

Una funzione continua con inversa discontinua

Materiale prelevato da

<http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm>

15 febbraio 2011

Sia data la funzione $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\operatorname{sgn}(x^2 - 1)} \sqrt{x^2(x^2 - 1)},$$

il cui dominio naturale, D , è

$$]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]1, +\infty[.$$

Essa è continua nel suo dominio, e derivabile (quante volte si vuole) in $D \setminus \{0\}$ (Il punto 0 è isolato nel dominio, quindi in 0 il problema della derivabilità, come quello del calcolo del limite, non si pone nemmeno).

È interessante osservare che la funzione è strettamente crescente nel suo dominio e quindi invertibile, ma l'inversa, f^{-1} , non è continua in 0, in quanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f^{-1}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = 1, \quad f^{-1}(0) = 0.$$

Le due immagini che seguono mostrano, nell'ordine, il grafico di f e di f^{-1} : sono chiaramente evidenti le proprietà indicate.

