Apollonio, inversioni & PSTricks

Luciano Battaia[*]

Versione del 4 maggio 2007

In questo articolo è proposta la trattazione dell'inversione circolare e della sua applicazione alla risoluzione del problema di Apollonio, con particolare riguardo alle tecniche utilizzabili con il pacchetto PSTricks e la sua estensione pst-eucl per la costruzione delle figure.

Il lavoro è stato prodotto durante il corso di introduzione a LaTeX, svolto nella classe 3ªB del Liceo Scientifico "Michelangelo Grigoletti" di Pordenone, A.S. 2006 – 2007.

Indice

Introduzione

L'inversione circolare non fa normalmente parte delle trasformazioni geometriche trattate nei corsi di geometria della Scuola Secondaria Superiore e, di solito, nemmeno nei corsi universitari di primo livello. Eppure si tratta di una tecnica non molto difficile dal punto di vista teorico e in grado di risolvere con eleganza problemi altrimenti molto complessi. Anche i software di geometria dinamica, come Cabri, la includono tra gli strumenti fondamentali e questo è una riprova della sua importanza e utilità.

In questo lavoro proponiamo una introduzione a questa speciale trasformazione geometrica e la sua applicazione alla risoluzione del famoso problema di Apollonio (costruzione delle circonferenze tangenti a tre circonferenze date).

Abbiamo anche voluto mostrare come si possano realizzare tutte le costruzioni geometriche usando il pacchetto PSTricks e la sua estensione pst-eucl: questo consente di ottenere risultati di elevatissima qualità tipografica, con l'uso di algoritmi che sono sostanzialmente simili a quelli utilizzati in Cabri.

1 Inversioni circolari

L'*inversione circolare* è una trasformazione geometrica del piano (privato di un punto), in sè, definita come segue.

Sia data nel piano una circonferenza $\mathscr{C}$, di centro O e raggio k. Dato un punto P, diverso da O, il punto P' della semiretta OP la cui distanza da O soddisfa la condizione

$$OP \times OP' = k^2 \,,$$

si dice l'*inverso* di P. $\mathscr{C}$ si dice la *circonferenza*, k il *raggio*, O il *centro*, k^2 la *potenza* dell'inversione. Il cerchio di centro O e raggio k si dice il *cerchio* di inversione.

[*] http://www.batmath.it

È conseguenza immediata della definizione che:

— il punto O (centro dell'inversione) non ha inverso;
— i punti della circonferenza di inversione sono inversi di se stessi (*punti uniti*);
— i punti esterni al cerchio di inversione hanno inverso all'interno del cerchio stesso, e viceversa.

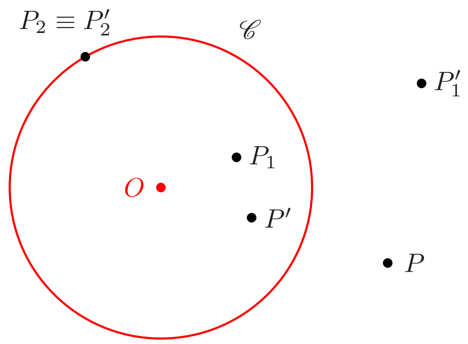

Figura 1: *Inversione circolare applicata a tre punti:* P, P_1, P_2

La costruzione dell'inverso di un punto P, dato il cerchio $\mathscr{C}$ di inversione di centro O, può avvenire con riga e compasso, seguendo i passi di seguito indicati:

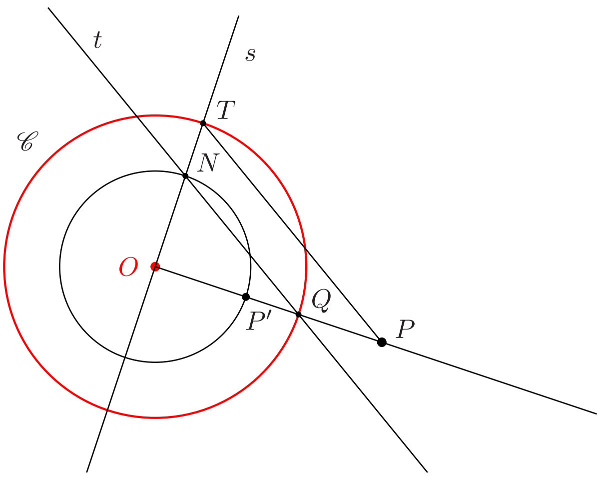

Figura 2: *Costruzione con riga e compasso dell'inverso di un punto* P

— si traccia la semiretta OP;
— si indica con Q il punto di intersezione tra OP e $\mathscr{C}$;
— si traccia la retta s per O perpendicolare a OP;
— si indica con T uno dei due punti di intersezione tra s e $\mathscr{C}$;
— si traccia la parallela, t, per Q alla retta PT;
— si indica con N il punto di intersezione tra s e t;
— si trova l'intersezione, P', tra la circonferenza di centro O e passante per N e la semiretta OP: P' è l'inverso di P.

La costruzione che abbiamo proposto non è l'unica possibile, e nemmeno la più semplice, ha però il vantaggio di usare lo stesso algoritmo sia per punti interni che esterni al circolo di inversione.

Figure corrispondenti in una inversione circolare si dicono *inverse una dell'altra*. Una figura inversa di se stessa si dice *anallagmatica*, o *unita*. Il cerchio di inversione è, come già osservato, una figura anallagmatica (anzi formata solo da punti che sono inversi di se stessi. In generale una figura anallagmatica è costituita invece da punti che hanno immagini sulla stessa figura, ma generalmente in posizioni diverse.

Tra le proprietà importanti dell'inversione circolare ci interessano in particolare le seguenti.

— Ogni retta passante per il centro è anallagmatica.
— Ogni retta non passante per il centro viene trasformata in una circonferenza passante per il centro

(ovviamente privata dell'origine); viceversa ogni circonferenza passante per il centro viene trasformata in una retta non passante per il centro.

— Ogni circonferenza non passante per il centro viene trasformata in una circonferenza non passante per il centro.

— Se due curve si incontrano in un punto e le le loro tangenti formano un angolo α, anche le tangenti alle curve trasformate formano lo stesso angolo α. In particolare se due curve sono tangenti in un punto, tali sono anche le loro trasformate. Questa proprietà è molto importante per la risoluzione del problema di Apollonio.

Da queste proprietà discendono le seguenti "scorciatoie" per la costruzione delle inverse di rette e circonferenze.

— Per costruire la circonferenza inversa di una retta non passante per l'origine si osserva che la tangente per l'origine alla circonferenza inversa deve essere parallela alla retta data. Analoga osservazione per la costruzione della retta inversa di una circonferenza per l'origine.

— Per costruire l'inversa di una circonferenza non passante per l'origine, basta trovare gli inversi dei due punti di intersezione della circonferenza data con la retta per l'origine e il centro della circonferenza.

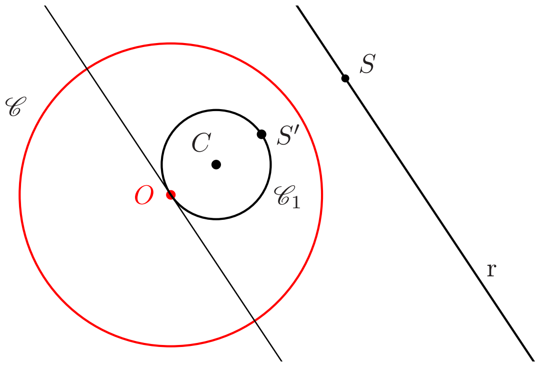

Figura 3: *Costruzione della circonferenza $\mathscr{C}_1$ inversa di una retta r non passante per il centro*

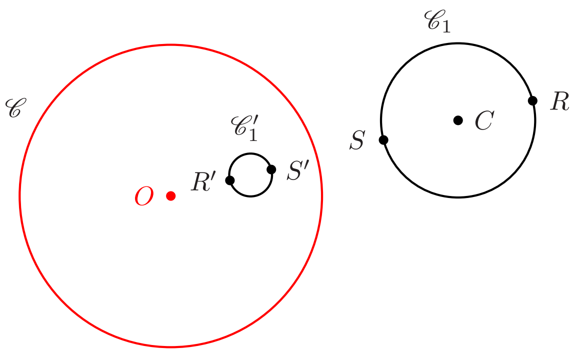

Figura 4: *Costruzione della circonferenza $\mathscr{C}'_1$ inversa di una circonferenza $\mathscr{C}_1$ non passante per il centro*

La costruzione della figura 3 richiede sostanzialmente solo la determinazione dell'inverso, S', del punto S, proiezione ortogonale di O sulla retta r, e la successiva costruzione della circonferenza di diametro OS'. La stessa costruzione può essere usata per costruire la retta inversa di una circonferenza passante per il centro: basterà scambiare i ruoli di S ed S'.

La costruzione della figura 4 richiede sostanzialmente solo la determinazione degli inversi, S' ed R', dei punti S ed R, intersezioni della circonferenza $\mathscr{C}_1$ con la retta OC.

In ogni caso, per trovare tracciare rette o circonferenze inverse, si possono sempre determinare due o tre loro punti, anche senza seguire le strategie sopra indicate: nel seguito lo faremo spesso.

2 Le costruzioni con PSTricks

La costruzione di figure coinvolgenti l'inversione circolare può essere agevolmente realizzata in LaTeX utilizzando PSTricks e, in particolare il pacchetto di macro pst-eucl, di Dominique Rodriguez, che contiene delle macro per tutte le costruzioni tipiche della geometria euclidea: rette, cerchi, trasformazioni geometriche (simmetrie, traslazioni, rotazioni, omotetie, intersezioni tra rette e tra rette e cerchi).

Non è prevista esplicitamente una macro per la costruzione dell'inverso di un punto, dati la circonferenza e il centro di inversione, ma se ne può facilmente costruire una, utilizzando le altre costruzioni fondamentali. Ne proponiamo qui di seguito una semplicissima, che non richiede alcuna conoscenza particolare della programmazione postscript o LaTeX.

