Tema di Analisi I, 2° modulo, 21/02/2011

Luciano Battaia[(*)]

Università di Udine, Sede di Pordenone

Esercizio 1. *Sono date le rette*

$$r\colon \begin{cases} y-z-1=0 \\ x+2z-2=0 \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} y-z=0 \\ x+y-3=0 \end{cases}.$$

Si chiede:

1. *di provare che sono sghembe;*
2. *di trovare l'equazione del piano α per r e parallelo ad s;*
3. *di trovare l'equazione del piano β per s e parallelo ad r;*
4. *di trovare l'equazione del piano mediano della striscia individuata da α e β.*

Risoluzione. Le equazioni parametriche delle due rette date sono

$$r\colon \begin{cases} x=-2t+2 \\ y=t+1 \\ z=t \end{cases}, \qquad r\colon \begin{cases} x=-u+3 \\ y=u \\ z=u \end{cases},$$

aventi come punto in evidenza e vettore direttore rispettivamente

$$P_r=(2,1,0),\ \vec{v}_r=(-2,1,1) \quad \text{e} \quad P_s=(3,0,0),\ \vec{v}_r=(-1,1,1).$$

Se ne deduce subito che le due rette non sono parallele. Considerando il sistema costituito dalle 4 equazioni dei piani che individuano le due rette si vede anche subito che le rette non sono incidenti, dunque sono sghembe.

La determinazione dei piani α e β è immediata in forma parametrica: entrambi avranno come vettori di giacitura i vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, inoltre il primo passerà per P_r, il secondo per P_s. Il piano mediano avrà la stessa giacitura e passerà per il punto medio M di P_rP_s. Le tre equazioni in forma parametrica sono allora, rispettivamente,

$$\begin{cases} x=2-2t-u \\ y=1+t+u \\ z=t+u \end{cases}, \quad \begin{cases} x=3-2t-u \\ y=t+u \\ z=t+u \end{cases}, \quad \begin{cases} x=5/2-2t-u \\ y=1/2+t+u \\ z=t+u \end{cases}.$$

Esercizio 2. *Si consideri la funzione definita da*

$$f(x)=\int_0^{\pi^2-x^2} e^{\cos t}\,dt\,.$$

Se ne trovi il polinomio di Taylor di ordine 2, di punto iniziale $x_0=\pi$.

[*] http://www.batmath.it

Risoluzione. Si ha, intanto, $f(\pi) = 0$. Poi

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\cos(\pi^2 - x^2)}(-2x)\,, \quad f''(x) = -\mathrm{e}^{\cos(\pi^2-x^2)} - 2x\mathrm{e}^{\cos(\pi^2-x^2)}\big(-\sin(\pi^2 - x^2)\big)(-2x)\,,$$

da cui

$$f'(\pi) = -2\pi\mathrm{e}\,, \quad f''(\pi) = -2\mathrm{e}\,.$$

Il polinomio di Taylor richiesto è allora

$$T_{2,\pi}(x) = -2\pi\mathrm{e}(x - \pi) - e(x - \pi)^2\,.$$

Esercizio 3. *Siano date le funzioni*

$$g(x, y) = xy - 1$$

e

$$f = (f_1, f_2), \qquad \textit{con} \qquad f_1(x, y) = xy + \mathrm{e}^x \qquad \textit{e} \qquad f_2(x, y) = \sin x + \sin y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione composta $h = g \circ f$ sia a partire dall'espressione esplicita, che utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte.

Risoluzione. Lo schema per la composizione delle funzioni è il seguente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(f_1,f_2)} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & & (u,v) & & z \end{array}\,,$$

con

$$z = g(u, v) = uv - 1\,, \qquad \begin{cases} u = xy + \mathrm{e}^x \\ v = \sin x + \sin y \end{cases}\,.$$

La funzione composta è, in forma esplicita,

$$h(x, y) = g\big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = (xy + \mathrm{e}^x) \cdot (\sin x + \sin y) - 1\,.$$

Le derivate parziali di h si calcolano facilmente, ottenendo

$$\begin{aligned} h'_x(x, y) &= (y + \mathrm{e}^x)(\sin x + \sin y) + (xy + \mathrm{e}^x)(\cos x) \\ h'_y(x, y) &= x\,(\sin x + \sin y) + (xy + \mathrm{e}^x)(\cos y) \end{aligned}\,.$$

Applichiamo ora la regola di derivazione delle funzioni composte (utilizzabile in questo caso perché le funzioni componenti sono differenziabili).

$$g'_u(u, v) = v\,, \quad g'_v(u, v) = u\,,$$

$$\begin{array}{ll} u'_x(x, y) = f'_{1,x}(x, y) = y + \mathrm{e}^x & \quad u'_y(x, y) = f'_{1,y}(x, y) = x \\ v'_x(x, y) = f'_{2,x}(x, y) = \cos x & \quad v'_y(x, y) = f'_{2,y}(x, y) = \cos y \end{array}\,.$$

Si ha

$$h'_x(x, y) = v(x, y)\,(y + \mathrm{e}^x) + u(x, y)(\cos x) = (\sin x + \sin y)(y + \mathrm{e}^x) + (xy + \mathrm{e}^x)(\cos x)\,,$$

$$h'_y(x, y) = v(x, y)\,x + u(x, y)(\cos y) = (\sin x + \sin y)\,x + (xy + \mathrm{e}^x)(\cos y)\,,$$

in perfetto accordo con il risultato precedente.

