Continuità e derivabilità

Indicazioni operative

Luciano Battaia*

Versione del 17 febbraio 2007

In questa nota propongo alcune indicazioni operative per controllare la continuità e derivabilità di funzioni elementari, o definite mediante funzioni elementari, reali di variabile reale.

Scopo di queste pagine è di fornire un aiuto concreto e, per quanto possibile, semplice agli studenti che si accingono ad affrontare la prova di matematica agli esami di stato, in particolare di liceo scientifico. Numerose note esplicative trattano problemi importanti relativi alle notazioni e alle convenzioni adottate comunemente nei testi e nei temi d'esame.

*http://www.batmath.it

Indice

1. Funzioni elementari

Le funzioni, reali di variabile reale, di uso più comune nelle applicazioni si usano chiamare *elementari*. È chiaro che non è possibile dare una definizione univoca di che cosa si intenda con "elementare"; un elenco abbastanza standard potrebbe essere il seguente[1], dove è indicato a fianco anche il *dominio naturale*:

1. i polinomi, di qualunque grado:

$$p_n(c) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,, \quad x \in \mathbb{R};$$

2. le funzioni razionali fratte, ovvero quozienti di polinomi:

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\text{zeri del denominatore}\}\,;$$

[1] Si tratta comunque di un elenco incompleto, per certi versi, e sovrabbondante per altri: alcune funzioni sono ripetute più volte. L'elenco è comunque proposto con scopi puramente didattici e tenendo conto del fatto che non ha grandissimo interesse teorico decidere se una funzione è, oppure no, elementare.

3. le funzioni radice:

$$f(x)=\sqrt[n]{x}\,,\quad x\geq 0,\ \text{se } n \text{ pari},\quad x\in\mathbb{R},\ \text{se } n \text{ dispari}^{2};$$

4. le funzioni potenza con:
   — esponente intero positivo: $f(x)=x^n\,,\ n\in\mathbb{N}\,,\ n>0\,,\quad x\in\mathbb{R}$;
   — esponente intero negativo: $f(x)=x^n\,,\ n\in\mathbb{Z}\,,\ n<0\,,\quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$;
   — esponente reale[3] non intero, positivo $f(x)=x^\alpha\,,\ \alpha>0\,,\quad x\geq 0$;
   — esponente reale non intero, negativo $f(x)=x^\alpha\,,\ \alpha<0\,,\quad x>0$;
5. le funzioni esponenziali e logaritmo, in qualunque base:

$$f(x)=\exp_a(x)=a^x\,,\quad x\in\mathbb{R}\,;\qquad f(x)=\log_a(x)=\log_a x\,,\quad x>0\,,$$

[2] È da segnalare che le funzioni radice di indice dispari si ritengono usualmente definite anche per $x<0$; bisogna però prestare la massima attenzione in questo caso, in quanto non valgono le usuali proporietà dei radicali. In particolare, per esempio,

$$\sqrt[6]{x^2}\neq\sqrt[3]{x}\,,\ \text{mentre è corretto dire che } \sqrt[6]{x^2}=\sqrt[6]{|x|^2}=\sqrt[3]{|x|}\,.$$

si veda anche la successiva nota 3

[3] Le potenze con esponente razionale potrebbero, almeno in certi casi, essere definite anche per basi negative: è questo il caso, per esempio, di esponenti del tipo $1/3$. Questo porterebbe però a complicazioni come quella evidenziata dal ragionamento che segue.

Poiché, evidentemente, $1/3=2/6$, si deve avere:

$$-1=(-1)^{1/3}=(-1)^{2/6}=\left((1)^2\right)^{1/3}=1\,,$$

cosa palesemente impossibile.