Codice per la macro che costruisce l'inverso di un punto

```
\makeatletter
\newcommand{\pstInv}[5][]{%
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{#3},PointNameA=none,PointSymbolA=none,%
  PointNameB=none,PointSymbolB=none]{#2}{#4}{#2}{}{@X}{@Q}%
\pstRotation[RotAngle=90,PointName=none,PointSymbol=none]{#2}{@Q}[@T]%
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{#4}{@Q}{@T}[@S]%
\pstInterLL[PointName=none,PointSymbol=none]{@Q}{@S}{#2}{@T}{@N}%
\pstCircleOA[linestyle=none]{#2}{@N}%
{\psset{PointNameA=none,PointSymbolA=none,PointNameB=none,PointSymbolB=none}%
\pstInterLC[#1]{#2}{#4}{#2}{@N}{@R}{#5}}%
}
\makeatother
```

Inserendo questo codice nel preambolo si ha a disposizione, per la costruzione dell'inverso P' di un punto P, il comando `\pstInv`, che richiede 5 parametri, di cui uno opzionale.

— La macro non disegna di default il punto inverso, né il suo nome. Nel parametro opzionale si possono inserire le opzioni per modificare questo comportamento, e precisamente:
  - `PointSymbolB=default` (o qualcos'altro) per disegnare il punto inverso;
  - `PointNameB=default` (o qualcos'altro) per scrivere il nome del punto inverso;
  - altre opzioni tipiche di pst-eucl (per esempio `PosAngle`).

— Il primo parametro obbligatorio è il centro di inversione (un nodo già definito).

— Il secondo parametro obbligatorio è il raggio del cerchio di inversione.

— Il terzo parametro obbligatorio è il punto di cui calcolare l'inverso (un nodo già definito).

— Il quarto parametro obbligatorio è il nome di nodo del punto inverso.

3 Il Problema di Apollonio

Euclide, nel Libro III dei suoi *Elementi*, discute e risolve il problema della costruzione del cerchio passante per tre punti e dei cerchi tangenti a tre rette. Si tratta di problemi strettamente connessi alla geometria del triangolo: la costruzione del cerchio circoscritto, nel caso dei tre punti, la costruzione dei cerchi inscritti ed ex-inscritti, nel caso delle tre rette. Le soluzioni sono in ogni caso elementari e coinvolgono solo il concetto di asse di un segmento e di bisettrice di un angolo.

Apollonio si pone il problema generalizzato della costruzione, con riga e compasso, delle circonferenze tangenti a tre circonferenze, eventualmente degeneri, intendendosi con circonferenza degenere una retta o un punto. Un'intera opera, le *Tangenze*, è dedicata a questo problema. L'opera è andata purtroppo interamente persa, e ne possiamo ricostruire parzialmente il contenuto solo attraverso le citazioni di Pappo. Essa era costituita da due volumi, nel primo dei quali venivano riproposti i due casi già trattati da Euclide assieme ad altri sei, mentre nel secondo venivano trattati i due casi più difficili, ovvero quelli nei quali erano date due rette e un cerchio, oppure tre cerchi.

Il problema e le possibili soluzioni sono trattati in dettaglio in http://www.batmath.it/matematica/a_apollonio/apollonio.htm, a cui rimandiamo per ogni ulteriore approfondimento. Qui ci vogliamo occupare solo di alcune situazioni in cui si può utilizzare l'inversione circolare, mostrando come le costruzioni possano essere eseguite con PSTricks. Segnaliamo che, in molti casi, sono possibili anche soluzioni alternative, senza l'uso dell'inversione circolare.

4 Il supporto di Cabri

La costruzione delle circonferenze che risolvono il problema di Apollonio è, quasi sempre, tecnicamente complessa e richiede una attenta analisi delle situazioni di partenza per ottenere risultati significativi ed esteticamente accettabili: molto spesso le costruzioni debordano facilmente dal foglio di disegno e si rischia di produrre un grafico bellissimo, ma magari visualizzabile solo in un foglio di formato A0!

L'uso di un software di geometria dinamica, come Cabri, può grandemente semplificare il problema, in quanto permette di modificare velocemente i dati iniziali fino a scegliere una situazione adatta ad essere trasferita efficacemente su carta.

C'è anche un altro motivo, valido in generale e non solo in relazione al problema di Apollonio, che rende oltremodo interessante l'interazione tra Cabri e PSTricks, ed in particolare pst-eucl, ed è legato al fatto che il modo di procedere nella costruzione geometrica è sostanzialmente simile, se non identico: la maggior parte dei "pulsanti Cabri" corrisponde infatti ad una macro di pst-eucl. La possibilità di ottenere in Cabri risultati "immediatamente visualizzabili" può aiutare a superare le difficoltà legate al fatto che in una costruzione PSTricks occorre procedere ad una progettazione "manuale" delle varie costruzioni. D'altro canto il rigore richiesto nella progettazione PSTricks, come del resto in ogni codice informatico, costringe l'utente a ragionare profondamente sui passi da compiere e sul loro significato, con grandi benefici dal punto di vista didattico.

5 Le circonferenze per due punti e tangenti a una retta

Sono dati due punti A e B, situati da una stessa parte rispetto ad una retta r: si vogliono trovare le circonferenze passanti per i due punti e tangenti alla retta. È evidente che, nel caso in cui i due punti stiano da bande opposte rispetto alla retta, il problema non ha soluzioni La costruzione è inoltre banale se i due punti stanno su una parallela alla retta data, oppure se uno dei due punti sta sulla retta stessa. Escluse queste situazioni la costruzione si basa sui passaggi seguenti:

— si considera una circonferenza di inversione, $\mathscr{C}$, di centro uno dei due punti, per esempio A, e raggio qualunque;
— si considerano gli inversi B' di B e $\mathscr{C}_1$ della retta r rispetto a $\mathscr{C}$;
— da B' si tracciano le tangenti a $\mathscr{C}_1$: le inverse di queste tangenti sono le circonferenze richieste.

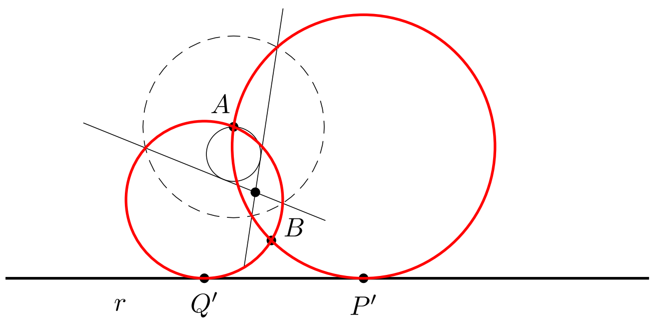

Figura 5: *Circonferenze per due punti e tangenti a una retta: figura comprendente le linee di costruzione*

Il codice PSTricks

Si devono assegnare i due punti A e B e la retta r mediante altri due punti. Nel codice che segue cambiando le coordinate dei punti nell'istruzione indicata si possono ottenere diverse costruzioni. Il codice è ampiamente commentato prima di ogni comando. Ricordiamo solo che per tracciare le tangenti ad una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O da un punto P esterno, è sufficiente trovare le intersezioni di $\mathscr{C}$ con la circonferenza avente centro nel punto medio M tra O e P e passante per O e P.

```
\begin{pspicture}(-0.5,0)(8,5)
%La definizione del raggio di inversione
\def\rinv{1.2}
%Nella linea seguente i nodi di partenza, eventualmente da cambiare
\pstGeonode[PointName={default,default,none,none},PointSymbol={default,default,none,none}%
     ,PosAngle={120,30,0,0}](2.5,3){A}(3,1.5){B}(1,1){R}(4,1){S}
%Disegno della retta r
\pstLineAB[nodesepA=-2,nodesepB=-4,linewidth=1pt]{R}{S}
%La proiezione C di A su r
```

```
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{R}{S}{A}[C]
%L'inverso C' di C, rispetto ad A (con un raggio di inversione arbitrariamente scelto =1)
\pstInv{A}{\rinv1}{C}{C'}
%La circonferenza C1, di diametro AC', inversa della retta r
\pstCircleAB[linestyle=none]{A}{C'}
%Il centro di C1
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{A}{C'}{X}
%L'inverso B' di B
\pstInv{A}{\rinv}{B}{B'}
%La costruzione delle tangenti, in P e Q, da B' a C1
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{X}{B'}{M}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{X}{A}{M}{X}{P}{Q}
%La costruzione delle circonferenze inverse delle rette B'P e B'Q
%(basta trovare gli inversi di P e Q e poi le circonferenze per tre punti)
\pstInv[PointNameB=default,PointSymbolB=default,PosAngle=-90]{A}{\rinv}{P}{P'}
\pstInv[PointNameB=default,PointSymbolB=default,PosAngle=-90]{A}{\rinv}{Q}{Q'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{B}{P'}{L}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{B}{Q'}{N}
\end{pspicture}
```

Si può provare a variare il raggio del circolo di inversione (basta cambiare il valore contenuto in `\def\rinv{1.2}`, con un altro numero) per verificare che la costruzione finale non cambia.

6 Le circonferenze per un punto e tangenti a due rette

Sono dati un punto A e due rette r ed s: vogliamo troavre le circonferenze passanti per A e tangenti alle due rette. Il problema è interessante solo se le due rette sono incidenti in un punto C e il punto A non appartiene né alle due rette, nè a una delle bisettrici degli angoli da esse individuati, ed è riconducibile al caso di due punti e una retta, se si considera il simmetrico, A', di A rispetto alla bisettrice dell'angolo tra le due rette cui appartiene anche A. Qui vogliamo però proporre una costruzione indipendente, che utilizza l'inversione, secondo i passi seguenti:

- si considera un cerchio, $\mathscr{C}$, di inversione di centro A e raggio qualunque;
- si trovano le circonferenze inverse, rispetto a $\mathscr{C}$, delle due rette;
- si trovano le due tangenti comuni a queste circonferenze: le inverse delle due tangenti comuni sono le circonferenze richieste.

