funzione data da

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t - 1}\, dt\,.$$

Senza calcolare l'integrale si trovi

(a) il dominio di f;

(b) $f'(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$;

(c) $f''(x)$, $\forall x \in \mathrm{dom}(f)$.

Successivamente si ritrovino gli stessi risultati calcolando esplicitamente l'integrale.

58) Si trovi l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

nel suo intero dominio.

59) Data la funzione

$$f(x) = \int_x^{2x} t\sqrt{3 + t}\, dt\,,$$

se ne scriva il polinomio di Mac-Laurin, fino all'ordine 2.

60) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 x^x(1 + \log x)\, dx$$

ricordando che $(x \log x)' = 1 + \log x$.

61) Si determini, sull'intervallo $]1, +\infty[$, quella primitiva di

$$f(x) = \frac{x}{(x + 1)(x^2 - 1)}$$

che ha limite π per $x \to +\infty$.

62) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^6}}\, dx\,,$$

utilizzando la sostituzione $x^3 = t$.

63) Sia f la funzione data da

$$f(x) = \int_0^{2x} \log(\cos t)\, dt\,.$$

(a) Si determini il dominio di f.

(b) Si scriva il polinomio di Mac Laurin di f, do ordine 3.

64) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^0 \frac{e^{3x}}{e^{2x} + 1}\, dx\,.$$

65) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{x^4} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}.$$

66) Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \sin(t^2)\,\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^{x^2} \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}.$$

67) Si calcoli l'integrale generalizzato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (x+1)e^{-|x|}\,\mathrm{d}x.$$

68) Si dica se la funzione data da

$$f(x) = x - \int_1^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

è crescente o decrescente.

69) Si calcoli il seguente integrale definito

$$\int_{-5}^{5} x + |x| + |x^2 - 1|\,\mathrm{d}x$$

70) Si trovi l'insieme di tutte le primite della funzione

$$\mathrm{f(x)} = \left|\mathrm{x}^2 - 1\right|.$$

71) Si trovi l'insieme di tutte le primite della funzione

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{|x|}$$

in tutto il suo dominio.