Studio di funzioni - Esercizi avanzati, 3

Materiale prelevato da

http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 1 marzo 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x \cdot \left(\arccos x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{1-x^2}\,.$$

Soluzione

Sia per la presenza della funzione arccoseno (il cui argomento deve essere compreso tra -1 e 1), sia per la presenza del radicale quadratico (il cui radicando deve essere non negativo), si conclude subito che il dominio naturale è

$$D = [-1, 1]\,.$$

La funzione, essendo elementare, è continua in tutto il suo dominio. Poiché D è chiuso e limitato non occorre calcolare alcun limite notevole e non esistono asintoti di alcun tipo. Tuttavia è conveniente calcolare i valori di f agli estremi del dominio.

$$f(-1) = f(1) = -\frac{\pi}{2}\,.$$

Sia la funzione arccoseno che la funzione radice non sono sempre derivabili nel loro dominio naturale; precisamente non potremo affermare nulla a priori circa la derivabilità in -1 e 1. In $]-1,1[$ si ha invece, facilmente,

$$f'(x) = \arccos x - \frac{\pi}{2}\,, \quad f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Si ha poi

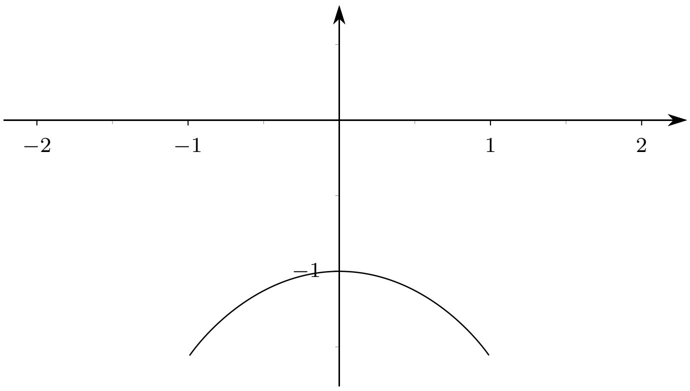
$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = 0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

La funzione è dunque derivabile (rispettivamente derivata sinistra e destra) anche in -1 e 1 con le derivate date dai valori dei limiti trovati. Calcolando gli analoghi limiti per la derivata seconda si trova, per entrambi, $-\infty$, da cui si conclude che la funzione non ha, agli estremi dell'intervallo di definizione, derivata seconda. La derivata seconda è, banalmente, sempre negativa (funzione concava), mentre per la derivata prima si ha

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ f'(x) = 0, & \text{se} \quad x = 0 \\ f'(x) < 0, & \text{se} \quad 0 < x \le 1 \end{cases}\,.$$

La funzione ha dunque un massimo (assoluto) in 0, di valore -1, e un minimo assoluto in ± 1, di valore $-\pi/2$.

Il grafico che segue riassume i risultati trovati.


−2
−1
1
2
−1