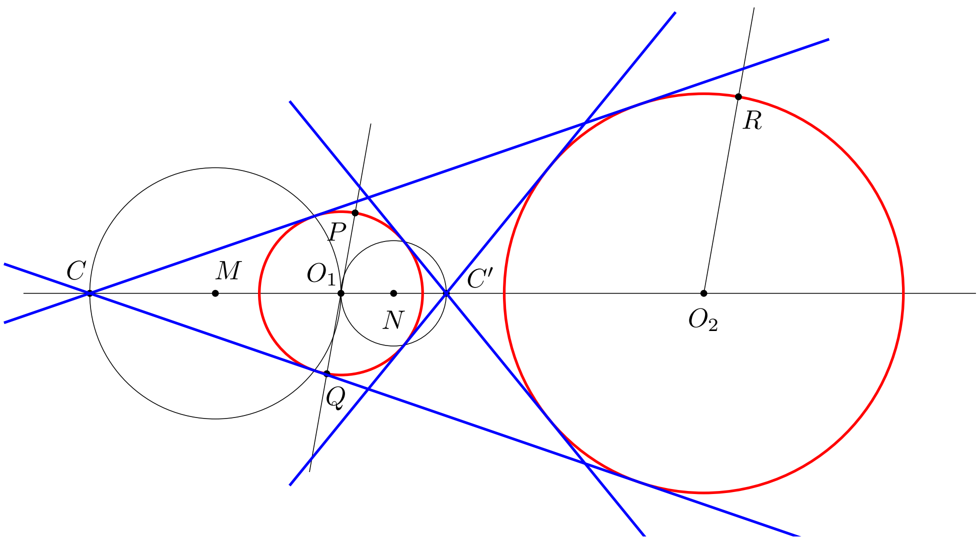

Figura 6: *Tangenti comuni a due circonferenze*

Prima di passare alla costruzione richiesta è opportuno ricordare uno dei metodi per trovare le tangenti comuni a due circonferenze di raggio diverso, $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, di centri O_1 e O_2 rispettivamente:

— si traccia una retta qualunque, distinta però dalla retta dei centri, per uno dei due centri, per esempio O_1, e si indicano con P e Q le sue intersezioni con la relativa circonferenza, $\mathscr{C}_1$;

— si traccia la semiretta per O_2 parallela a PQ, che interseca $\mathscr{C}_2$ in R;

— le rette RP ed RQ intersecano la retta dei centri in C e C' (i due punti C e C' prendono il nome di *centri di omotetia o di similitudine* delle due circonferenze): le tangenti da C e C' ad una delle due circonferenze sono tangenti anche all'altra.

Per completezza abbiamo riportato nella figura 6 la costruzione con PSTricks, comprendente anche le linee di costruzione.

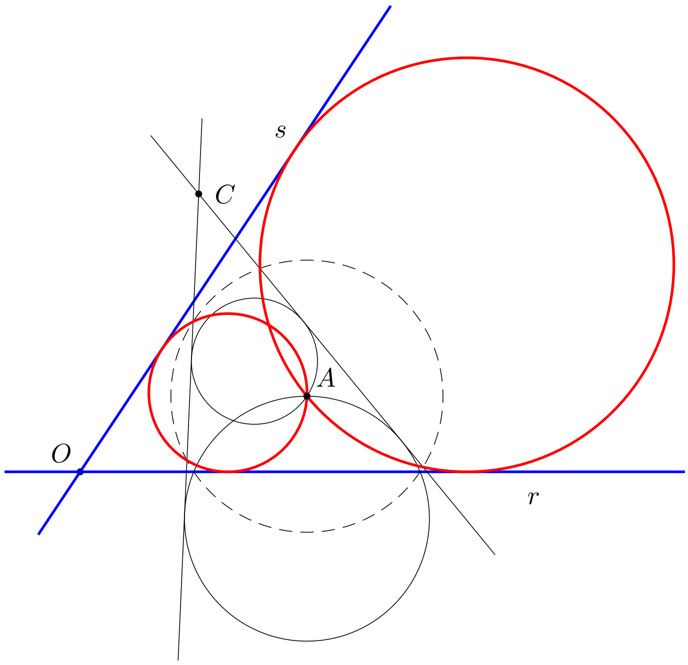

Figura 7: *Circonferenze per un punto e tangenti a due rette incidenti*

Il codice PSTricks

```
\begin{pspicture}(-1,-3)(8,6)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{1.8}
%Nodi di partenza
\pstGeonode[PointName={default,none,none,default},PointSymbol={default,none,none,default},%
     PosAngle={135,0,0,45}](0,0){O}(6,0){R}(2,3){S}(3,1){A}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-2,linewidth=1pt,linecolor=blue]{O}{R}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-3,linewidth=1pt,linecolor=blue]{O}{S}
%Circolo di inversione
\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{A}{}
%Costruzione delle inverse delle rette
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{R}{A}[A1]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{S}{A}[A2]
\pstInv{A}{\rinv}{A1}{A1'}\pstInv{A}{\rinv}{A2}{A2'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{A}{A1'}{M}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{A}{A2'}{N}
\pstCircleOA{M}{A}\pstCircleOA{N}{A}
%Costruzione tangenti comuni
```

```
\pstInterLC[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{M}{M}{A}{X}{Y}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{X}{M}{N}[N1]
\pstInterLC[PointName=none,PointSymbol=none]{N}{N1}{N}{A}{X1}{Y1}
\pstInterLL{M}{N}{X}{X1}{C}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{N}{Z}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{N}{A}{Z}{N}{T}{U}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-4,PointName=none,PointSymbol=none]{C}{T}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-4,PointName=none,PointSymbol=none]{C}{U}
%Costruzione inverse delle tangenti comuni
\pstInv{A}{\rinv}{T}{T'}\pstInv{A}{\rinv}{U}{U'}\pstInv{A}{\rinv}{C}{C'}
\pstCircleABC[PointName=none,PointSymbol=none,linecolor=red,linewidth=1pt]{A}{U'}{C'}{ZX}
\pstCircleABC[PointName=none,PointSymbol=none,linecolor=red,linewidth=1pt]{A}{T'}{C'}{ZY}
\end{pspicture}
```

7 Circonferenze per due punti e tangenti a una circonferenza

Sono dati due punti A e B, entrambi interni o entrambi esterni a una circonferenza $\mathscr{C}$, di centro O: si vogliono trovare le circonferenze passanti per A e B e tangenti a $\mathscr{C}$. È ovvio che il problema non avrebbe soluzioni se i punti fossero uno interno e uno esterno alla circonferenza. Inoltre il problema è banale se uno dei due punti, o entrambi, stanno su $\mathscr{C}$. Escludendo questo caso, una possibile costruzione utilizzando l'inversione consta dei passi seguenti:

— si considera un circolo di inversione di centro A e raggio qualunque;
— si trovano gli inversi B' del punto B e $\mathscr{C}'$ della circonferenza $\mathscr{C}$;
— si tracciano le tangenti da B' a $\mathscr{C}'$: le inverse di queste tangenti sono le circonferenze cercate.

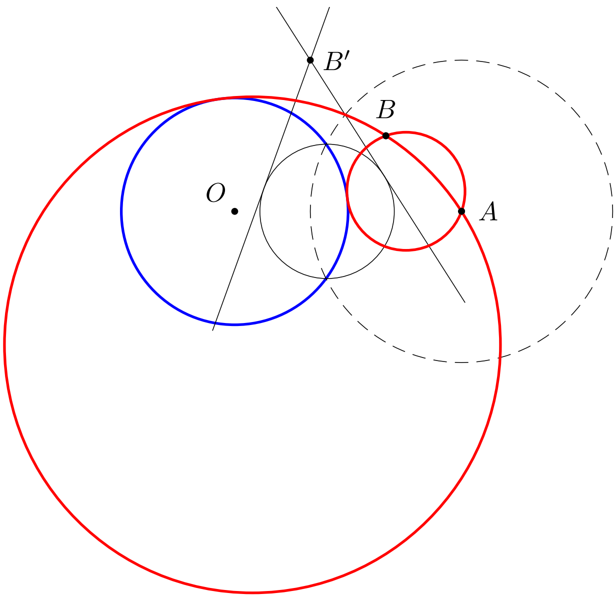

Figura 8: *Circonferenze per due punti e tangenti ad una circonferenza*

Il codice PSTricks

```
\begin{pspicture}(-1.5,-3.5)(8,5)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{2}\def\rcirc{1.5}
%Nodi di partenza
\pstGeonode[PosAngle={135,0,90}](2,2){O}(5,2){A}(4,3){B}
%Circolo di partenza
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirc},linecolor=blue,linewidth=1pt]{O}{}
%Circolo di inversione
\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{A}{}
%L'inverso del punto B
\pstInv[PointNameB=default,PointSymbolB=default]{A}{\rinv}{B}{B'}
%L'inverso del circolo O
```

```
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{A}{O}{}{R}{S}
\pstInv{A}{\rinv}{R}{R'}
\pstInv{A}{\rinv}{S}{S'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{S'}{R'}{M}
\pstCircleOA{M}{R'}
%costruzione delle tangenti da B' al circolo inverso
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{B'}{M}{N}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{M}{R'}{N}{B'}{P}{Q}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-2]{B'}{P}
\pstLineAB[nodesepA=-1,nodesepB=-2]{B'}{Q}
%Costruzione dei circoli inversi delle due rette tangenti
\pstInv{A}{\rinv}{P}{P'}
\pstInv{A}{\rinv}{Q}{Q'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{B}{P'}{X}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{B}{Q'}{Y}
\end{pspicture}
```

8 Circonferenze per un punto e tangenti a una circonferenza e a una retta

Sono dati un punto A, una retta r e un circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O: si vogliono trovare le circonferenze passanti per A e tangenti alla retta e alla circonferenza. È chiaro che il problema non ha soluzioni se A e $\mathscr{C}$ stanno da bande opposte rispetto alla retta r, oppure se A è interno alla circonferenza e r è tutta esterna. Il problema poi è abbastanza semplice se A sta sulla retta o sulla circonferenza oppure se la retta e la circonferenza sono tangenti. Il caso generale si risolve con un'inversione seguendo i passi di seguito indicati:

— si considera un circolo di inversione di centro A e raggio qualunque;
— si trovano le circonferenze inverse della retta r e del circolo $\mathscr{C}$;
— si trovano le (massimo 4) tangenti comuni alle due circonferenze inverse sopra trovate: le circonferenze inverse dele tangenti sopra trovate sono quelle cercate.