Per questo, e simili, motivi abitualmente si rinuncia a definire potenze con base negativa ed esponente frazionario, ma la convenzione non è universale, per cui in occasione di un esame è sempre bene accertarsi di quali siano le convenzioni adottate.

in particolare le funzioni esponenziali e logaritmo di base "e", dette semplicemente *funzione esponenziale* e *funzione logaritmo naturale*[4]

$$f(x) = \exp(x) = \mathrm{e}^x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,; \qquad f(x) = \ln(x) = \ln x\,, \quad x > 0\,;$$

6. le funzioni trigonometriche e le loro inverse, tra cui principalmente:
   - $f(x) = \sin x\,, \quad x \in \mathbb{R}$;
   - $f(x) = \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}$;
   - $f(x) = \tan x = \operatorname{tg} x\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   - $f(x) = \cot x = \operatorname{ctg} x\,, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$;
   - $f(x) = \arcsin x\,, \quad -1 \le x \le 1$;
   - $f(x) = \arccos x\,, \quad -1 \le x \le 1$;
   - $f(x) = \arctan x = \operatorname{arctg} x\,, \quad x \in \mathbb{R}$;
   - $f(x) = \operatorname{arccot} x = \operatorname{arcctg} x\,, \quad x \in \mathbb{R}$;
7. la funzione valore assoluto:

$$f(x) = \operatorname{abs}(x) = |x| = \sqrt{x^2}\ :$$

8. le funzioni che si ottengono mediante somme, sottrazioni, prodotti, quozienti delle precedenti;

[4]Si tenga presente che la nomenclatura utilizzata per le funzioni logaritmo non è universale, e precisamente alcuni indicano con $\log x$, senza indicazione di base, o con $\lg x$, il logaritmo in base 10 di x e con $\ln x$ il logaritmo in base e, come ho fatto qui, altri indicano con $\operatorname{Log} x$ il logaritmo in base 10 di x e con $\log x$, senza indicazione di base, il logaritmo in base e. La quasi totalità dei software di calcolo simbolico e di calcolatrici tascabili segue la prima convenzione, che è quella ufficiale della normativa ISO; negli esami di stato si usa di solito la seconda, ma, almeno nella prova del 2006, era data esplicita indicazione del significato della notazione usata, cosa che mi pare assolutamente corretta e tale da evitare equivoci. In caso di dubbio è comunque sempre opportuno chiedere delucidazioni.

9. le funzioni che si ottengono componendo (ove possibile) le precedenti;
10. le funzioni che si ottengono prendendo (ove possibile, e con opportune convenzioni), le inverse delle precedenti.

2. Problemi sul dominio naturale

Purtroppo le funzioni dell'elenco precedente, a dispetto del loro nome, non hanno un comportamento sempre *elementare*, e si trovano alcune "sorprese" già nell'esame del dominio naturale delle funzioni composte.

Propongo alcuni esempi per chiarire il significato dei questa affermazione.

Esempio 1.
La funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2(x-1)}$$

ha come dominio naturale $\{0\} \cup [1, +\infty[$, *e* non *coincide con la funzione*

$$f(x) = |x|\sqrt{x-1}$$

che ha invece come dominio naturale $[1, +\infty[$. *Dunque, almeno in questo caso, non si può* portare fuori *dalla radice* x^2, *nemmeno mettendoci il modulo!*

Esempio 2.
La funzione

$$f(x) = \arcsin(x^2 + 1)$$

ha il dominio costituito solo *dal punto* 0.

Esempio 3.
La funzione

$$f(x) = \sqrt{\sin x - 1}$$

ha come dominio i punti $\{\pi/2 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Esempi particolarmente complessi si possono costruire con le funzioni potenza.

Esempio 4.

$$f(x) = x^x$$

ha come dominio $\{x \in \mathbb{Z},\ x < 0\} \cup]0, +\infty[$.

Esempi come quelli dell'ultimo tipo sono poco interessanti dal punto di vista delle applicazioni, tanto che, normalmente, trattando funzioni potenza con basi ed esponenti variabili, si assume che la base sia strettamente positiva, per poter usare l'importantissima *formula di cambiamento di base*:

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\ln\left(f(x)\right)} .$$

Come si può vedere dagli esempi proposti, le difficoltà si manifestano quando ci mettono lo zampino le funzioni radice (o quelle potenza) e le funzioni arcseno e arccoseno. Si trovano le stesse difficoltà relativamente a funzioni di questo tipo anche con i problemi legati alla derivabilità.

