Campo elettrico vs. campo magnetico

Luciano Battaia*

Versione del 1 aprile 2007

Questo fascicolo contiene uno schema dell'introduzione dei concetti fondamentali relativamente al campo elettrico e al campo magnetico, fatta, per quanto possibile, in parallelo per mettere a confronto analogie e differenze. Si tratta di una presentazione adatta ad un riepilogo generale, non utilizzabile per uno studio iniziale, e non contenente molti dei risultati che sono invece essenziali per una accurata comprensione del campo elettromagnetico.

In particolare la successione degli argomenti non è sequenziale, ma fatta con il preciso scopo di facilitare la schematizzazione dei concetti fondamentali. Inoltre non sono mai proposte dimostrazioni o giustificazioni dei vari risultati presentati.

Naturalmente non sempre è possibile trattare in parallelo i fenomeni elettrici e magnetici che presentano, accanto a numerose analogie, parecchie specificità. Inoltre, nel trattare i campi non statici è praticamente impossibile separare i fenomeni elettrici da quelli magnetici: per questo motivo, nell'ottica con cui sono scritte queste pagine, la trattazione dei campi non statici è appena accennata e limitata ad alcune situazioni in cui il parallelismo risulta più evidente. Per lo stesso motivo non sono considerati i concetti di potenziale elettrico e di corrente elettrica.

Indice

*http://www.batmath.it

Parte I - Campi statici

1 Introduzione

L'elettrostatica è lo studio delle interazioni tra cariche elettriche ferme, la magnetostatica è lo studio delle interazioni tra magneti fermi o tra correnti continue. Vista la difficoltà di una trattazione quantitativa, a livello elementare, delle proprietà dei magneti permanenti, abitualmente si trattano solo le interazioni tra correnti.

Nel caso dell'elettrostatica solitamente si introduce prima il concetto di forza e poi quello di campo, nel caso della magnetostatica si procede invece in senso opposto. Per questioni di confronto sceglieremo, in questo riepilogo, il secondo approccio in entrambi i casi.

Come si vedrà, in molti casi la trattazione del campo magnetico è più complessa che non quella del campo elettrico.

2 Gli oggetti elementari delle interazioni

Gli oggetti elementari delle interazioni elettriche sono le cariche puntiformi, positive o negative.

Gli oggetti elementari delle interazioni magnetiche sono gli "aghi magnetici", tratti "infinitamente piccoli" di fili percorsi da corrente, oppure cariche (puntiformi) in moto. A livello elementare la trattazione degli aghi magnetici, per fini quantitativi, è difficile, per cui ci limiteremo solo a correnti o cariche in moto.

Si deve subito notare la profonda differenza fra le due situazioni.

Nel caso elettrico gli oggetti base possono essere schematizzati con punti.

Nel caso magnetico gli oggetti base sono o tratti di filo percorsi da corrente o cariche, magari puntiformi, ma *in moto*, e quindi essenzialmente oggetti non puntiformi.

Questa differenza di comportamenti è legata a risultati sperimentali completamente diversi nel caso elettrico rispetto a quello magnetico.

È possibile separare le cariche elettriche positive da quelle negative.

Non è possibile separare i poli magnetici Nord dai poli magnetici Sud: in ogni "oggetto magnetico" sono sempre presenti entrambi i poli.

3 I campi

Un campo vettoriale è una funzione definita in un'opportuna regione dello spazio, e che associa ad ogni punto P dello spazio un vettore $\boldsymbol{w}(P)$. Abitualmente si scrive $\boldsymbol{w}_P$, anzichè $\boldsymbol{w}(P)$. Il campo elettrico si indica con $\boldsymbol{E}$, quello magnetico con $\boldsymbol{B}$. Per definire i campi dovremo allora posizionarci in un punto P con un rivelatore ("spia") e misurare gli effetti prodotti su di esso dalle sorgenti, che, in questa fase, non serve precisare (salvo la condizione che se sono cariche o magneti devono essere fermi, se sono correnti devono essere continue). La definizione di campo elettrico può procedere in maniera semplice, introducendo con una sola formula sia il modulo che la direzione e il verso. La definizione di campo magnetico è più complessa e richiede preventivamente una separata definizione della direzione del campo stesso e, successivamente, la definizione del suo modulo e verso.