Il codice PSTricks

```
\begin{pspicture}(-2,-3)(13,9)
\psgrid[subgriddiv=1,griddots=10,gridlabels=7pt]
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{3}\def\rcirc{1.2}
%Nodi di partenza
\pstGeonode[PosAngle={0,0,0,0},PointSymbol={none,none,default,default},%
     PointName={none,none,default,default}](0,0){R}(13,0){S}(7,1){A}(8,3){O}
%retta e circolo di base
\pstLineAB[linecolor=blue,linewidth=1pt]{R}{S}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirc},linecolor=blue,linewidth=1pt]{O}{}
%circolo di inversione
\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{A}{}
%inverso della retta r
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{R}{S}{A}[AP]
\pstInv{A}{\rinv}{AP}{AP'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{A}{AP'}{M}
\pstCircleOA{M}{A}
%inverso del circolo C
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{A}{O}{O}{}{P}{Q}
\pstInv{A}{\rinv}{P}{P'}
\pstInv{A}{\rinv}{Q}{Q'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{P'}{Q'}{I}
\pstCircleOA{I}{Q'}
%determinazione dei centri di omotetia dei due circoli inversi
\pstRotation[RotAngle=90,PointName=none,PointSymbol=none]{M}{A}[AR]
\pstRotation[RotAngle=-90,PointName=none,PointSymbol=none]{M}{A}[AS]
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{M}{AR}{I}[IR]
\pstInterLC[PointName=none,PointSymbol=none]{IR}{I}{I}{Q'}{U}{V}
\pstInterLL[PointName=none,PointSymbol=none]{U}{AS}{V}{AR}{C}
\pstInterLL[PointName=none,PointSymbol=none]{U}{AR}{V}{AS}{C'}
%determinazione dei punti di tangenza e delle tangenti comuni per C
```

```
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{I}{CI}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{M}{CM}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{M}{A}{CM}{M}{I1}{I3}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{I}{Q'}{CI}{I}{I2}{I4}
\pstLineAB[nodesep=-2]{I1}{I2}
\pstLineAB[nodesep=-2]{I3}{I4}
%determinazione dei primi due circoli richiesti
\pstInv{A}{\rinv}{C}{CINV}
\pstInv{A}{\rinv}{I1}{I1'}
\pstInv{A}{\rinv}{I3}{I3'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{CINV}{A}{I1'}{X1}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{CINV}{A}{I3'}{X2}
%determinazione dei punti di tangenza e delle tangenti comuni per C'
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C'}{I}{C'I}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C'}{M}{C'M}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{M}{A}{C'M}{M}{J1}{J3}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{I}{Q'}{C'I}{I}{J2}{J4}
\pstLineAB[nodesep=-2]{J1}{J2}
\pstLineAB[nodesep=-2]{J3}{J4}
%determinazione degli altri due circoli richiesti
\pstInv{A}{\rinv}{C'}{CINV'}
\pstInv{A}{\rinv}{J1}{J1'}
\pstInv{A}{\rinv}{J3}{J3'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{CINV'}{A}{J1'}{Y1}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{CINV'}{A}{J3'}{Y2}
\end{pspicture}
```

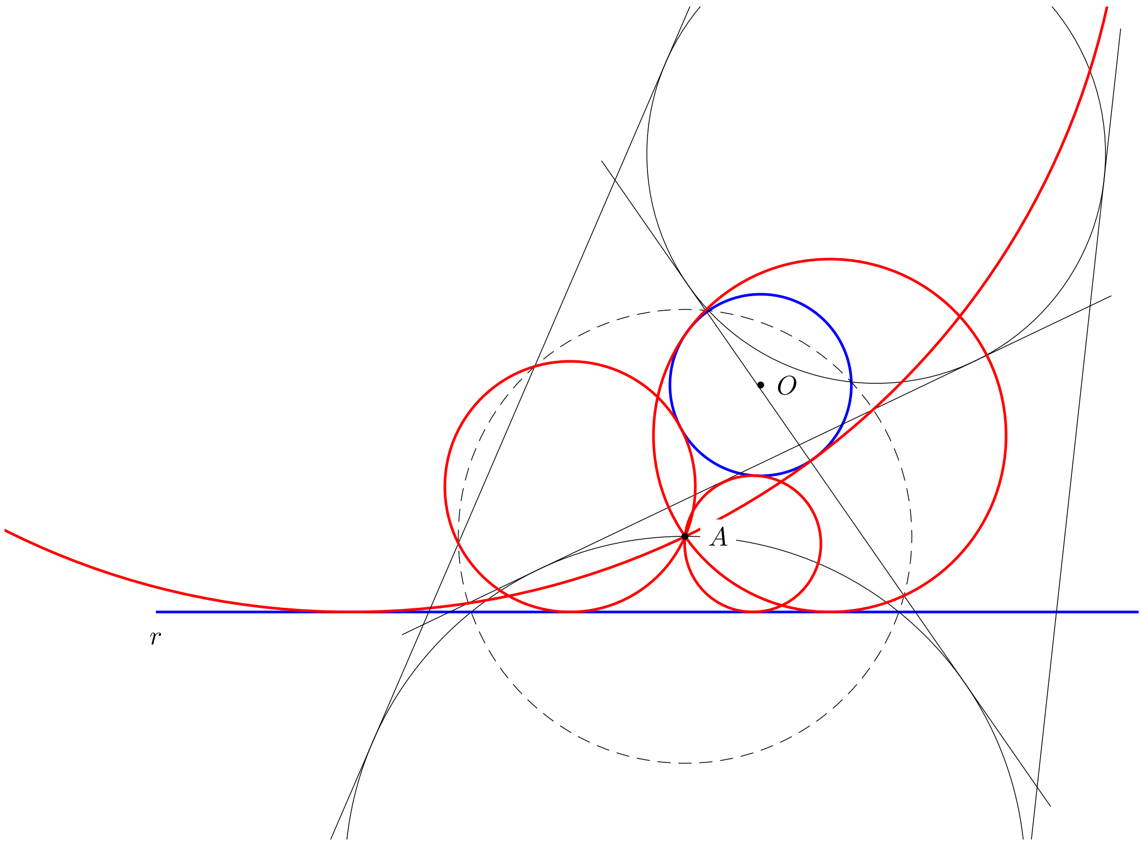

Figura 9: *Circonferenze per un punto e tangenti a una retta e a una circonferenza*

9 Circonferenze per un punto e tangenti a due circonferenze

Sono dati un punto A e due circonferenze $\mathscr{C}_1$ e $\mathscr{C}_2$, di centri O_1 e O_2 rispettivamente: si vogliono trovare le circonferenze passanti per A e tangenti alle due circonferenze. È chiaro che il problema non ha sempre soluzioni (per esempio non ne ha nel caso in cui le due circonferenze sono interne una all'altra, mentre A è esterno ad entrambe). Nel seguito proponiamo la costruzione in un caso classico, in cui il problema ha 4 soluzioni (il massimo consentito in questa situazione), utilizzando un'inversione, secondo lo schema seguente:

— si considera un'inversione di centro A e raggio qualunque;
— si trovano le circonferenze inverse delle due circonferenze date;
— si trovano le tangenti comuni alle due circonferenze: le inverse di queste tangenti comuni sono le circonferenze cercate.

Il codice PSTricks

```
\begin{pspicture}(-2,-6)(10,5)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{2}\def\rcirca{2}\def\rcircb{1}
%Nodi di partenza
\pstGeonode[PosAngle={0,0,90},PointName={O_1,O_2,default}](2,0){O1}(7,0){O2}(5,3){A}
%circoli di base
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirca},linecolor=blue,linewidth=1pt]{O1}{}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcircb},linecolor=blue,linewidth=1pt]{O2}{}
%circolo di inversione
\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{A}{}
%inversi dei due circoli base
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{A}{O1}{O1}{}{P1}{Q1}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcircb},PointName=none,PointSymbol=none]{A}{O2}{O2}{}{P2}{Q2}
\pstInv{A}{\rinv}{P1}{P1'}
\pstInv{A}{\rinv}{P2}{P2'}
\pstInv{A}{\rinv}{Q1}{Q1'}
\pstInv{A}{\rinv}{Q2}{Q2'}
```

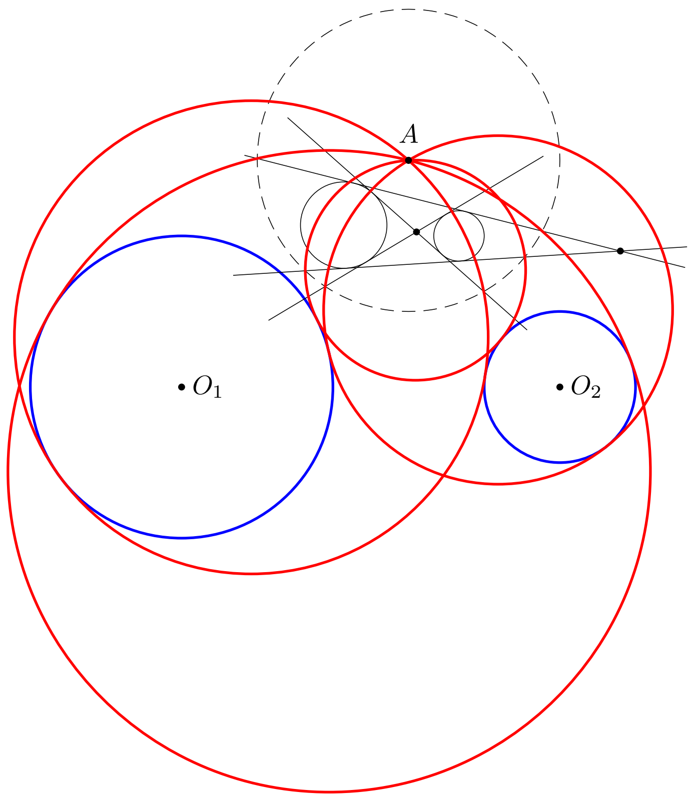

Figura 10: *Circonferenze passanti per un punto e tangenti a due circonferenze*

```
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{P1'}{Q1'}{M1}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{P2'}{Q2'}{M2}
\pstCircleOA{M1}{P1'}
\pstCircleOA{M2}{P2'}
%costruzione dei due centri di omotetia
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{M1}{Q1'}{M2}[M2']
\pstInterLC[PointName=none,PointSymbol=none]{M2}{M2'}{M2}{P2'}{Q2''}{P2''}
\pstInterLL[PointName=none]{P1'}{P2''}{Q1'}{Q2''}{C}
\pstInterLL[PointName=none]{P1'}{Q2''}{P2''}{Q1'}{C'}
%costruzione dei punti di tangenza e delle prime 2 rette tangenti
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{M1}{CM1}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{M2}{CM2}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{CM1}{C}{M1}{P1'}{X1}{Y1}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{CM2}{C}{M2}{P2'}{X2}{Y2}
\pstLineAB[nodesep=-1.5]{X1}{X2}
\pstLineAB[nodesep=-1.5]{Y1}{Y2}
%costruzione dei punti di tangenza e delle altre 2 rette tangenti
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C'}{M1}{C'M1}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{C'}{M2}{C'M2}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{C'M1}{C'}{M1}{P1'}{X'1}{Y'1}
\pstInterCC[PointName=none,PointSymbol=none]{C'M2}{C'}{M2}{P2'}{X'2}{Y'2}
\pstLineAB[nodesepA=-1.5,nodesepB=-3]{X'1}{X'2}
\pstLineAB[nodesepA=-1.5,nodesepB=-3]{Y'1}{Y'2}
%Costruzione delle circonferenze inverse delle tangenti
\pstInv{A}{\rinv}{C}{CINV}
\pstInv{A}{\rinv}{X1}{X1INV}
\pstInv{A}{\rinv}{Y1}{Y1INV}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{CINV}{X1INV}{Z1}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{CINV}{Y1INV}{Z2}
\pstInv{A}{\rinv}{C'}{C'INV}
\pstInv{A}{\rinv}{X'1}{X'1INV}
\pstInv{A}{\rinv}{Y'1}{Y'1INV}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{C'INV}{X'1INV}{Z'1}
\pstCircleABC[linecolor=red,linewidth=1pt,PointName=none,PointSymbol=none]{A}{C'INV}{Y'1INV}{Z'2}
\end{pspicture}
```