3. Continuità

Tutte le funzioni elementari dell'elenco precedente sono *continue* in *tutto il loro dominio naturale*. Anzi uno dei paletti che potrebbero essere posti al concetto di funzione elementare è proprio quello di inserirvi solo funzioni ovunque continue. Per questo non vi ho inserito, anche se qualcuno lo fa, funzioni molto importanti e usate nella pratica come le due seguenti:

1. la funzione *signum*, definita da

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases} , \qquad x \in \mathbb{R} ,$$

   palesemente non continua nell'origine;

2. la funzione *parte intera*, *floor function*, definita da

$$\operatorname{ent}(x) = \lfloor x \rfloor = \text{il più grande intero minore o uguale a } x , \qquad x \in \mathbb{R}$$

   palesemente non continua in corrispondenza di ogni x intero.

Attenzione!

Sul concetto di funzione continua non ci sono problemi di nomenclatura nei vari autori:

> Una funzione si dice *continua* in un punto c del *suo dominio* se
>
> c è isolato nel dominio,
>
> oppure
>
> c è di accumulazione per il dominio e inoltre $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

In questa definizione sono richieste *tre* condizioni:

1. una preliminare, senza la quale il concetto di continuità non si può nemmeno porre:

il punto c *deve* appartenere al dominio;

2. il fatto che il limite della funzione, per x tendente a c, esista finito;
3. il fatto che questo limite sia *esattamente uguale* al valore che la funzione prende nel punto c.

Risulterebbe evidente, da quanto detto, che in un punto c non appartenente al dominio, una funzione non può essere né *continua* nè *non continua*. Il termine in uso per funzioni non continue in un punto è quello di *funzione discontinua*. Purtroppo le convenzioni adottate a questo proposito non sono uniformi e si possono riassumere nelle due che seguono.

1^a **definizione di discontinuità** Una funzione si dice discontinua in un punto c del suo dominio se il limite della funzione, per x tendente a c, o non esiste, oppure, se esiste, è infinito, o è diverso dal valore della funzione in c. È questa la definizione più logica, alla quale mi attengo, e che viene adottata dalla quasi totalità dei testi universitari.

2^a **definizione di discontinuità** Una funzione si dice discontinua in un punto $c \in \mathbb{R}$ se

1. c non appartiene al dominio, ma è di accumulazione per il dominio;
2. c appartiene al dominio, ma il limite della funzione, per x tendente a c, o non esiste, oppure, se esiste, è infinito, o è diverso dal valore della funzione in c.

Si tratta di una differenza di non poco conto, soprattutto ai fini delle risposte da dare in un tema d'esame di stato[5]. Per esempio, seguendo la prima definizione, la

[5] Si deve tenere presente che, in un esame universitario, l'esaminatore è il docente responsabile del corso e che spesso ha anche scritto il testo in uso, e quindi è facile fare riferimento alle convenzioni adottate. Non così in un esame di stato di scuola media superiore, dove il compito proviene dal Ministero (e a volte contiene errori!), e quindi deve necessariamente fare riferimento ad una

funzione $f(x) = {}^1\!/_x$ è ovunque continua (in 0, come dice il prof. Mario Dolcher non è né continua, né discontinua, semplicemente *non c'è*), mentre presenta una discontinuità seguendo la seconda definizione. Per risolvere il problema alla radice e salvare capra e cavoli, userei una diversa nomenclatura, e precisamente parlerei di discontinuità nel caso precisato dalla prima definizione (su cui tutti concordano), di *singolarità* nel caso di un punto c che sia di accumulazione per il dominio della funzione, ma che non appartenga al dominio (su cui invece non c'è uniformità di nomenclatura).

