Tema di Analisi I, 2° modulo, 07/02/2011

Luciano Battaia[(*)]

Università di Udine, Sede di Pordenone

Esercizio 1. *Sono dati i punti $P=(3,0,2)$ e $Q=(1,4,0)$ e il piano α di equazione $3x+2y+z-11=0$. Si chiede:*

1. *di trovare l'equazione, in forma parametrica, dell'asse r del segmento PQ, appartenente al piano α.*

Il punto medio del segmento PQ è: $M=(2,2,1)$. Questo punto appartiene al piano α. Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha componenti: $(-2,4,-2)$. Il piano perpendicolare al segmento PQ e passante per M ha equazione: $-2(x-2)+4(y-2)-2(z-1)=0$, ovvero $x-2y+z+1=0$. L'equazione cartesiana della retta r è allora

$$\begin{cases} x-2y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases}.$$

Un vettore direttore della retta r si può trovare come prodotto vettoriale del due vettori normali ai due piani che individuano la retta r. Si ottiene, dopo semplificazione: $\vec{v}_r=(-2,1,4)$. L'equazione parametrica[(1)] della retta r è allora:

$$\begin{cases} x=2-2t \\ y=2+t \\ z=1+4t \end{cases}.$$

2. *Di trovare l'equazione, in forma cartesiana, dell'asse s del segmento PQ, perpendicolare a r.*

Un vettore direttore, $\vec{v}_s$, di s si può ottenere come prodotto vettoriale di $\vec{v}_r$ e del vettore $\overrightarrow{PQ}$. Dopo opportuna semplificazione, si ottiene $\vec{v}_s=(3,2,1)$. Le equazioni parametrica e cartesiana della retta s sono dunque:

$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=2+2t \\ z=1+t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x-3z+1=0 \\ y-2z=0 \end{cases}.$$

Esercizio 2. *Data la funzione definita da*

$$f(t)=\frac{t+1}{|t+1|+1}, \quad t\in\mathbb{R},$$

si consideri la funzione integrale, di punto iniziale -1, definita da

$$F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si chiede:

---

*http://www.batmath.it

[1] Naturalmente c'erano anche altri modi per passare dall'equazione cartesiana a quella parametrica.

1. *senza calcolare esplicitamente l'integrale, di dire se $F(x)$ è derivabile due volte in tutto $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, di calcolare $F''(-1)$.*

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, con derivata continua e data da

$$F'(x) = \frac{x+1}{|x+1|+1}.$$

L'unico possibile punto di non derivabilità per F' è -1. Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{x\to-1} \frac{F'(x)-F'(-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1} \frac{\dfrac{x+1}{|x+1|+1}-0}{x+1} = 1\,.$$

2. *Di trovare l'insieme di tutte le primitive di $f(t)$.*

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (che è un intervallo), basta trovare una primitiva e poi aggiungere una costante. Una primitiva è la funzione integrale F sopra considerata. Si ha:

$$F(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t+1}{t+2}\,\mathrm{d}t = t - \ln(t+2)\Big|_{-1}^{x}, & \text{se} \quad x \geq -1 \\ \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{t+1}{-t}\,\mathrm{d}t = -t - \ln|t|\Big|_{-1}^{x}, & \text{se} \quad x < -1 \end{cases},$$

ovvero

$$F(x) = \begin{cases} x - \ln(x+2) + 1, & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -x - \ln(-x) - 1, & \text{se} \quad < -1 \end{cases}.$$

Esercizio 3. *Sono dati la funzione $f(x,y) = x^2y + x\cos y - \pi + 1$, il punto $P_0 = (0,0)$ e il vettore $\vec{v} = (2,1)$. Si chiede:*

1. *di trovare, usando la definizione, la derivata di $f(x,y)$ nel punto P_0 secondo la direzione orientata individuata dal vettore $\vec{v}$.*

Il versore $\vec{u}$ di $\vec{v}$ è

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

L'equazione della retta di versore direttore $\vec{u}$, per P_0, è allora

$$\begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,t \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\,t \end{cases}$$

La funzione $g(t) = f(x(t), y(t))$ è data da

$$g(t) = \frac{4}{5}\,t^2\,\frac{1}{\sqrt{5}}\,t + \frac{2}{\sqrt{5}}\,t\cos\frac{1}{\sqrt{5}}\,t - \pi + 1\,.$$

La derivata in 0 fornisce il valore cercato della derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = g'(0) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

2. *Detto $\vec{u}$ il versore di $\vec{v}$, di verificare che vale la formula*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \nabla(f)(0,0)\cdot\vec{u}\,.$$

Il calcolo delle due derivate parziali nell'origine è immediato e fornisce

$$\nabla f(0,0) = (1,0)\,.$$

Questo basta per concludere che vale la formula indicata.

