Studio di funzioni - Esercizi avanzati, 2

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 1 marzo 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x - \arcsin(1 - |x - 1|) \,.$$

Soluzione

La funzione arcseno è definita quando il suo argomento è nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. Si deve dunque avere

$$-1 \le 1 - |x - 1| \le 1 \,,$$

che si risolve in modo standard come segue

$$\Rightarrow -2 \le -|x - 1| \le 0 \Rightarrow 0 \le |x - 1| \le 2 \Rightarrow |x - 1| \le 2 \Rightarrow -2 \le x - 1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3 \,.$$

Dunque il dominio naturale di f è

$$D = [-1, 3] \,.$$

Come sempre quando sono presenti valori assoluti si può procedere a "esplicitare" il valore assoluto, distinguendo i vari casi che si possono preentare:

$$f(x) = \begin{cases} x - \arcsin(2 - x), & \text{se} \quad x \ge 1 \\ x - \arcsin(x), & \text{se} \quad x < 1 \end{cases} \,,$$

restando naturalmente sottinteso che i valori di x devono stare nel dominio naturale D. Come segnalato in altri esercizi, non è affatto detto che la scrittura esplicita della funzione ottenuta "spezzando" il valore assoluto sia conveniente. Per esempio la determinazione del dominio naturale è stata facile direttamente utilizzando la scrittura originale.

La funzione, come ogni funzione elementare, è continua nel suo dominio: la presenza però del valore assoluto e della funzione arcseno potrà comportare problemi per quanto riguarda la derivabilità: la funzione $|x|$ non è derivabile per $x = 0$, la funzione $\arcsin(x)$ non è derivabile per $x = \pm 1$. Questo non significa automaticamente che la funzione f avrà punti di non derivabilità: la composta di fuzioni non derivabili può benissimo essere derivabile, occorre un'indagine caso per caso.

In questo, come in molti altri casi, non è facile la determinazione del segno della funzione a questo: sarà proprio il grafico indicativo che costruiremo a fornirci indicazioni sugli intervalli di positività e negatività, oltreché sui punti ove la funzione si annulla.

Non c'è alcun limite notevole da calcolare, in quanto la funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato (e questo ci garantisce a priori l'esistenza di un massimo e di un minimo assoluto, in base al teorema di Weierstrass). È comunque conveniente, in casi come questo, calcolare i valori agli estremi e in corrispondenza dei punti in cui l'espressione analitica della funzione si modifica per la presenza del valore assoluto.

$$f(-1) = -1-\arcsin(-1) = -1+\frac{\pi}{2}\,, \quad f(1) = 1-\arcsin(-1) = 1-\frac{\pi}{2}\,, \quad f(3) = 3-\arcsin(-1) = 3+\frac{\pi}{2}\,.$$

Possiamo procedere al calcolo della derivata prima. Si ha, intanto,

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{-x^2+4x-3}}, & \text{se} \quad 1 < x < 3 \end{cases}.$$

Per quanto riguarda i punti $-1, 1, 3$ procediamo al calcolo dei limiti della derivata prima.

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to -1^+} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 1 + \frac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} f'(x) = \lim_{x\to 3^-} 1 + \frac{1}{\sqrt{1-(2-x)^2}} = +\infty$$

Se ne deduce che in questi tre punti la funzione non è derivabile e precisamente che in -1 e 3 ha una tangente verticale, in 1 ha una cuspide con minimo. Si ricordi sempre che il calcolo dei limiti della derivata *non* fornisce sempre informazioni conclusive sulla derivabilità o meno di una funzione in un punto: in questo caso abbiamo potuto concludere perché la funzione è continua e perché i limiti della derivata sono infiniti.

Per quanto riguarda il segno della derivata prima, l'espressione prima trovata ci permette di concludere facilmente che

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{se} \quad 1 < x < 3 \\ f'(x) = 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ f'(x) < 0, & \text{se} \quad -1 < x < 0 \vee 0 < x < 1 \end{cases}.$$

Questi risultati ci permettono di concludere subito relativamente agli intervalli in cui la funzione cresce e decresce; inoltre possiamo dedurre che per $x = 0$ si avrà un flesso a tangente orizzontale.

Procediamo a calcolare la derivata seconda, non senza aver prima osservato che per questo *non* è conveniente ridurre le espressioni analitiche trovate per la derivata prima ad un'unica frazione, in quanto evitando semplificazioni si può sfruttare il fatto che la derivata della costante 1 che compare in entrambe le espressioni è nulla. Si ottiene facilmente

$$f''(x) = \begin{cases} -x(1-x^2)^{-3/2}, & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ (x-2)(-x^2+4x-3)^{-3/2}, & \text{se} \quad 1 < x < 3 \end{cases}.$$

Se ne conclude che

$$\begin{cases} f''(x) > 0, & \text{se} \quad -1 < x < 0 \vee 2 < x < 3 \\ f''(x) = 0, & \text{se} \quad x = 0 \vee x = 2 \\ f''(x) < 0, & \text{se} \quad 0 < x < 1 \vee 1 < x < 2 \end{cases},$$

mentre, ovviamente, la derivata seconda non può esistere on $-1, 1, 3$, in quanto già non esisteva la derivata prima. Si ha una conferma del fatto che per $x = 0$ c'è un flesso (a tangente orizzontale in quanto si annulla anche la derivata prima) e si trova un ulteriore flesso per $x = 2$, dove si ha $f(2) = 2$. In molti esercizi è richiesto esplicitamente il calcolo della tangente inflessionale (cioè la tangente nel punto di flesso), calcolo che si fa facilmente ottenendo:

$$y = f(2) + f'(2)(x - 2) \quad \Rightarrow \quad y = 2 + 2(x - 2)\,.$$

Tenendo conto di quanto trovato si ottiene il grafico seguente.