10 La dilatazione parallela

La costruzione delle circonferenze tangenti a due rette e una circonferenza, due circonferenze e una retta, oppure tre circonferenze, è più complessa di quelle considerate finora, nelle quali era sempre presente almeno un punto per cui far passare le circonferenze incognite: tutte le costruzioni si sono basate su un'inversione avente centro in quel punto. Nei tre casi rimanenti non c'è più un punto privilegiato, e se si considerasse un'inversione rispetto ad un punto qualunque il problema non si semplificherebbe, in quanto le inverse di circonferenze o rette sono sempre circonferenze o rette.

Ci sono naturalmente molte soluzioni possibili, ma volendo utilizzare solo le inversioni il miglior modo è quello di considerare uno speciale procedimento geometrico: la cosiddetta *dilatazione parallela*.

L'idea si basa sulla osservazione che segue. Immaginiamo di avere tre circonferenze, $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3$, di centri rispettivi O_1, O_2, O_3 e raggi r_1, r_2, r_3, e di aver trovato una delle circonferenze loro tangenti comuni: la circonferenza $\mathscr{C}$ di centro C e raggio r. Immaginiamo ora di "ridurre" la più piccola delle tre circonferenze (in questo caso $\mathscr{C}_2$) al suo centro, di far diminuire il raggio di $\mathscr{C}_3$ da r_3 a $r_3 - r_2$, ottenendo $\mathscr{C}_3'$, e di far aumentare il raggio di $\mathscr{C}_1$ da r_1 a $r_1 + r_2$, ottenendo $\mathscr{C}_1'$. La circonferenza di centro di centro C e raggio $r + r_2$ passa per O_2 ed è tangente alle due circonferenze $\mathscr{C}_3'$ e $\mathscr{C}_1'$.

In sostanza possiamo concludere che, invece di costruire subito la circonferenza $\mathscr{C}$ tangente alle tre circonferenze date, avremmo potuto costruire prima la circonferenza $\mathscr{C}'$ tangente a $\mathscr{C}_3'$ e $\mathscr{C}_1'$ e passante per O_2: e questo è un problema che già abbiamo imparato a risolvere per inversione.

In generale succede che si devono considerare, sia nelle circonferenze date che in quelle ottenute applicando l'inversione, "aumenti" e "diminuzioni" dei raggi. Inoltre nel caso si abbiano problemi con rette e circonferenze, invece che solo con circonferenze, la "dilatazione parallela" applicata alle rette consisterà nel costruire rette parallele alle rette date, e traslate perpendicolarmente, in un senso o nell'altro, di un tratto pari al raggio della circonferenza più piccola (che è quella che viene "ridotta" a un punto).

In conclusione: date nel piano alcune rette e alcune circonferenze, operare una dilatazione parallela significa:

— individuare la circonferenza di raggio più piccolo, diciamolo ϱ, riducendola ad un punto;
— aumentare e diminuire i raggi delle altre circonferenze di una quantità uguale a ϱ;
— traslare perpendicolarmente, nei due versi possibili, le rette date di un quantità uguale a ϱ.

Il sistema di rette e circonferenze è allora ridotto ad un nuovo sistema costituito da un punto, da rette e da circonferenze.

Questa idea permette di ricondurre i casi del problema di Apollonio in cui non sono presenti punti, a casi in cui invece è presente almeno un punto, e che sono già stati trattati.

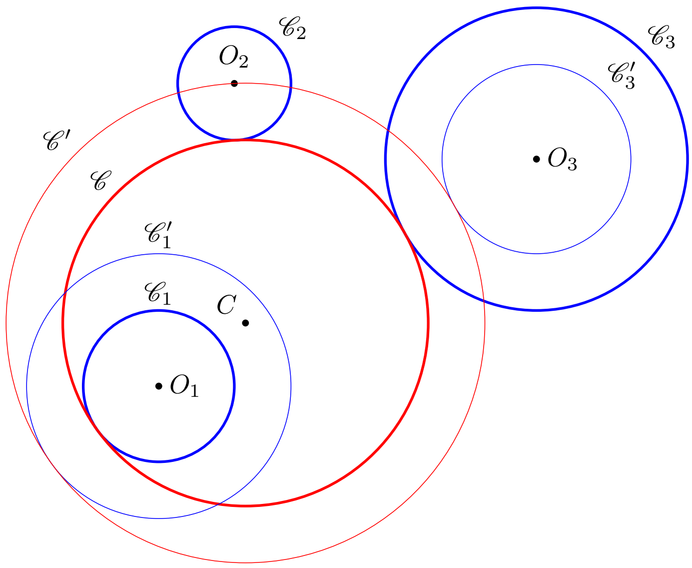

Figura 11: *Dilatazione parallela*

11 Circonferenze tangenti a due rette e a una circonferenza date

Sono date due rette, r ed s, e una circonferenza $\mathscr{C}$ di centro O e raggio ϱ: si vogliono costruire le circonferenze tangenti alle due rette e alla circonferenza date. Il problema ammette fino a otto soluzioni distinte ed è molto semplice se le due rette sono parallele. Nel caso di due rette incidenti, volendo procedere usando solo l'inversione, conviene servirsi della *dilatazione parallela*. Si procede secondo il seguente schema:

— si "riduce" la circonferenza data al suo centro, O;
— si costruiscono le parallele, r' ed s' alle rette date, "avvicinandole" al punto O di un tratto ϱ;
— si costruiscono le parallele, r'' ed s'' alle rette date, "allontanandole" dal punto O di un tratto ϱ;
— si trovano le circonferenze per O e tangenti alle coppie di rette (r', s'), (r', s''), (r'', s'), (r'', s''), con il metodo ormai noto di un'inversione di centro O e raggio qualunque (si può anche usare come circolo di inversione lo stesso circolo $\mathscr{C}$);
— mediante la dilatazione parallela inversa della precedente (quella cioè che ritrasforma il punto O nella circonferenza $\mathscr{C}$) si ottengono le circonferenze (massimo 8) che risolvono il problema.

Prestare attenzione al fatto che la costruzione indicata può anche produrre alcune circonferenze che non soddisfano il problema: nel caso che stiamo considerando (due rette incidenti) le circonferenze inverse ammettono due tangenti in comune, e quindi si possono costruire sempre otto circonferenze, ma alcune di esse possono essere tangenti solo a due delle tre figure (due rette e una circonferenza) date. Occorre una attenta valutazione delle varie situazioni che si possono presentare.

La costruzione con PSTricks

La costruzione della figura con PSTricks non è sostanzialmente più complessa di quelle finora effettuate, ma richiede un gran numero di passaggi e di costruzioni intermedie. Per facilitare la lettura del codice abbiamo preferito utilizzare una semplicissima macro per la costruzione delle tangenti comuni a due circonferenze qualunque del piano. Il codice, riportato di seguito, definisce un comando dal nome `\pstPtiTang`, che richiede 7 parametri, di cui uno opzionale.

- — La macro disegna i punti di tangenza con un nome, come indicato di seguito. Nelle applicazioni l'evidenziazione esplicita di questi punti non è utile, anche perché alcuni di essi potrebbero non esistere (e pst-eucl in questo caso li traccia in posizioni di default). La loro evidenziazione è però necessaria in fase di costruzione della figura. Inserendo le opzioni `PointName=none` e `PointSymbol=none`, si evita il tracciamento e la denominazione dei punti.
- — Il primo e secondo parametro obbligatori sono il centro e un punto che individuano la prima circonferenza.
- — Il terzo e quarto parametro obbligatori sono il centro e un punto che individuano la seconda circonferenza.
- — Il quinto parametro obbligatorio rappresenta la prima parte del nome dei quattro punti di tangenza con la prima circonferenza (i punti saranno poi identificati da un numero progressivo).
- — Il sesto parametro obbligatorio rappresenta la prima parte del nome dei quattro punti di tangenza con la seconda circonferenza (i punti saranno poi identificati da un numero progressivo).