Osservazione

Quando le composte di funzioni elementari hanno punti isolati nel loro dominio, come negli esempi proposti precedentemente, non ci sono problemi per quanto riguarda la continuità, perché nei punti isolati le funzioni sono automaticamente continue.

4. Derivabilità

Purtroppo le funzioni elementari dell'elenco precedente, pur sempre continue, nel senso precisato, nel loro dominio naturale, non sono ivi sempre derivabili, anche se la

situazione "di media nazionale"; inoltre il docente che valuta l'elaborato è spesso un docente non conosciuto dallo studente. Anche se, ovviamente, rientra nella professionalità dei docenti il tenere conto di queste situazioni, in caso di contestazioni non è facile per uno studente sostenere con convinzione la propria tesi.

A titolo d'esempio riporto un'esperienza personale. Ho l'abitudine, presa da uno dei miei maestri, e che ritengo corretta, di scrivere gli integrali senza usare il dx. Nonostante mi premuri sempre di avvisare gli allievi sul fatto che alcuni *pretendono* notazioni più *classiche*, un anno la quasi totalità degli studenti usò il simbolo incriminato: non l'avessero mai fatto, per tutto il periodo degli esami il collega punzecchiò gli studenti su questo fatto, senza preoccuparsi se fosse un errore degli stessi, o piuttosto una questione di diversa impostazione da parte del docente.

non derivabilità è un'eccezione e si manifesta solo in pochi punti di alcune funzioni. Le eccezioni che interessano ai fini delle applicazioni sono quelle che seguono.

1. Le funzioni radice hanno lo zero nel loro dominio naturale, sia quelle di indice pari (dove lo zero è "sul bordo sinistro" del dominio, sia quelle di indice dispari, dove invece lo zero è punto interno al dominio. Queste funzioni invece non sono derivabili in 0, in quanto in questo punto hanno una *tangente verticale*. (Si usa dire che hanno derivata infinita, ma che non sono derivabili, riservando, di norma, l'aggettivo *derivabile* al caso che la derivata *esista e sia finita*). È questo il motivo per cui la funzione valore assoulto, pur se composta di funzioni elementari (la funzione radice quadrata e la funzione potenza di esponente 2), non è derivabile (nell'origine).
2. Le funzioni potenza ad esponente non intero, compreso tra 0 e 1, hanno lo zero nel loro dominio naturale, mentre non sono derivabili in zero, esattamente come le funzioni radice.
3. Le funzioni arcseno e arccoseno hanno dominio $-1 \leq x \leq 1$, mentre sono derivabili solo in $-1 < x < 1$, in quanto agli estremi hanno *tangente verticale*.

Naturalmente se le funzioni hanno punti isolati, non si porrà nemmeno il problema della derivabilità.

Le particolarità elencate sono all'origine di alcuni comportamenti "anomali", spesso presenti nei temi d'esame. Ne propongo alcuni, a titolo d'esempio.

Esempio 5.
Valuta la derivabilità della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x}\,.$$

Per $x \neq 0$ si ha, facilmente,

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\,,$$

mentre per $x = 0$ la derivata diventa infinita, come si verifica subito facendo il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty\,.$$

La funzione ha, nell'origine, un *flesso verticale ascendente.*

Esempio 6.
Valuta la derivabilità della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,.$$

Per $x \neq 0$ si ha, facilmente,

$$f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\,,$$

mentre per $x = 0$, con calcoli sostanzialmente analoghi al caso precedente, si trova che la derivata sinistra vale $-\infty$ e quella destra $+\infty$. La funzione ha, nell'origine, una *cuspide con minimo.*

