Studio di funzioni - Esercizi avanzati,1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 15 febbraio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1}\,.$$

Soluzione

La funzione arcotangente è definita su tutto $\mathbb{R}$ e quindi non pone alcun problema per quanto riguarda la ricerca del dominio naturale. L'unica limitazione sarà data dalla presenza del denominatore della frazione $x/x-1$. Se ne deduce che

$$D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[.$$

Anche la determinazione del segno è semplice, in quanto la funzione arcotangente è positiva sui reali positivi, negativa sui reali negativi[1] e si annulla solo in 0. Il segno della funzione sarà allora lo stesso di quello di $x^2/x-1$, ovvero sarà positiva per $x > 1$, negativa per $-\infty < x < 0$ e per $0 < x < 1$, si annullerà solo per $x = 0$.

Per il calcolo dei limiti notevoli teniamo conto dei seguenti fatti.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1\,, \quad \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} x = \pm\frac{\pi}{2}\,, \quad \lim_{x\to 1^\pm} \frac{x}{x-1} = \pm\infty, \quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Se ne deduce facilmente quanto segue.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = [-\infty \cdot \operatorname{arctg} 1] = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = [1 \cdot \operatorname{arctg}(-\infty)] = -\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = [1 \cdot \operatorname{arctg}(+\infty)] = +\frac{\pi}{2}\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = [+\infty \cdot \operatorname{arctg} 1] = +\infty.$$

I risultati di questi limiti escludono la presenza di asintoti orizzontali o verticali. Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui. Si ha, intanto,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{x-1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

[1] È come dire che la funzione arcotangente ha il segno del suo argomento.

Si ha poi

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \frac{\pi}{4}x = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x-1} - \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{\pi}{4}}{\dfrac{1}{x}} =$$

$$\overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{(x-1)^2}} \cdot \dfrac{x-1-x}{(x-1)^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x^2-2x+1} = \frac{1}{2}\,.$$

Dunque la retta

$$y = \frac{\pi}{4}x + \frac{1}{2}$$

è asintoto obliquo sia a $+\infty$ che a $-\infty$.

Passiamo al calcolo delle derivate (possiamo tenere conto di calcoli già in parte fatti applicando la regola di l'Hôpital nel limite precedente).

$$f'(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x-1} + x\,\frac{-1}{2x^2-2x+1}\,;$$

$$f''(x) = \frac{-1}{2x^2-2x+1} + \frac{-1}{2x^2-2x+1} + x\,\frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2} = \frac{2x-2}{(2x^2-2x+1)^2}$$

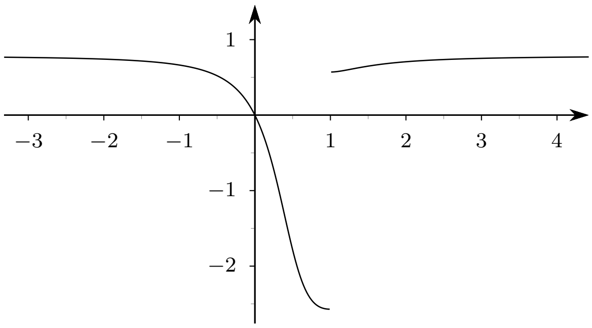
Il calcolo del segno della derivata seconda è immediato: è positiva per $x > 1$ (funzione convessa, o con concavità verso l'alto) e negativa per $x < 1$ (funzione concava, o con concavità verso il basso). Il calcolo del segno della derivata prima non è invece immediato e si può fare per via grafica effettuando uno studio, nelle sue linee essenziali, della funzione f', che chiameremo per semplicità g:

$$g(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{x-1} - \frac{x}{2x^2-2x+1}\,.$$

Si ha, ovviamente, $g'(x) = f''(x)$, per cui g decresce in $]-\infty, 1[$, mentre cresce in $]1, +\infty[$. Il calcolo dei limiti notevoli di g non presenta difficoltà e si ottiene:

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \frac{\pi}{4}\,, \quad \lim_{x\to 1^-} g(x) = -\frac{\pi}{2} - 1,, \quad \lim_{x\to 1^+} g(x) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

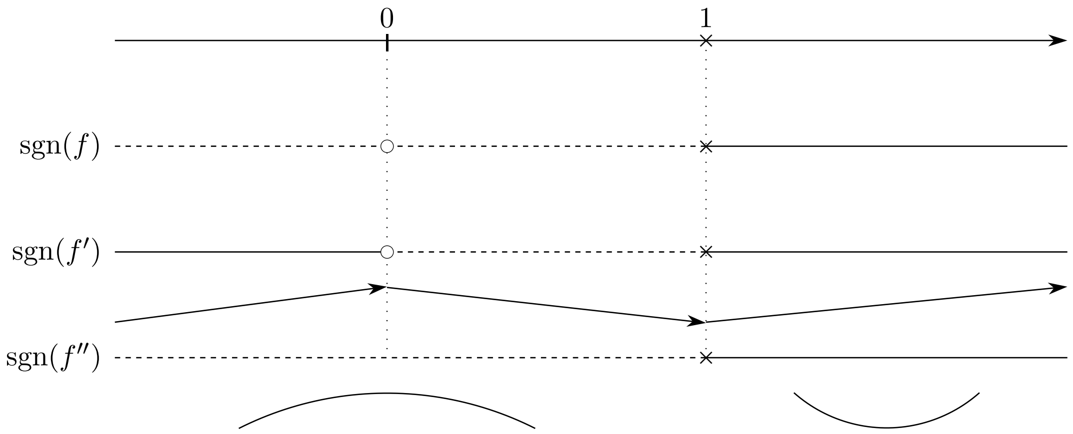
Tenendo conto che $g(0) = 0$, si ottiene il seguente grafico sommario[2] di g.