Posizionata nel punto P una carica elettrica puntiforme $\mathrm{d}q$, di qualunque segno e "infinitamente piccola", essa subirà, da parte delle cariche sorgenti, una azione misurabile da un forza $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_P$.

Si chiama campo elettrico nel punto P il vettore così definito:

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}_P}{\mathrm{d}q}\,.$$

Risulta chiaro dalla definizione che il vettore $\boldsymbol{E}$ è parallelo alla forza (anche equiverso se la carica rivelatrice è positiva).

Nel caso di un carica puntiforme non infinitesima, q, la formula diventa:

$$\boldsymbol{E}_P = \frac{\boldsymbol{F}_P}{q}\,.$$

Definiamo preventivamente la direzione di $\boldsymbol{B}$ in un generico punto P. Possiamo operare in due modi, tra di loro equivalenti. Posizioniamo in P un ago magnetico completamente libero di ruotare in tutte le direzioni attorno al suo baricentro: la direzione di $\boldsymbol{B}$ sarà quella lungo la quale l'ago rimane in equilibrio. Oppure facciamo passare per P una carica $\mathrm{d}q$ con una velocità $\boldsymbol{v}$: sperimentalmente si osserva che esiste sempre una ben precisa direzione per $\boldsymbol{v}$ lungo la quale la carica non subisce alcuna influenza da parte delle sorgenti del campo; questa sarà la direzione di $\boldsymbol{B}$.

A questo punto facciamo passare per P una carica $\mathrm{d}q$, con una velocità $\boldsymbol{v}$ diversa dalla precedente e misuriamo la forza $\mathrm{d}\boldsymbol{F}_P$ a cui risulta sottoposta.

Si chiama campo magnetico nel punto P l'unico vettore soluzione dell'equazione:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_P = \mathrm{d}q\,\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}\,.$$

Risulta chiaro dalla definizione che il vettore $\boldsymbol{B}$ è perpendicolare alla forza (oltreché alla velocità).

Il modo più semplice di disporre di cariche in moto è quello di considerare fili percorsi da corrente. Per questo motivo, al posto della carica $\mathrm{d}q$ in moto con velocità $\boldsymbol{v}$, si può considerare come rivelatore un tratto $\mathrm{d}l$ di filo percorso da corrente i. La definizione di campo magnetico si può anche dare con la formula

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}_P = i\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{B}\,,$$

ove $i\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ sostituisce $\mathrm{d}q\,\boldsymbol{v}$ ($\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ è un vettore parallelo al filo e con il verso della corrente).

Nel caso di un lungo filo rettilineo percorso da corrente continua i, la formula diventa

$$\boldsymbol{F}_P = i\,\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{B}\,.$$

purchè, però, lungo tutto il filo il campo magnetico sia uniforme.

4 Le leggi fondamentali

Le leggi sperimentali fondamentali esprimono i campi generati dalle sorgenti più semplici possibile: una carica $\mathrm{d}q$ nel caso elettrico e una carica $\mathrm{d}q$ in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ oppure un tratto $\mathrm{d}l$ di filo percorso da corrente i nel caso magnetico. Quello che si vuole calcolare è il campo prodotto in un punto P dello spazio: indicheremo in entrambi i casi con $\boldsymbol{r}$ il vettore che ha origine nella sorgente (carica, eventualmente in moto, o tratto infinitesimo di filo percorso da corrente) e termine nel punto P.

In un certo senso si può dire che queste formule (sperimentali) costituiscono le simmetriche delle formule precedenti: mentre prima le cariche o le correnti erano gli oggetti dell'azione da parte di sorgenti non meglio precisate, ora esse sono le sorgenti di azioni su oggetti che non interessa qui precisare.

La legge di Coulomb

$$\mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\boldsymbol{r}\,.$$

La legge di Biot-Savart

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{i\ \mathrm{d}\boldsymbol{l}\wedge\boldsymbol{r}}{r^3}\,,$$

oppure

$$\mathrm{d}\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}q\,\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{r}}{r^3}\,.$$

Si noti che, in entrambi i casi, si ha una inversa proporzionalità al quadrato della distanza: si tratta di una proprietà comune ai due campi (e anche al campo gravitazionale) e di una legge frequente in fisica.

5 Le linee di forza

La rappresentazione grafica di un campo vettoriale mediante linee di forza o (meglio) linee di campo è uno strumento molto potente per trattare i fenomeni relativi.