Esercizio 1. *Sono dati i punti $P = (-1, 2, 4)$ e $Q = (-3, 6, 2)$ e il piano α di equazione $3x + 2y + z - 5 = 0$. Si chiede:*

1. *di trovare l'equazione, in forma parametrica, dell'asse r del segmento PQ, appartenente al piano α.*

Il punto medio del segmento PQ è: $M = (-2, 4, 3)$. Questo punto appartiene al piano α. Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha componenti: $(-2, 4, -2)$. Il piano perpendicolare al segmento PQ e passante per M ha equazione: $-2(x + 2) + 4(y - 4) - 2(z - 3) = 0$, ovvero $x - 2y + z + 1 = 0$. L'equazione cartesiana della retta r è allora

$$\begin{cases} x - 2y + z + 7 = 0 \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} .$$

Un vettore direttore della retta r si può trovare come prodotto vettoriale del due vettori normali ai due piani che individuano la retta r. Si ottiene, dopo semplificazione: $\vec{v}_r = (-2, 1, 4)$. L'equazione parametrica[2] della retta r è allora:

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = 4 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} .$$

2. *Di trovare l'equazione, in forma cartesiana, dell'asse s del segmento PQ, perpendicolare a r.*

Un vettore direttore, $\vec{v}_s$, di s si può ottenere come prodotto vettoriale di $\vec{v}_r$ e del vettore $\overrightarrow{PQ}$. Dopo opportuna semplificazione, si ottiene $\vec{v}_s = (3, 2, 1)$. Le equazioni parametrica e cartesiana della retta s sono dunque:

$$\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases} , \qquad \begin{cases} x - 3z + 11 = 0 \\ y - 2z + 2 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2. *Data la funzione definita da*

$$f(t) = \frac{t - 1}{|t - 1| + 2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si consideri la funzione integrale, di punto iniziale 1, definita da

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t .$$

Si chiede:

1. *senza calcolare esplicitamente l'integrale, di dire se $F(x)$ è derivabile due volte in tutto $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, di calcolare $F''(1)$.*

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, con derivata continua e data da

$$F'(x) = \frac{x - 1}{|x - 1| + 2} .$$

L'unico possibile punto di non derivabilità per F' è 1. Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{x \to 1} \frac{F'(x) - F'(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\dfrac{x - 1}{|x - 1| + 2} - 0}{x - 1} = \frac{1}{2} .$$

2. *Di trovare l'insieme di tutte le primitive di $f(t)$.*

[2] Naturalmente c'erano anche altri modi per passare dall'equazione cartesiana a quella parametrica.

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (che è un intervallo), basta trovare una primitiva e poi aggiungere una costante. Una primitiva è la funzione integrale F sopra considerata. Si ha:

$$F(x)=\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\begin{cases}\displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{t+1}\,\mathrm{d}t=t-2\ln(t+1)\Big|_1^x, & \text{se} \quad x\geq 1\\[2ex] \displaystyle\int_1^x \frac{t-1}{-t+3}\,\mathrm{d}t=-t-2\ln|t-3|\Big|_1^x, & \text{se} \quad x<1\end{cases},$$

ovvero

$$F(x)=\begin{cases}x-2\ln(x+1)-1+2\ln 2, & \text{se} \quad x\geq 1\\ -x-2\ln|x-3|+1+2\ln 2, & \text{se} \quad <1\end{cases}.$$

Esercizio 3. *Sono dati la funzione $f(x,y)=xy^2+y\cos x-\pi+1$, il punto $P_0=(0,\pi)$ e il vettore $\vec{v}=(1,2)$. Si chiede:*

1. *di trovare, usando la definizione, la derivata di $f(x,y)$ nel punto P_0 secondo la direzione orientata individuata dal vettore $\vec{v}$.*

Il versore $\vec{u}$ di $\vec{v}$ è

$$\vec{u}=\left(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

L'equazione della retta di versore direttore $\vec{u}$, per P_0, è allora

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,t\\[2ex] y=\pi+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\,t\end{cases}$$

La funzione $g(t)=f(x(t),y(t))$ è data da

$$g(t)=\frac{1}{\sqrt{5}}\,t\left(\pi+\frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)^2+\left(\pi+\frac{2}{\sqrt{5}}\,t\right)\cos\frac{1}{\sqrt{5}}\,t-\pi+1\,.$$

La derivata in 0 fornisce il valore cercato della derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,\pi)=g'(0)=\frac{\pi^2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

2. *Detto $\vec{u}$ il versore di $\vec{v}$, di verificare che vale la formula*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,\pi)=\nabla(f)(0,\pi)\cdot\vec{u}\,.$$

Il calcolo delle due derivate parziali nell'origine è immediato e fornisce

$$\nabla f(0,\pi)=(\pi^2,1)\,.$$

Questo basta per concludere che vale la formula indicata.