Da qui si deduce che $f'(x) > 0$ in $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, $f'(x) < 0$ in $]0, 1[$, $f'0) = 0$. Riportiamo[3] nel solito grafico dei segni tutti i risultati trovati.

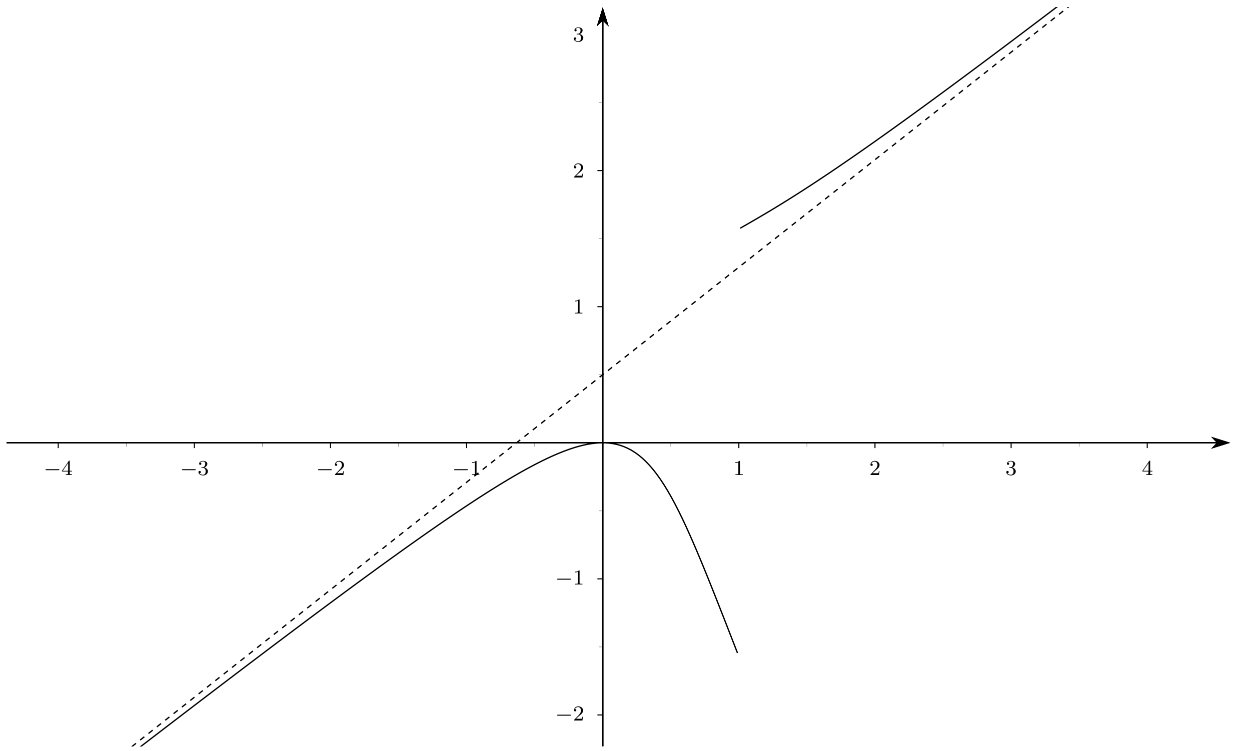
[2] Non è indispensabile calcolare la derivata seconda di g, e nemmeno altri eventuali dettagli: quello a cui siamo interessati è solo il segno di g, cioè quando il grafico sta "sopra" l'asse delle x, e quando invece sta "sotto" quest'asse.

[3] Come più volte ricordato, conviene costruire progressivamente questo grafico, senza attendere prima tutti i risultati.



La funzione ammette un massimo relativo in 0, di valore 0, non ha né massimo ne minimo assoluto, non ha alcun punto di flesso, e presenta una singolarità[4] a salto in corrispondenza di $x = 1$.

Il grafico richiesto è ora immediato:



[4]Abitualmente si parla di *discontinuità* in una situazione di questo tipo. Riteniamo scorretto il termine discontinuità, in quanto la funzione data, in corrispondenza di -1, non è definita e quindi non può essere né continua né discontinua. In ogni caso, al di la della nomenclatura usata (che in questo caso è ben lungi dall'essere universalmente condivisa), è importante comprendere il tipo di andamento del grafico.