Le linee di forza del campo elettrico hanno sempre origine sulle cariche positive (*sorgenti*) e termine sulle cariche negative (*pozzi*).

Le linee di forza del campo magnetico sono sempre *linee chiuse*, e questo fatto è la traduzione in formule dell'inesistenza del monopòlo magnetico.

6 Le equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell costituiscono le equazioni fondamentali dell'elettromagnetismo. Restando nel caso statico esse si riducono a formulazioni particolarmente semplici e, in particolare, le equazioni relative al campo elettrostatico sono *completamente separate* rispetto a quelle del campo magnetostatico.

Le equazioni si riferiscono, rispettivamente, al flusso attraverso una superficie chiusa e orientata verso l'esterno (flusso uscente), $\Phi_{Sch}(\boldsymbol{E})$, $\Phi_{Sch}(\boldsymbol{B})$, e alla circuitazione lungo un percorso chiuso e orientato, $\mathcal{C}(\boldsymbol{E})$, $\mathcal{C}(\boldsymbol{B})$. I teoremi relativi al flusso prendono anche il nome di *Teoremi di Gauss*, quello relativo alla circuitazione nel campo magnetico prende il nome di *Teorema di Ampére*.

$$\Phi_{Sch}(\boldsymbol{E}) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{E}) = 0$$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{B}) = \mu_0 \sum i_{conc}$$

$$\Phi_{Sch}(\boldsymbol{B}) = 0$$

Le equazioni del flusso per il campo elettrico e della circuitazione per il campo magnetico costituiscono le due equazioni fondamentali (potrebbero essere usate in sostituzione delle leggi di Coulomb e Biot-Savart rispettivamente). Le leggi della circuitazione per il campo elettrico e del flusso per il campo magnetico esprimono in formule una proprietà fondamentale per ciascuno dei campi: il campo elettrico è conservativo, nel campo magnetico non esistono monopòli.

La dimostrazione dei teoremi del flusso per il campo elettrico e della circuitazione per il campo magnetico si possono fare, a livello elementare, in maniera sostanzialmente analoga, considerando un caso particolarmente semplice di campo e di superficie chiusa nel primo caso, di campo e di linea chiusa nel secondo.

Nel caso elettrico la situazione che permette una agevole verifica del teorema di Gauss è quella del campo prodotto da una sola carica puntiforme (campo radiale), se si prende come superficie di calcolo una superficie che coincida con una delle superfici equipotenziali: in questo modo il campo ha modulo costante sui punti della superficie e l'angolo tra la perpendicolare alla superficie e il campo è costantemente nullo (e quindi con coseno 1).

Nel caso magnetico la situazione che permette una agevole verifica del teorema di Ampére è quella del campo prodotto da un filo rettilineo infinito, se si assume come linea chiusa di calcolo una circonferenza che coincida con una linea di forza del campo: in questo modo il campo ha modulo costante sui punti della linea e l'angolo tra la tangente alla linea e il campo è costantemente nullo (e quindi con coseno 1).

7 I campi in alcuni casi significativi

7.1 Filo rettilineo indefinito

Il campo elettrico di un filo metallico rettilineo indefinito, caricato con densità uniforme di carica, λ, è un campo con linee di forza radiali e situate in piani perpendicolari al filo (uscenti se la carica è positiva, entranti se è negativa).

L'intensità del campo, a distanza r dal filo, è data da:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\lambda}{r}\,.$$

Il campo magnetico di un lungo filo rettilineo percorso da corrente i è un campo con linee di forza circolari situate in piani perpendicolari al filo e concentriche al filo stesso.

Questa situazione è, sperimentalmente, una delle più importanti per il campo magnetico.

L'intensità del campo, a distanza r dal filo, è data da:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{i}{r}\,.$$

7.2 Lastra piana carica

Il campo elettrico prodotto da una lastra piana indefinita, carica con densità uniforme σ è diretto perpendicolarmente, uscente o entrante a seconda che la carica sia positiva o negativa, alla lastra stessa e ha intensità indipendente dalla distanza:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,.$$

7.3 Condensatori piani e solenoidi cilindrici

Si tratta delle due situazioni che, rispettivamente per il caso elettrico e quello magnetico, permettono di creare campi uniformi (e quindi facili da trattare da un punto di vista quantitativo).