Esempio 7.
Valuta la derivabilità della funzione

$$f(x) = \arcsin(1-x^2)\,.$$

La funzione ha dominio $-\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2}$ ed è la composta tra la funzione $g(x) = 1-x^2$, sempre derivabile, e la funzione $h(x) = \arcsin x$, non derivabile (a destra) in -1 e (a sinistra) in 1, dove ha derivata (destra e, rispettivamente, sinistra) $+\infty$. Nulla si potrà dunque dire sulla derivabilità della composta in $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{2}$, che sono i punti che hanno come immagine, rispettivamente, 1 e -1 nella funzione $g(x) = 1-x^2$. Un calcolo immediato mostra che la derivata di $f(x)$, per $x \ne 0 \wedge x \ne \pm 1$ è:

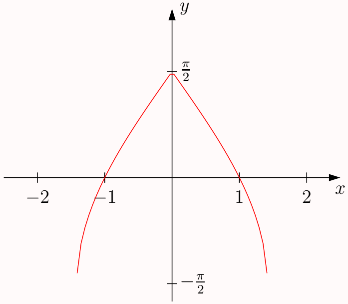
$$f'(x) = \frac{-2x}{\sqrt{2x^2 - x^4}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}}\,.$$

Per $x = 0$ si ha poi

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(1 - x^2) - \pi/2}{x - 0} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{|x|\sqrt{2 - x^2}} = \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se} \quad x \to 0^- \\ -\sqrt{2} & \text{se} \quad x \to 0^+ \end{cases}.$$

Un calcolo analogo mostra che in $x = \pm\sqrt{2}$ la derivata vale, rispettivamente, $\pm\infty$. Dunque in 0 la funzione non è derivabile e presenta un punto angoloso con tangente sinistra di coefficiente angolare $\sqrt{2}$ e tangente destra di coefficiente angolare $-\sqrt{2}$. In $x = \pm\sqrt{2}$ la funzione non è ugualmente derivabile e ha derivata (sinistra e destra rispettivamente) $\pm\infty$.

Per completezza riporto qui a fianco il grafico della funzione



Per valutare la derivabilità di una funzione in un punto occorrerebbe sempre utilizzare la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale (arrivando molto spesso all'applicazione della regola di l'Hôpital). Tuttavia spesso è di grande utilità il risultato seguente, che va applicato con le dovute cautele, ma che, nella pratica, funziona in oltre il 95% dei casi. Lo enuncio in maniera abbastanza informale, ma utile per le applicazioni.

Teorema sul limite della derivata

Supponiamo di avere una funzione di cui dobbiamo valutare la derivabilità in un punto c, mentre sappiamo che è derivabile in tutto un intorno di c (anche solo intorno sinistro o destro). Allora

1. valutiamo preventivamente se la funzione è o no continua in c: se non è continua, a fortiori non può essere derivabile, se è continua procediamo con il punto successivo;
2. calcoliamo la derivata per tutti gli x di un intorno di c;
3. calcoliamo i limiti di questa derivata, per x tendente a c, da sinistra e da destra (se ci sono entrambe le possibilità):

   $$\lim_{x\to c^-} f'(x)\,, \quad \lim_{x\to c^+} f'(x)\,,$$

   e teniamo conto che,

   — se entrambi i limiti non esistono (né finiti né infiniti) allora *nulla* si può dire circa la derivabilità della funzione (caso rarissimo nelle applicazioni);

   — se almeno uno dei due limiti esiste, finito o infinito, allora esso rappresenta il coefficiente angolare della tangente (sinistra o destra) al grafico della funzione e questo ci permette di concludere con il comportamento della funzione; in particolare se i due limiti sono finiti e uguali la funzione è derivabile.

5. Funzioni definite a tratti

Il modo più semplice per costruire funzioni non elementari è quello delle funzioni definite a tratti ("piecewise defined" in inglese, e dunque nei software di calcolo simbolico), come l'esempio della funzione signum dato sopra.