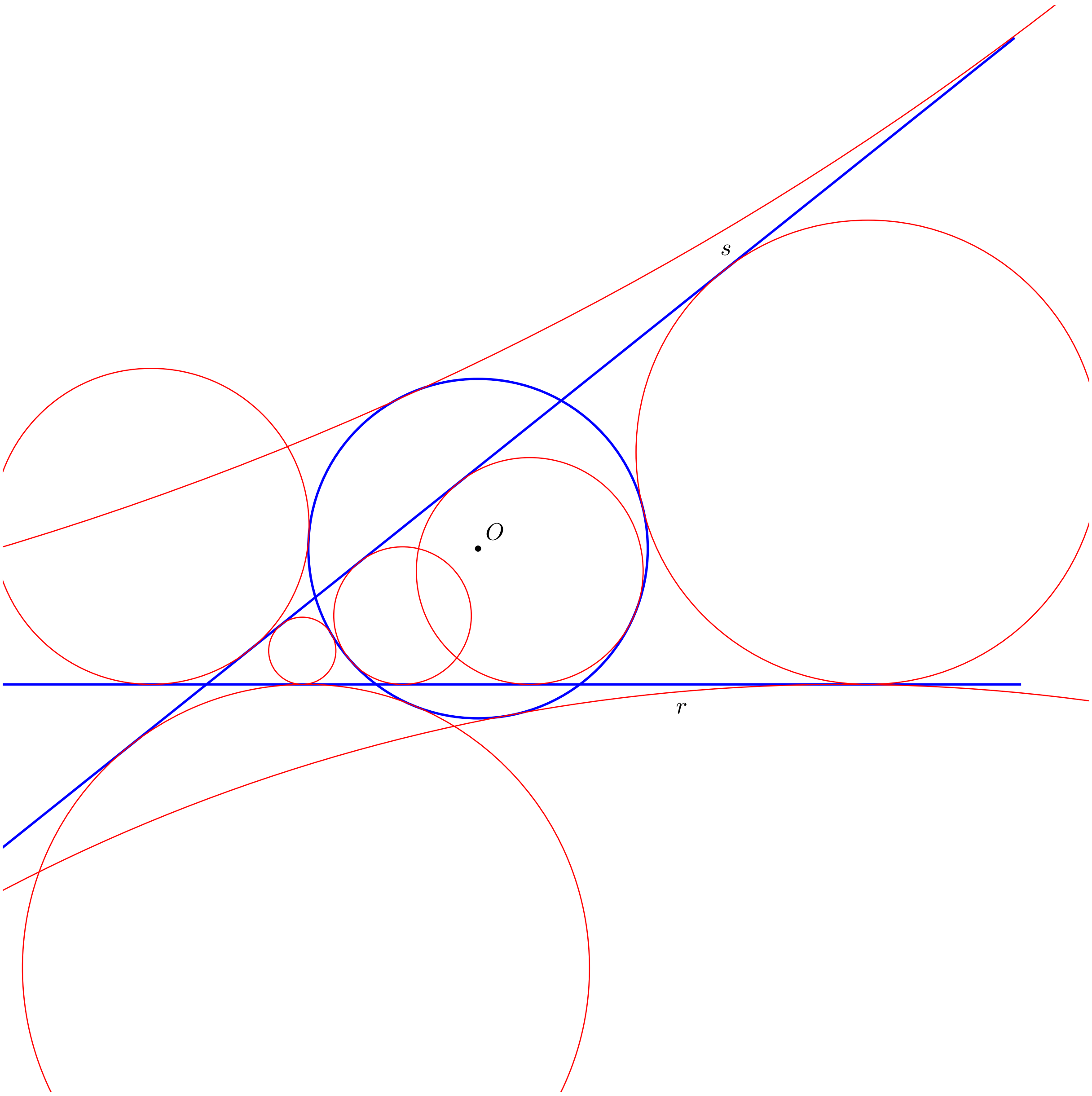

Figura 12: *Circonferenze tangenti a due rette e a una circonferenza date: la figura finale, senza linee di costruzione. Alcune circonferenze sono troppo grandi per essere contenute nel foglio*

Il codice PSTricks della macro per tracciare i punti di tangenza

```
\makeatletter
\newcommand{\pstPtiTang}[7][]{%
{\psset{PointSymbol=none,PointName=none}%
\pstInterLC{#2}{#4}{#2}{#3}{@I1}{@I2}%
\pstRotation[RotAngle=90]{#2}{@I1,@I2}[@I1',@I2']%
\pstInterLC{#2}{#4}{#4}{#5}{@J1}{@J2}%
\pstRotation[RotAngle=90]{#4}{@J1}[@J1']%
\pstInterLL{#2}{#4}{@J1'}{@I2'}{@C1}%
\pstInterLL{#2}{#4}{@J1'}{@I1'}{@C2}%
\pstMiddleAB{@C1}{#4}{@M1}%
\pstMiddleAB{@C2}{#4}{@M2}%
\pstMiddleAB{@C1}{#2}{@N1}%
\pstMiddleAB{@C2}{#2}{@N2}%
}%
\pstInterCC[#1]{@M1}{#4}{#4}{#5}{#61}{#62}%
\pstInterCC[#1]{@M2}{#4}{#4}{#5}{#63}{#64}%
\pstInterCC[#1]{@N1}{#2}{#2}{#3}{#71}{#72}%
\pstInterCC[#1]{@N2}{#2}{#2}{#3}{#73}{#74}%
}
\makeatother
```

Come già più volte segnalato, si tratta di un codice estremamente semplice e adatto ad essere compreso anche da chi conosce solo i rudimenti della programmazione LaTeX.

Il codice PSTricks completo della figura

```
\begin{pspicture}(-3,-10)(13,13)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{2.5}\def\rcirc{2.5}%uso lo stesso raggio, ma con due nomi diversi, per poter%
%verificare che il raggio del circolo di inversione è ininfluente ai fini della costruzione
%nodi e figure di partenza
\pstGeonode[PointName={none,r,s,default},PointSymbol={none,none,none,default},%
PosAngle={135,-90,180,45}](0,0){C}(7,0){R}(8,6.4){S}(4,2){O}
\pstLineAB[nodesepA=-4,nodesepB=-5,linewidth=1pt,linecolor=blue]{C}{R}
\pstLineAB[nodesepA=-5,nodesepB=-3,linewidth=1pt,linecolor=blue]{C}{S}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirc},linewidth=1pt,linecolor=blue]{O}{}
%il circolo di inversione (da disegnare solo se è diverso dal circolo base)
%\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{O}{}
%costruzione dei 'vettori traslazione'
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{R}{O}[OPR]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{S}{O}[OPS]
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OPR}{O}{}{OR'}{OR}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OPS}{O}{}{OS'}{OS}
%costruzione delle rette 'avvicinate' ad O
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OR}{O}{C,R}[C'R,R']
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OS}{O}{C,S}[C'S,S']
\pstLineAB[linestyle=dashed,nodesepA=-4,nodesepB=-5]{C'R}{R'}
\pstLineAB[linestyle=dashed,nodesepA=-6,nodesepB=-3]{C'S}{S'}
%costruzione delle rette 'allontanate' da O
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OR}{C,R}[C''R,R'']
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OS}{C,S}[C''S,S'']
\pstLineAB[linestyle=dashed,nodesepA=-4,nodesepB=-5]{C''R}{R''}
\pstLineAB[linestyle=dashed,nodesepA=-3,nodesepB=-5]{C''S}{S''}
%costruzione delle 4 circ.inverse delle rette traslate
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C'R}{R'}{O}[O1R]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C''R}{R''}{O}[O2R]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C'S}{S'}{O}[O1S]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C''S}{S''}{O}[O2S]
\pstInv{O}{\rinv}{O1R}{O1R'}
\pstInv{O}{\rinv}{O2R}{O2R'}
\pstInv{O}{\rinv}{O1S}{O1S'}
\pstInv{O}{\rinv}{O2S}{O2S'}
```

```
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O1R'}{M1R}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O2R'}{M2R}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O1S'}{M1S}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O2S'}{M2S}
\pstCircleOA{M1R}{O}
\pstCircleOA{M2R}{O}
\pstCircleOA{M1S}{O}
\pstCircleOA{M2S}{O}
%costruzione delle tangenti e delle circonferenze inverse, a due a due
%%uno-due
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1R}{O}{M2S}{O}{t}{u}
\pstInv{O}{\rinv}{t3}{t3'}\pstInv{O}{\rinv}{u3}{u3'}
\pstInv{O}{\rinv}{t4}{t4'}\pstInv{O}{\rinv}{u4}{u4'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t3'}{u3'}{TU3}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t4'}{u4'}{TU4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{TU3}{O}{O}{}{OTU3}{OTU3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU3}{OTU3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{TU4}{O}{O}{}{OTU4}{OTU4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU4}{OTU4}
%%Fine uno-due
%%tre-quattro
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1R}{O}{M1S}{O}{v}{w}
\pstInv{O}{\rinv}{v3}{v3'}\pstInv{O}{\rinv}{w3}{w3'}
\pstInv{O}{\rinv}{v4}{v4'}\pstInv{O}{\rinv}{w4}{w4'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v3'}{w3'}{VW3}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v4'}{w4'}{VW4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{VW3}{O}{O}{}{OVW3}{OVW3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{VW3}{OVW3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{VW4}{O}{O}{}{OVW4}{OVW4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{VW4}{OVW4}
%%Fine tre-quattro
%%cinque-sei
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2R}{O}{M1S}{O}{x}{y}
\pstInv{O}{\rinv}{x3}{x3'}\pstInv{O}{\rinv}{y3}{y3'}
\pstInv{O}{\rinv}{x4}{x4'}\pstInv{O}{\rinv}{y4}{y4'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x3'}{y3'}{XY3}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x4'}{y4'}{XY4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{XY3}{O}{O}{}{OXY3}{OXY3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY3}{OXY3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{XY4}{O}{O}{}{OXY4}{OXY4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY4}{OXY4}
%%Fine cinque-sei
%%sette-otto
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2R}{O}{M2S}{O}{z}{j}
\pstInv{O}{\rinv}{z3}{z3'}\pstInv{O}{\rinv}{j3}{j3'}
\pstInv{O}{\rinv}{z4}{z4'}\pstInv{O}{\rinv}{j4}{j4'}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z3'}{j3'}{ZJ3}
\pstCircleABC[linecolor=red,linestyle=dashed,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z4'}{j4'}{ZJ4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ3}{O}{O}{}{OZJ3}{OZJ3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ3}{OZJ3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirc},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ4}{O}{O}{}{OZJ4}{OZJ4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ4}{OZJ4}
%%Fine sette-otto
%Tracciamento delle rette tangenti, solo per completezza della figura
\pstLineAB[nodesep=-4]{t3}{u3}
\pstLineAB[nodesep=-4]{t4}{u4}
\pstLineAB[nodesep=-4]{v3}{w3}
\pstLineAB[nodesep=-4]{v4}{w4}
```

```
\pstLineAB[nodesep=-4]{x3}{y3}
\pstLineAB[nodesep=-4]{x4}{y4}
\pstLineAB[nodesep=-4]{z3}{j3}
\pstLineAB[nodesep=-4]{z4}{j4}
\end{pspicture}
```

La figura 12 non mostra le linee di costruzione, in quanto altrimenti diventerebbe illeggibile. Mostriamo invece nella figura 15, in fondo al fascicolo, solo le linee di costruzione, per rendere evidente la complessità della costruzione stessa. Si deve tenere presente che, in un disegno “a mano”, sarebbero presenti anche le linee necessarie alla individuazione dei punti di contatto tra le circonferenze, inverse delle due rette, e le loro tangenti comuni, linee che qui sono sostituite dalla macro citata. La costruzione con PSTricks può comunque risolvere agevolmente questi problemi tecnici, in quanto le righe di codice relative alle quattro coppie di circonferenze da considerare sono praticamente identiche, salvo una facile modifica dei nomi dei nodi.