Il campo all'interno di un condensatore piano indefinito è costante, perpendicolare alle piastre e avente verso dalla piastra positiva a quella negativa. All'esterno il campo è nullo. In un condensatore reale, la situazione è quella descritta solo lontano dai bordi.

L'intensità del campo è:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,.$$

Il campo all'interno di un solenoide cilindrico indefinito è costante, parallelo all'asse del solenoide, avente verso secondo la regola della mano destra. All'esterno il campo è nullo. In un solenoide reale, la situazione è quella descritta solo lontano dai bordi.

L'intensità del campo è:

$$B = \mu_0\, n\, i\,.$$

7.4 Campo sulla superficie di un conduttore

Il campo sulla superficie di un conduttore in equilibrio elettrostatico è perpendicolare al conduttore stesso, è uscente o entrante a seconda del segno della carica, ed ha modulo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,,$$

ove σ è la densità superficiale di carica (che può variare da punto a punto).

7.5 Campo di un conduttore sferico

Il campo di un conduttore sferico di raggio R è nullo all'interno del conduttore, all'esterno ha simmetria radiale e modulo identico a quello che avrebbe una sola carica puntiforme posta al centro e con intensità pari alla carica totale del conduttore, Q:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q|}{r^2}, \quad r \geq R.$$

7.6 Campo di una distribuzione sferica omogenea di carica

Il campo di una distribuzione sferica omogenea di raggio R ha simmetria radiale e modulo crescente linearmente per $r < R$, identico a quello di un conduttore sferico dello stesso raggio per $r \geq R$:

$$E = \begin{cases} \dfrac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\, r & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|Q|}{r^2} & r \geq R \end{cases}$$

8 Le definizioni di Coulomb e Ampére

La forza tra due cariche
La forza tra due cariche elettriche q_1 e q_2, poste ad una distanza r, ha modulo:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1|\,|q_2|}{r^2}.$$

La forza tra due fili percorsi da corrente
La forza tra due fili rettilinei percorsi da corrente continue i_1 e i_2, posti ad una distanza r, ha modulo:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2\, l}{r}.$$

Queste formule, che sono sostanzialmente le formule sperimentali fondamentali, permettono di dare una definizione di Coulomb (C) o di Ampére (A): basterà scegliere un opportuno valore per le costanti. È chiaro che la scelta dell'una o dell'altra come unità fondamentale è solo questione di convenienza, in quanto le due grandezze sono legate dalla relazione

$$\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}.$$

Se si pone, arbitrariamente, il valore della costante $1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$, si ha la definizione di Coulomb:
1 Coulomb è il valore di una carica che, posta a distanza di un metro da un'altra identica la respinge con una forza di $9 \cdot 10^9$ N.
Naturalmente a questo punto il valore di $\mu_0/2\pi$ rimane determinato.

Se si pone, arbitrariamente, il valore della costante $\mu_0/2\pi = 2 \cdot 10^{-7}$ si ottiene la definizione di Ampére:
1 Ampére è la corrente che, attraversando due conduttori rettilinei indefiniti posti a distanza di 1 metro, produce tra di essi una forza magnetica di $2 \cdot 10^{-7}$ N per ogni metro di lunghezza.
Naturalmente a questo punto il valore della costante $1/(4\pi\varepsilon_0)$ è completamente determinato.

9 Dipoli e spire

I dipoli elettrici e le spire percorse da corrente hanno, nei casi elettrico e magnetico rispettivamente, comportamenti simili, tanto che una spira percorsa da corrente può essere considerata alla stregua di un dipolo magnetico elementare.

Date due cariche $\pm q$, poste ad una distanza d, il vettore $\boldsymbol{p}$ di modulo uguale a qd, direzione della congiungente le cariche e verso dalla carica negativa alla positiva, si chiama *momento di dipolo elettrico.*

Data una spira piana di area S percorsa da corrente i, il vettore $\boldsymbol{m}$ di modulo uguale a iS, direzione perpendicolare al piano della spira e verso definito secondo la consueta regola della mano destra si chiama

Un dipolo elettrico immerso in un campo uniforme, oppure un dipolo “infinitamente piccolo” imerso in un campo anche non uniforme, subisce da parte del campo l’azione di una coppia di forze, il cui momento è dato da

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{E}\,.$$

Nelle stesse condizioni un dipolo elettrico ha una energia data da

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

Un dipolo elettrico produce un campo elettrico abbastanza complesso da trattare quantitativamente. Tuttavia la situazione è sufficientemente semplice sui punti dell’asse a cui appartiene il dipolo (la direzione del momento di dipolo elettrico) oppure sui punti del suo piano equatoriale (perpendicolare all’asse del dipolo per il suo centro), in punti distanti.