In sostanza si considerano vari intervalli di $\mathbb{R}$, spesso adiacenti negli esercizi proposti agli esami, e si definisce una funzione dando una "regola" diversa per ognuno degli intervalli, e di solito una regola presa dalle funzioni elementari. Sull'interno di ognuno degli intervalli dunque non ci saranno problemi di continuità, e quasi mai di derivabilità (a meno che l'estensore dei quesiti d'esame non voglia proprio fare la carogna), e i problemi, sia di continuità che di derivabilità, si presenteranno in corrispondenza degli estremi di questi intervalli, che costituiscono "punti di saldatura" tra le varie espressioni. È questo il tipo di problemi normalmente presente nei quesiti d'esame.

Chiarirò il concetto con un esempio.

Esempio 8.
Studiare la continuità e derivabilità della funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ x^2-1 & -1 < x \leq 0 \\ -\cos x & 0 < x < 1 \\ \ln x & x \geq 1\,. \end{cases}$$

All'interno di ognuno degli intervalli $]-\infty,-1[$, $]-1,0[$, $]0,1[$, $]1,+\infty[$, la funzione è banalmente continua e derivabile perché (in un intorno di ciascuno dei punti interni a questi intervalli) coincide con una funzione continua e derivabile. Resta da esaminare che cosa succede nei "punti di saldatura": $\{-1,0,1\}$.

Intanto si ha: $f(-1)=0$, $f(0)=-1$, $f(1)=0$. Poi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} x+1 = 0 & ; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} x^2-1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2-1 = -1 & ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} -\cos x = -1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} -\cos x = -\cos 1 & ; \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \ln x = 0 \end{cases}$$

Dunque nei punti -1 e 0 si ha “perfetta saldatura”, nel punto 1 no, e si avrà una discontinuità *a salto*.

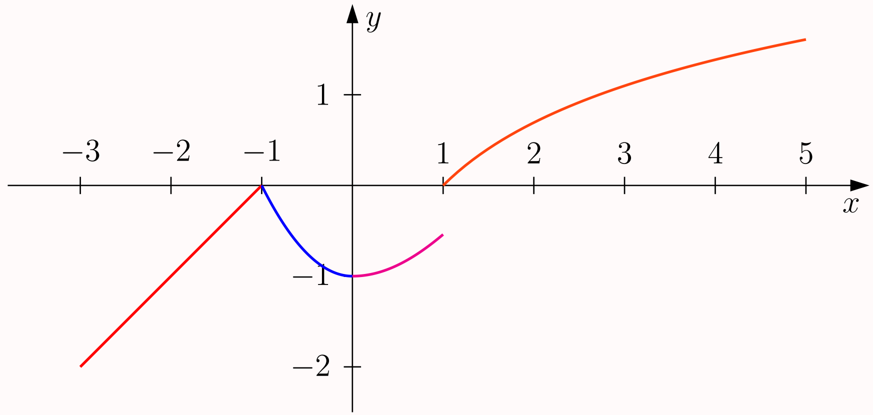
Veniamo ora alla derivabilità (naturalmente solo in -1 e 0). Calcoliamo intanto la derivata fuori dai punti di saldatura.

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 2x & -1 < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < 1 \\ {}^1\!/_x & x > 1 \end{cases} .$$

Si ha poi

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 1 = 1 & ; \quad \lim\limits_{x\to -1^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} 2x = -2 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2x = 0 & ; \quad \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sin x = 0 \end{cases}$$

Allora nel punto di ascissa -1 non si ha “saldatura delle tangenti”, e la funzione ha un punto angoloso; invece nel punto di ascissa 0 anche le tangenti si saldano perfettamente e la funzione è “liscia”, ovvero senza spigoli (in particolare ha un minimo relativo, ma non è questo che conta). Per completezza riporto anche il grafico della funzione.



6. Esercizi

Esercizio 1.
Sia data la funzione

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x} & x\leq 0\\ xe^{ax}+b & x>0\end{cases}.$$

Trovare i valori delle costanti reali a e b affinché la funzione sia continua e derivabile in tutto $\mathbb{R}$.

Cominciamo con la continuità, che è ovvia fuori dal punto 0, mentre nel punto 0 si ha:

$$f(0)=1\,,\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1\,,\quad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} xe^{ax}+b=b\,.$$

Dunque la funzione è continua in 0 se, e solo se, $b=1$.