12 Circonferenze tangenti a due circonferenze e a una retta date

Sono date una retta, r, e due circonferenze $\mathscr{C}_1$, di centro O_1, e $\mathscr{C}_2$, di centro O_2, con raggi rispettivi $\varrho_1 < \varrho_2$: si vogliono costruire le circonferenze tangenti alle due circonferenze e alla retta date. Il problema ammette fino a otto soluzioni distinte e, tranne alcuni casi banali, volendo procedere usando solo l'inversione, conviene servirsi della *dilatazione parallela*. Si procede secondo uno schema quasi identico al caso di due rette e una circonferenza:

- — si “riduce” la circonferenza più piccola al suo centro, O_1;
- — si costruiscono le parallele, r' ed r'' alla retta data, “avvicinandola” o “allontandola” dal punto O_1 di un tratto ϱ_1;
- — si costruiscono le circonferenze, $\mathscr{C}_2'$ e $\mathscr{C}_2''$ con centro in O_2 e raggio aumentato o diminuito, rispetto a ϱ_2, di un tratto ϱ_1;
- — si trovano le circonferenze per O_1 e tangenti alle coppie $(r', \mathscr{C}_2')$, $(r', \mathscr{C}_2'')$, $(r'', \mathscr{C}_2')$, $(r'', \mathscr{C}_2'')$, con il metodo ormai noto di un'inversione di centro O_1 e raggio qualunque (si può anche usare come circolo di inversione lo stesso circolo $\mathscr{C}_1$);
- — mediante la dilatazione parallela inversa della precedente (quella cioè che ritrasforma il punto O_1 nella circonferenza $\mathscr{C}_1$) si ottengono le circonferenze (massimo 8) che risolvono il problema.

Prestare attenzione al fatto che la costruzione indicata può produrre fino a 16 circonferenze (ci sono fino ad un massimo di 4 tangenti comuni alle 4 coppie di circonferenze inverse), ma alcune non soddisfano il problema: si deve fare una opportuna valutazione caso per caso.

La costruzione con PSTricks

Riportiamo solo il codice completo della figura e il grafico finale, senza le linee di costruzione, in quanto la figura diventerebbe altrimenti illeggibile.

```
\begin{pspicture*}(-3,-1)(13,9)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{1}\def\rcirca{1}\def\rcircb{2}%uso lo stesso raggio per il circolo piccolo
%e per quello di inversione, ma con due nomi diversi, per poter verificare che
%il raggio del circolo di inversione è ininfluente ai fini della costruzione
%nodi e figure di partenza
\pstGeonode[PointName={none,r,O_1,O_2},PointSymbol={none,none,default,default},%
PosAngle={135,-90,0,0}](0,0){C}(7,0){R}(4,1.5){O}(7.5,5){D}
\pstLineAB[nodesepA=-4,nodesepB=-5,linewidth=1pt,linecolor=blue]{C}{R}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirca},linewidth=1pt,linecolor=blue]{O}{}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcircb},linewidth=1pt,linecolor=blue]{D}{}
%il circolo di inversione (da disegnare solo se è diverso dal circolo base)
%\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{O}{}
%costruzione dei 'vettori traslazione'
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C}{R}{O}[OPR]
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OPR}{O}{}{OR'}{OR}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{D}{O}{}{OS'}{OS}
%costruzione della retta e circonferenza 'avvicinate' ad O
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OR}{O}{C,R}[C'R,R']
\pstLineAB[linestyle=none]{C'R}{R'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcircb},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{D}{D}{}{DS}{DS'}
```

```
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OS}{O}{DS}[DS1]
\pstCircleOA[linestyle=none]{D}{DS1}
%costruzione della retta e circonferenza 'allontanate' da O
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OR}{C,R}[C''R,R'']
\pstLineAB[linestyle=none]{C''R}{R''}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OS}{DS}[DS2]
\pstCircleOA[linestyle=none]{D}{DS2}
%costruzione delle 2 circ.inverse delle rette traslate
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C'R}{R'}{O}[O1R]
\pstProjection[PointName=none,PointSymbol=none]{C''R}{R''}{O}[O2R]
\pstInv{O}{\rinv}{O1R}{O1R'}
\pstInv{O}{\rinv}{O2R}{O2R'}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O1R'}{M1R}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{O2R'}{M2R}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M1R}{O}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M2R}{O}
%costruzione delle 2 circ.inverse delle circonferenze traslate
\pstInv{O}{\rinv}{DS1}{DS1I}
\pstInv{O}{\rinv}{DS2}{DS2I}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OS}{DS'}[DS1']
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OS}{O}{DS'}[DS2']
\pstInv{O}{\rinv}{DS1'}{DS1'I}
\pstInv{O}{\rinv}{DS2'}{DS2'I}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{DS1I}{DS1'I}{M1D}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{DS2I}{DS2'I}{M2D}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M1D}{DS1I}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M2D}{DS2I}
%costruzione delle tangenti e delle circonferenze inverse, a due a due
%%uno-due
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1R}{O}{M2D}{DS2I}{t}{u}
\pstInv{O}{\rinv}{t1}{t1'}\pstInv{O}{\rinv}{u1}{u1'}
\pstInv{O}{\rinv}{t2}{t2'}\pstInv{O}{\rinv}{u2}{u2'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t1'}{u1'}{TU3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t2'}{u2'}{TU4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU3}{O}{O}{}{OTU3}{OTU3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU3}{OTU3'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU4}{O}{O}{}{OTU4}{OTU4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU4}{OTU4'}
%%Fine uno-due
%%tre-quattro
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2R}{O}{M2D}{DS2I}{v}{w}
\pstInv{O}{\rinv}{v3}{v3'}\pstInv{O}{\rinv}{w3}{w3'}
\pstInv{O}{\rinv}{v4}{v4'}\pstInv{O}{\rinv}{w4}{w4'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v3'}{w3'}{TU3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v4'}{w4'}{TU4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU3}{O}{O}{}{OTU3}{OTU3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU3}{OTU3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU4}{O}{O}{}{OTU4}{OTU4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU4}{OTU4}
%%Fine tre-quattro
%%cinque-sei
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2R}{O}{M1D}{DS1I}{x}{y}
\pstInv{O}{\rinv}{x2}{x2'}\pstInv{O}{\rinv}{y2}{y2'}
\pstInv{O}{\rinv}{x1}{x1'}\pstInv{O}{\rinv}{y1}{y1'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x2'}{y2'}{XY3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x1'}{y1'}{XY4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{XY3}{O}{O}{}{OXY3}{OXY3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY3}{OXY3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{XY4}{O}{O}{}{OXY4}{OXY4'}
```

```
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY4}{OXY4}
%%Fine cinque-sei
%%sette-otto
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1R}{O}{M1D}{DS1I}{z}{j}
\pstInv{O}{\rinv}{z3}{z3'}\pstInv{O}{\rinv}{j3}{j3'}
\pstInv{O}{\rinv}{z4}{z4'}\pstInv{O}{\rinv}{j4}{j4'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z3'}{j3'}{ZJ3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z4'}{j4'}{ZJ4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ3}{O}{O}{}{OZJ3}{OZJ3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ3}{OZJ3'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ4}{O}{O}{}{OZJ4}{OZJ4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ4}{OZJ4'}
%%Fine sette-otto
\end{pspicture*}
```

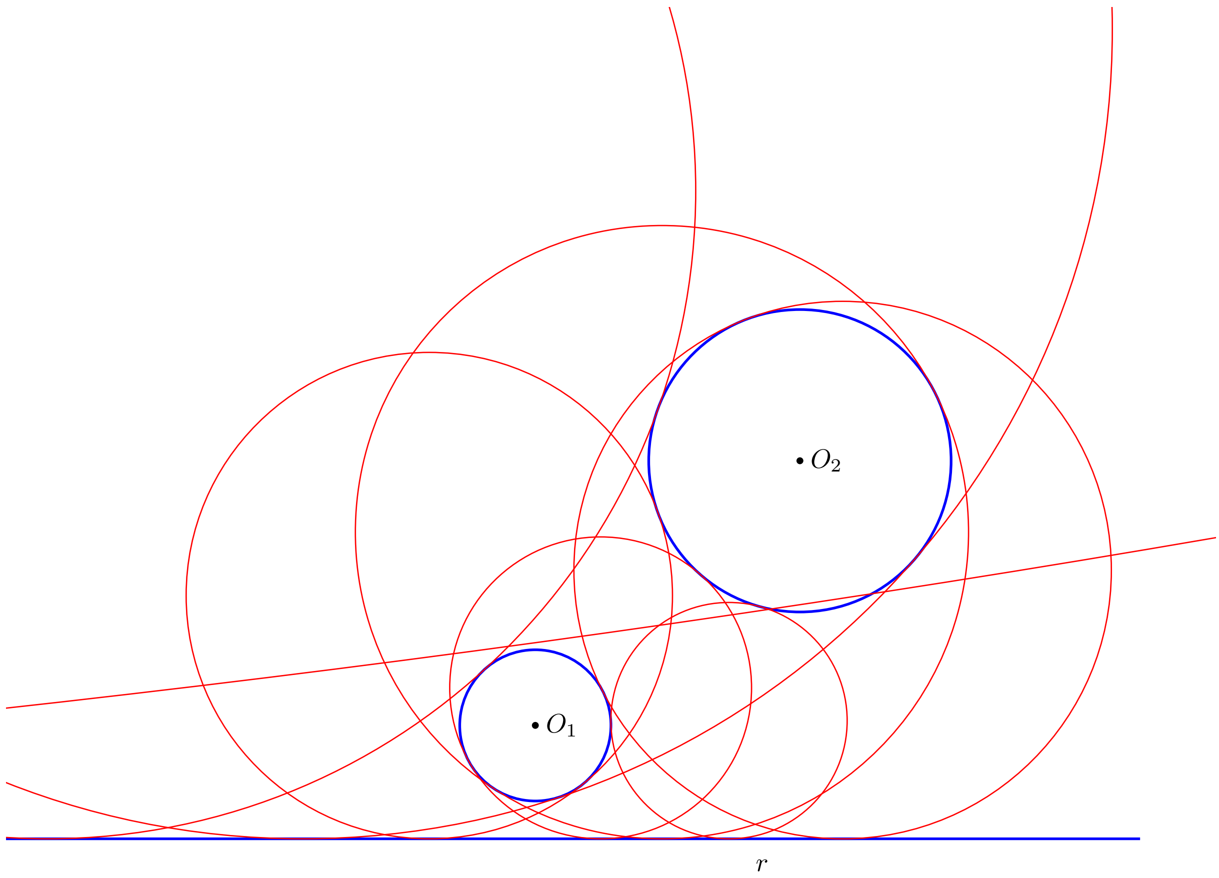

Figura 13: *Circonferenze tangenti a due circonferenze e a una retta date*

13 Circonferenze tangenti a tre circonferenze date

Si tratta del problema di Apollonio vero e proprio: sono date tre circonferenze $\mathscr{C}_1$, di centro O_1, $\mathscr{C}_2$, di centro O_2, e $\mathscr{C}_3$, di centro O_3, con raggi rispettivi $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$: si vogliono costruire le circonferenze tangenti alle tre circonferenze date. Il problema ammette fino a otto soluzioni distinte e, tranne alcuni casi banali, volendo procedere usando solo l'inversione, conviene servirsi della *dilatazione parallela*. Si procede secondo uno schema praticamente identico al caso di due rette e una circonferenza o di due circonferenze e una retta.