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \quad \text{(sull'asse del dipolo)}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}}{r^3} \quad \text{(sul piano equatoriale del dipolo)}$$

momento di dipolo magnetico, o *momento magnetico della spira*.

Un dipolo magnetico immerso in un campo uniforme, oppure un dipolo “infinitamente piccolo” imerso in un campo anche non uniforme, subisce da parte del campo l’azione di una coppia di forze, il cui momento è dato da

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \wedge \boldsymbol{B}\,.$$

Nelle stesse condizioni un dipolo magnetico ha una energia data da

$$U = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$$

La considerazione dell’energia nel caso magnetico richiede una certa attenzione, perché il campo magnetico non è conservativo (circuitazione non nulla). È comunque possibile introdurre correttamente il concetto di energia magnetica.

Anche le barrette magnetiche (in particolare gli aghi magnetici) sono dipoli magnetici e la loro trattazione, che comunque esula da questo contesto, può essere fatta proprio identificandoli, in un certo senso, con spire percorse da corrente.

Un dipolo magnetico produce un campo magnetico abbastanza complesso da trattare quantitativamente. Tuttavia la situazione è sufficientemente semplice sui punti dell’asse di simmetria della spira (la direzione del momento di dipolo magnetico) oppure sui punti del suo piano equatoriale (il piano a cui appartiene la spira), in punti distanti.

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} \quad \text{(sull'asse del dipolo)}$$

$$\boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\boldsymbol{m}}{r^3} \quad \text{(sul piano equatoriale del dipolo)}$$

10 Moto di cariche

Una situazione molto importante nelle applicazioni è lo studio del moto di cariche in campi elettrici e magnetici. Trattiamo solo il caso di moti in campi uniformi.

Una carica immessa in un campo elettrico $\boldsymbol{E}$ uniforme, con velocità $\boldsymbol{v}$, si muove di moto parabolico, esattamente come una massa m nel campo della gravità terrestre, supposto costante in regioni non troppo estese.

È significativa solo la componente del moto parallela al campo, quella perpendicolare è un semplice moto rettilineo ed uniforme che non viene influenzato dal campo.

Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali con origine coincidente con il punto di inizio del moto, asse y parallela e concorde al campo, e asse x parallela e concorde alla componente della velocità iniziale perpendicolare al campo.

Una carica immessa in un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ uniforme, con velocità $\boldsymbol{v}$, si muove di moto elicoidale, in particolare circolare se la velocità è inizialmente perpendicolare al campo magnetico.

È significativo solo il caso del moto circolare, perchè il moto elicoidale è semplicemente la composizione di un moto circolare con un moto rettilineo ed uniforme, in questo caso con velocità uguale alla componente di velocità parallela al campo, che non viene influenzata dal campo stesso.

Indichiamo con r il raggio della circonferenza e con T il periodo del moto.

$$\begin{cases} x = v_{0_x} t \\ y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{qE}{m}\right) t^2 + v_{0_y} t \,. \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \dfrac{mv}{qB} \\ T = \dfrac{2\pi m}{qB} \,. \end{cases}$$

È particolarmente importante, per le applicazioni ai ciclotroni, il fatto che il periodo non dipende dalla velocità.

Parte II - Campi non statici

11 Equazioni di Maxwell

Le equazioni di Maxwell relativamente al flusso non subiscono modificazioni nel passaggio dal caso statico a quello dinamico: esse esprimono, nella sostanza, la legge di Coulomb e la possibilità di separare le cariche positive da quelle negative (caso elettrico) e la impossibilità do ottenere il monopolo magnetico (caso magnetico).

Le equazioni relative alla circuitazione sono invece sostanzialmente diverse e traducono in formule la possibilità che tra le sorgenti di campo elettrico ci sia anche un campo magnetico variabile (legge di Faraday-Neumann-Lenz) e, viceversa, che tra le sorgenti di campo magnetico ci sia anche un campo elettrico variabile (corrente di spostamento).