Esercizio 1. *Sono date le rette*

$$r\colon \begin{cases} x+z+1=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}, \qquad s\colon \begin{cases} x+z=0 \\ y-z+3=0 \end{cases}.$$

Si chiede:

1. *di provare che sono sghembe;*
2. *di trovare l'equazione del piano α per r e parallelo ad s;*
3. *di trovare l'equazione del piano β per s e parallelo ad r;*
4. *di trovare l'equazione del piano mediano della striscia individuata da α e β.*

Risoluzione. Le equazioni parametriche delle due rette date sono

$$r\colon \begin{cases} x=t \\ y=2t-2 \\ z=-t-1 \end{cases}, \qquad r\colon \begin{cases} x=-u \\ y=u-3 \\ z=u \end{cases},$$

aventi come punto in evidenza e vettore direttore rispettivamente

$$P_r=(0,-2,-1),\ \vec{v}_r=(1,2,-1) \quad \text{e} \quad P_s=(0,-3,0),\ \vec{v}_r=(-1,1,1).$$

Se ne deduce subito che le due rette non sono parallele. Considerando il sistema costituito dalle 4 equazioni dei piani che individuano le due rette si vede anche subito che le rette non sono incidenti, dunque sono sghembe.

La determinazione dei piani α e β è immediata in forma parametrica: entrambi avranno come vettori di giacitura i vettori $\vec{v}_r$ e $\vec{v}_s$, inoltre il primo passerà per P_r, il secondo per P_s. Il piano mediano avrà la stessa giacitura e passerà per il punto medio M di P_rP_s. Le tre equazioni in forma parametrica sono allora, rispettivamente,

$$\begin{cases} x=t-u \\ y=-2+2t+u \\ z=-1-t+u \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=t-u \\ y=-3+2t+u \\ z=-t+u \end{cases}, \qquad \begin{cases} x=t-u \\ y=-5/2+2t+u \\ z=-1/2-t+u \end{cases}.$$

Esercizio 2. *Si consideri la funzione definita da*

$$f(x)=\int_x^{2x}(t+1)2^t\,\mathrm{d}t\,.$$

Si calcoli l'equazione della retta tangente al suo grafico nel punto $(1,f(1))$.

Risoluzione. Si ha, intanto,

$$f(1)=\int_1^2(t+1)2^t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{2^t t}{\ln 2}-\frac{2^t}{\ln^2 2}\right]_1^2=\frac{7\ln 2-2}{\ln^2 2}.$$

Per la derivata prima prima si ha poi

$$f(x)=\int_x^0(t+1)2^t\,\mathrm{d}t+\int_0^{2x}(t+1)2^t\,\mathrm{d}t=-\int_0^x(t+1)2^t\,\mathrm{d}t+\int_0^{2x}(t+1)2^t\,\mathrm{d}t\,,$$

da cui

$$f'(x)=-(x+1)2^x+(2x+1)2^{2x}2\,,\quad \text{da cui } f'(1)=20\,.$$

L'equazione della retta tangente è

$$y=f(1)+20(x-1)\,.$$

Esercizio 3. *Siano date le funzioni*

$$g(x, y) = xy - 1$$

e

$$f = (f_1, f_2), \qquad \text{con} \qquad f_1(x, y) = xy + \mathrm{e}^y \qquad \text{e} \qquad f_2(x, y) = \cos x + \cos y.$$

Calcolare le derivate parziali della funzione composta $h = g \circ f$ sia a partire dall'espressione esplicita, che utilizzando la regola di derivazione delle funzioni composte.

Risoluzione. Lo schema per la composizione delle funzioni è il seguente:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{(f_1,f_2)} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ (x,y) & & (u,v) & & z \end{array},$$

con

$$z = g(u, v) = uv - 1\,, \qquad \begin{cases} u = xy + \mathrm{e}^y \\ v = \cos x + \cos y \end{cases}.$$

La funzione composta è, in forma esplicita,

$$h(x, y) = g\big(f_1(x, y), f_2(x, y)\big) = (xy + \mathrm{e}^y) \cdot (\cos x + \cos y) - 1\,.$$

Le derivate parziali di h si calcolano facilmente, ottenendo

$$\begin{array}{l} h'_x(x, y) = y\,(\cos x + \cos y) + (xy + \mathrm{e}^y)(-\sin x) \\ h'_y(x, y) = (x + \mathrm{e}^y)(\cos x + \cos y) + (xy + \mathrm{e}^y)(-\sin y) \end{array}.$$

Applichiamo ora la regola di derivazione delle funzioni composte (utilizzabile in questo caso perché le funzioni componenti sono differenziabili).

$$g'_u(u, v) = v\,, \quad g'_v(u, v) = u\,,$$

$$\begin{array}{ll} u'_x(x, y) = f'_{1,x}(x, y) = y & u'_y(x, y) = f'_{1,y}(x, y) = x + \mathrm{e}^y \\ v'_x(x, y) = f'_{2,x}(x, y) = -\sin x & v'_y(x, y) = f'_{2,y}(x, y) = -\sin y \end{array}.$$

Si ha

$$h'_x(x, y) = v(x, y)\,y + u(x, y)(-\sin x) = (\cos x + \cos y)\,y + (xy + \mathrm{e}^y)(-\sin x)\,,$$

$$h'_y(x, y) = v(x, y)(x + \mathrm{e}^y) + u(x, y)(-\sin y) = (\cos x + \cos y)(x + \mathrm{e}^y) + (xy + \mathrm{e}^y)(-\sin y)\,,$$

in perfetto accordo con il risultato precedente.