Cerchiamo ora la derivabilità nell'origine (fuori dall'origine è ovvia).

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & x < 0 \\ \mathrm{e}^{ax} + ax\mathrm{e}^{ax} & x > 0 \end{cases} .$$

Per ogni a il limite sinistro e destro della derivata, per x tendente a 0 vale 1, da cui la conclusione che la funzione è continua e derivabile per $a \in \mathbb{R}$ e $b = 1$.

Anche se non richiesto esplicitamente dal testo, si potrebbe controllare l'esistenza della derivata seconda in 0. Proviamo a fare la derivata seconda per $x \neq 0$. Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3} & x < 0 \\ 2a\mathrm{e}^{ax} + a^2x\mathrm{e}^{ax} & x > 0 \end{cases} .$$

Se ne deduce subito, nel modo ormai usuale, che la funzione ha derivata seconda nell'origine se, e solo se, $a = 1$.

Esercizio 2.
Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} .$$

Si provi che esiste il

$$\lim_{x \to 0} f'(x) ,$$

ma che la funzione non è derivabile. Si dia una giustificazione di questo fatto.

Per $x \neq 0$ si ha

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,.$$

Per calcolare il limite della derivata si può usare la regola di l'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \overset{H}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x} = 0\,.$$

Il limite della derivata vale dunque 0, ma la funzione non può essere derivabile, in quanto non continua (è ben noto che il limite della funzione, per x tendente a 0 è 1, mentre secondo la posizione del testo $f(0) = 0$).

Esercizio 3.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Si provi che la funzione è derivabile per $x = 0$, ma che non esiste il limite della derivata per x tendente a zero. Si dia una giustificazione di questo fatto. (In un certo senso, questo esercizio può essere pensato come "l'inverso" del precedente).

Che la funzione sia derivabile discende immediatamente dalla definizione:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0\,.$$

Calcoliamo ora la derivata, per $x \neq 0$:

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\,,$$

ed è subito visto che il limite di questa derivata non può esistere, in quanto il primo addendo tende a zero, mentre il secondo oscilla indefinitamente tra -1 e 1, in ogni intorno di zero. La giustificazione di questo sta nel fatto che il teorema sul limite della derivata non si può applicare in questo caso.

Attenzione

Invito a riguardare con attenzione i due esercizi precedenti, il cui risultato si può così compendiare:

— solo per una funzione continua l'esistenza del limite della derivata garantisce la derivabilità;

— viceversa la non esistenza del limite della derivata non permette di concludere nulla circa la derivabilità (si riveda il *Teorema sul limite della derivata* a pagina 13).

Esercizio 4.

Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ae^x + b\cos x + cx + d & x \geq 0 \\ x^2 + 1 & x < 0 \end{cases} .$$

Si trovino i valori delle costanti reali a, b, c, d, *affinché la funzione abbia le derivate fino all'ordine* 3*. Si dica se la funzione così trovata ha anche derivata quarta.*

Calcoliamo, intanto, le derivate fino alla 3^a fuori dall'origine (dove la funzione è sicuramente derivabile).

$$f'(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^x - b\sin x + c & x > 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}, \quad f''(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^x - b\cos x & x > 0 \\ 2 & x < 0 \end{cases},$$

$$f'''(x) = \begin{cases} a\mathrm{e}^x + b\sin x & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

La funzione, per avere tutte le derivate fino alla terza, deve essere continua e avere (continue) le derivate prima, seconda e, appunto terza. Con le tecniche ormai usuali si trovano le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} a + b + d = 1 \\ a + c = 0 \\ a - b = 2 \\ a = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di 4 equazioni in 4 incognite, di primo grado, che ha l'unica soluzione $a = 0$, $b = -2$, $c = 0$, $d = 3$. Per questi valori la derivata terza diventa:

$$f'''(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases},$$

ed è immediato provare che non esiste la derivata quarta.