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}t} \qquad \Phi_{Sch}(\boldsymbol{E}) = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{B}) = \mu_0\left(\sum i_{conc} + \varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})}{\mathrm{d}t}\right) \qquad \Phi_{Sch}(\boldsymbol{B}) = 0$$

12 Correnti elettriche e “correnti magnetiche”

Un moto ordinato di cariche elettriche produce una corrente elettrica. Se si hanno diversi tipi di carica in moto, i contributi alla corrente da parte di cariche positive che si muovono in un verso e di cariche negative che si muovono in verso opposto si *sommano*, mentre se si hanno cariche positive e negative mobili nello stesso verso i contributi si *sottraggono*. Per esempio il moto di un dipolo elettrico non produce corrente elettrica.

Le “cariche magnetiche” sono sempre in coppia, visto che non è possibile separare i poli magnetici opposti. Per questo motivo non ha alcun senso il concetto di “corrente magnetica”.

È per questo che, nelle equazioni di Maxwell, esiste una dissimetria tra le equazioni relative al campo elettrico e quelle relative al campo magnetico.

La dissimetria scompare completamente quando si considerano campi elettrici o magnetici generati non da cariche o da correnti, ma solo da altri campi variabili:

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{E}) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{B})}{\mathrm{d}t} \qquad \Phi_{Sch}(\boldsymbol{E}) = 0$$

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{B}) = \mu_0\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{E})}{\mathrm{d}t} \qquad \Phi_{Sch}(\boldsymbol{B}) = 0$$

13 Energia del campo

Collegando un condensatore ad un generatore di

Se si collega una forza elettromotrice ad un circuicorrente si può caricare il condensatore, ovvero ottenere una configurazione in cui le due piastre hanno una un eccesso di carica positiva e una un eccesso di carica negativa: si può pensare che il generatore abbia trasportato carica da una piastra all'altra e, poiché il campo elettrico è conservativo, il percorso seguito non ha alcun interesse. L'energia spesa dal generatore si può pensare immagazzinata nella configurazione finale ottenuta: se per esempio si collegano le due piastre con una resistenza si può ottenere un riscaldamento della resistenza stessa, ovvero un "recupero" dell'energia fornita.

Si può però anche pensare che l'energia sia stata spesa per costruire il campo elettrico tra le due armature, e che essa sia immagazzinata in tutta la regione occupata dal campo. Questo ci permette di introdurre la densità di energia associata ad un campo elettrico, W.

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 .$$

to, la corrente non raggiunge subito il valore nominale previsto, ma impiega un certo tempo, a causa dell'induttanza del circuito stesso; in compenso quando si stacca il generatore la corrente non scende subito a zero, ma continua a circolare per un po', continuando a fornire energia. Si può pensare che il generatore debba spendere una parte di energia per "caricare" l'induttanza, energia che può venire "recuperata" alla apertura del circuito.

In analogia col caso elettrico si può però anche pensare che l'energia sia stata spesa per costruire il campo magnetico presente quando nel circuito circola la corrente e che dunque essa sia immagazzinata in tutta la regione del campo. Questo ci permette di introdurre la densità di energia associata ad un campo magnetico, W.

$$W = \frac{1}{2\mu_0} B^2 .$$

14 Circuiti R-C ed R-L

L'equazione che regola la fase di carica di un circuito R-C è

$$\mathcal{E} - R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} - \frac{q}{C} = 0 ,$$

la cui soluzione è (posto $\tau = RC$):

$$q = C\mathcal{E}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) .$$

L'equazione che regola la fase di scarica di un circuito R-C è

$$R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = 0 ,$$

la cui soluzione è:

$$q = C\mathcal{E}\mathrm{e}^{-t/\tau} .$$

L'equazione che regola la fase di chiusura in un circuito R-L è

$$\mathcal{E} - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0 ,$$

la cui soluzione è (posto $\tau = L/R$):

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) .$$

L'equazione che regola la fase di apertura in un circuito R-L è

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 ,$$

la cui soluzione è:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau} .$$

In entrambi i casi la costante τ prende il nome di *costante di tempo*, ed esprime il tempo dopo il quale la carica, o la corrente, raggiungono il 63%, cioè circa i $2/3$, del loro valore nominale (nella fase di carica o di chiusura), oppure perdono il 63%, cioè circa i $2/3$, del valore nominale che avevano raggiunto.