Esercizio 1. *Sono dati i punti $P = (1, -2, 6)$ e $Q = (-1, 2, 4)$ e il piano α di equazione $3x + 2y + z - 5 = 0$. Si chiede:*

1. *di trovare l'equazione, in forma parametrica, dell'asse r del segmento PQ, appartenente al piano α.*

Il punto medio del segmento PQ è: $M = (0, 0, 5)$. Questo punto appartiene al piano α. Il vettore $\overrightarrow{PQ}$ ha componenti: $(-2, 4, -2)$. Il piano perpendicolare al segmento PQ e passante per M ha equazione: $-2(x - 0) + 4(y - 0) - 2(z - 5) = 0$, ovvero $x - 2y + z - 5 = 0$. L'equazione cartesiana della retta r è allora

$$\begin{cases} x - 2y + z - 5 = 0 \\ 3x + 2y + z - 5 = 0 \end{cases} .$$

Un vettore direttore della retta r si può trovare come prodotto vettoriale del due vettori normali ai due piani che individuano la retta r. Si ottiene, dopo semplificazione: $\vec{v}_r = (-2, 1, 4)$. L'equazione parametrica[3] della retta r è allora:

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 5 + 4t \end{cases} .$$

2. *Di trovare l'equazione, in forma cartesiana, dell'asse s del segmento PQ, perpendicolare a r.*

Un vettore direttore, $\vec{v}_s$, di s si può ottenere come prodotto vettoriale di $\vec{v}_r$ e del vettore $\overrightarrow{PQ}$. Dopo opportuna semplificazione, si ottiene $\vec{v}_s = (3, 2, 1)$. Le equazioni parametrica e cartesiana della retta s sono dunque:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \\ z = 5 + t \end{cases} , \qquad \begin{cases} x - 3z + 15 = 0 \\ y - 2z + 10 = 0 \end{cases} .$$

Esercizio 2. *Data la funzione definita da*

$$f(t) = \frac{t + 2}{|t + 2| + 1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

si consideri la funzione integrale, di punto iniziale -2, definita da

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t .$$

Si chiede:

1. *senza calcolare esplicitamente l'integrale, di dire se $F(x)$ è derivabile due volte in tutto $\mathbb{R}$ e, in caso affermativo, di calcolare $F''(-2)$.*

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$, la funzione F è derivabile su tutto $\mathbb{R}$, con derivata continua e data da

$$F'(x) = \frac{x + 2}{|x + 2| + 1} .$$

L'unico possibile punto di non derivabilità per F' è -2. Applichiamo la definizione di derivata:

$$\lim_{x \to -2} \frac{F'(x) - F'(-2)}{x + 2} = \lim_{x \to -2} \frac{\dfrac{x + 2}{|x + 2| + 1} - 0}{x + 2} = 1 .$$

2. *Di trovare l'insieme di tutte le primitive di $f(t)$.*

[3] Naturalmente c'erano anche altri modi per passare dall'equazione cartesiana a quella parametrica.

Poiché la funzione f è continua su tutto $\mathbb{R}$ (che è un intervallo), basta trovare una primitiva e poi aggiungere una costante. Una primitiva è la funzione integrale F sopra considerata. Si ha:

$$F(x) = \int_{-2}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{t+2}{t+3}\,\mathrm{d}t = t - \ln(t+3)\Big|_{-2}^{x}, & \text{se} \quad x \geq -2 \\ \displaystyle\int_{-2}^{x} \frac{t+2}{-t-1}\,\mathrm{d}t = -t - \ln|t+1|\Big|_{-2}^{x}, & \text{se} \quad x < -2 \end{cases},$$

ovvero

$$F(x) = \begin{cases} x - \ln(x+3) + 2, & \text{se} \quad x \geq -2 \\ -x - \ln|x+1| - 2, & \text{se} \quad < -2 \end{cases}.$$

Esercizio 3. *Sono dati la funzione $f(x,y) = xy^2 - y\cos x + \pi + 3$, il punto $P_0 = (0,\pi)$ e il vettore $\vec{v} = (-1,2)$. Si chiede:*

1. *di trovare, usando la definizione, la derivata di $f(x,y)$ nel punto P_0 secondo la direzione orientata individuata dal vettore $\vec{v}$.*

Il versore $\vec{u}$ di $\vec{v}$ è

$$\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

L'equazione della retta di versore direttore $\vec{u}$, per P_0, è allora

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\,t \\ y = \pi + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,t \end{cases}$$

La funzione $g(t) = f(x(t), y(t))$ è data da

$$g(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,t\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,t + \pi\right)^2 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\,t + \pi\right)\cos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,t\right) + \pi + 3.$$

La derivata in 0 fornisce il valore cercato della derivata direzionale:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,\pi) = g'(0) = -\frac{\pi^2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

2. *Detto $\vec{u}$ il versore di $\vec{v}$, di verificare che vale la formula*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,\pi) = \nabla(f)(0,\pi)\cdot\vec{u}.$$

Il calcolo delle due derivate parziali nell'origine è immediato e fornisce

$$\nabla f(0,\pi) = (\pi^2, -1).$$

Questo basta per concludere che vale la formula indicata.