Anche qui occorre prestare attenzione al fatto che la costruzione indicata può produrre fino a 16 circonferenze (ci sono fino ad un massimo di 4 tangenti comuni alle 4 coppie di circonferenze inverse), ma alcune non soddisfano il problema: si deve fare una opportuna valutazione caso per caso.

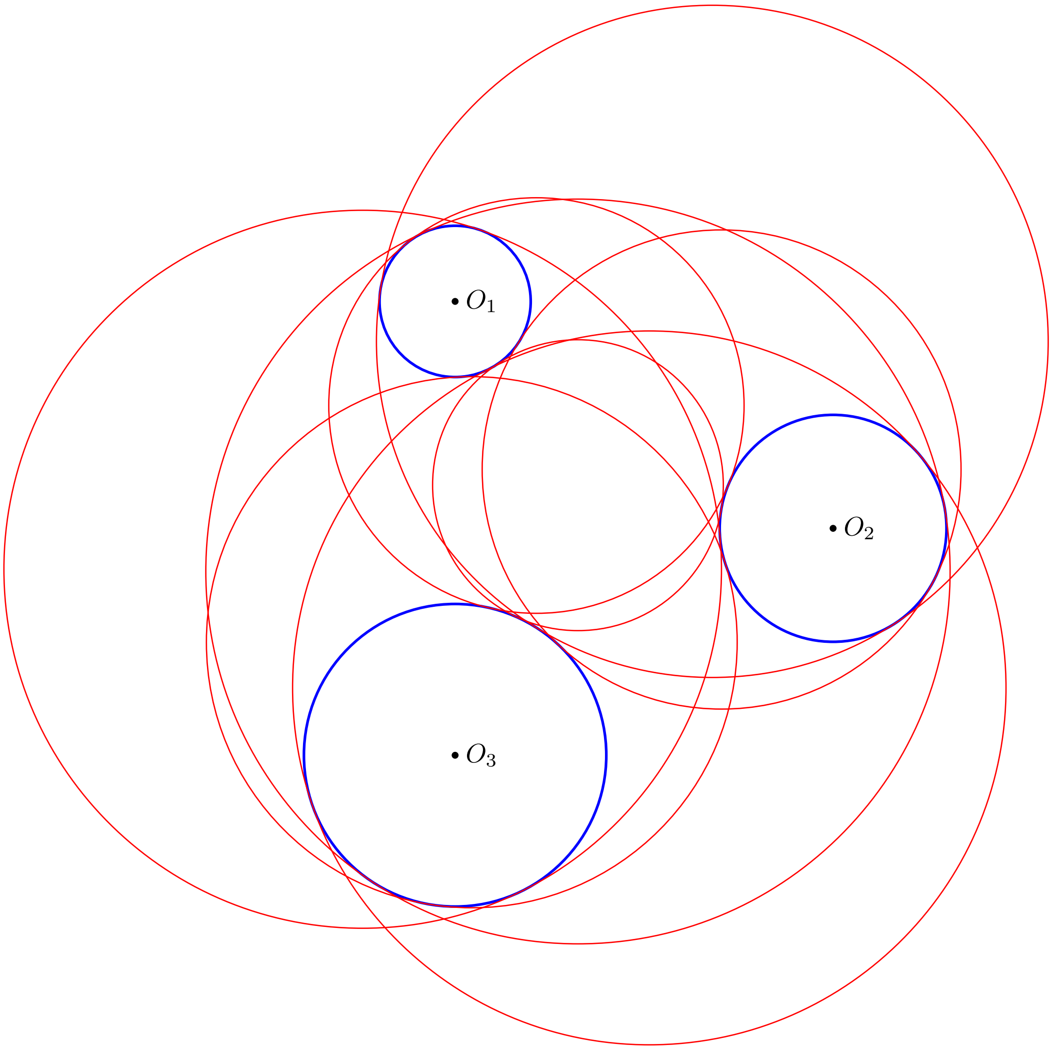

Figura 14: *Circonferenze tangenti a tre circonferenze date*

La costruzione con PSTricks

Riportiamo solo il codice completo della figura e il grafico finale, senza le linee di costruzione, in quanto la figura diventerebbe altrimenti illeggibile.

```
\begin{pspicture*}(-6,-4.5)(8,10.5)
\psset{linewidth=0.3pt}
\def\rinv{4}\def\rcirca{1}\def\rcircb{1.5}\def\rcircc{2}%uso lo stesso raggio per il circolo
%più piccolo e per quello di inversione, ma con due nomi diversi, per poter verificare
%che il raggio del circolo di inversione è ininfluente ai fini della costruzione
%nodi e figure di partenza
\pstGeonode[PointName={O_3,O_2,O_1}](0,0){E}(5,3){D}(0,6){O}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcirca},linewidth=1pt,linecolor=blue]{O}{}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcircb},linewidth=1pt,linecolor=blue]{D}{}
\pstCircleOA[Radius=\pstDistVal{\rcircc},linewidth=1pt,linecolor=blue]{E}{}
%il circolo di inversione (da disegnare solo se è diverso dal circolo base)
%\pstCircleOA[linestyle=dashed,Radius=\pstDistVal{\rinv}]{O}{}
%costruzione dei 'vettori traslazione'
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{D}{O}{}{OS'}{OS}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{E}{O}{}{OR'}{OR}
%costruzione delle circonferenze 'avvicinate' ad O
```

```
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcircb},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{D}{D}{}{DS}{DS'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcircc},PointName=none,PointSymbol=none]{O}{E}{E}{}{ER}{ER'}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OS}{O}{DS}[DS1]
\pstCircleOA[linestyle=none]{D}{DS1}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OR}{O}{ER}[ER1]
\pstCircleOA[linestyle=none]{E}{ER1}
%costruzione delle circonferenze 'allontanate' da O
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OS}{DS}[DS2]
\pstCircleOA[linestyle=none]{D}{DS2}
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OR}{ER}[ER2]
\pstCircleOA[linestyle=none]{E}{ER2}
%costruzione delle inverse delle circonferenze 'traslate', per C2
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OS}{DS'}[DS1']
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OS}{O}{DS'}[DS2']
\pstInv{O}{\rinv}{DS1}{DS1I}
\pstInv{O}{\rinv}{DS1'}{DS1'I}
\pstInv{O}{\rinv}{DS2}{DS2I}
\pstInv{O}{\rinv}{DS2'}{DS2'I}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{DS1I}{DS1'I}{M1}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{DS2I}{DS2'I}{M2}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M1}{DS1I}
\pstCircleOA[linestyle=none]{M2}{DS2I}
%costruzione delle inverse delle circonferenze 'traslate', per C3
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{O}{OR}{ER'}[ER1']
\pstTranslation[PointName=none,PointSymbol=none]{OR}{O}{ER'}[ER2']
\pstInv{O}{\rinv}{ER1}{ER1I}
\pstInv{O}{\rinv}{ER1'}{ER1'I}
\pstInv{O}{\rinv}{ER2}{ER2I}
\pstInv{O}{\rinv}{ER2'}{ER2'I}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{ER1I}{ER1'I}{N1}
\pstMiddleAB[PointName=none,PointSymbol=none]{ER2I}{ER2'I}{N2}
\pstCircleOA[linestyle=none]{N1}{ER1I}
\pstCircleOA[linestyle=none]{N2}{ER2I}
%costruzione delle tangenti e delle circonferenze inverse, a due a due
%%uno-due
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1}{DS1I}{N1}{ER1I}{t}{u}
\pstInv{O}{\rinv}{t3}{t3'}\pstInv{O}{\rinv}{u3}{u3'}
\pstInv{O}{\rinv}{t4}{t4'}\pstInv{O}{\rinv}{u4}{u4'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t3'}{u3'}{TU3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{t4'}{u4'}{TU4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU3}{O}{O}{}{OTU3}{OTU3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU3}{OTU3'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{TU4}{O}{O}{}{OTU4}{OTU4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{TU4}{OTU4}
%%Fine uno-due
%%tre-quattro
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M1}{DS1I}{N2}{ER2I}{v}{w}
\pstInv{O}{\rinv}{v2}{v2'}\pstInv{O}{\rinv}{w2}{w2'}
\pstInv{O}{\rinv}{v1}{v1'}\pstInv{O}{\rinv}{w1}{w1'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v2'}{w2'}{VW3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{v1'}{w1'}{VW4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{VW3}{O}{O}{}{OVW3}{OVW3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{VW3}{OVW3'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{VW4}{O}{O}{}{OVW4}{OVW4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{VW4}{OVW4}
%%Fine tre-quattro
%%cinque-sei
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2}{DS2I}{N1}{ER1I}{x}{y}
\pstInv{O}{\rinv}{x1}{x1'}\pstInv{O}{\rinv}{y1}{y1'}
\pstInv{O}{\rinv}{x2}{x2'}\pstInv{O}{\rinv}{y2}{y2'}
```

```
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x1'}{y1'}{XY3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{x2'}{y2'}{XY4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{XY3}{O}{O}{}{OXY3}{OXY3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY3}{OXY3'}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{XY4}{O}{O}{}{OXY4}{OXY4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{XY4}{OXY4}
%%Fine cinque-sei
%%sette-otto
\pstPtiTang[PointName=none,PointSymbol=none]{M2}{DS2I}{N2}{ER2I}{z}{j}
\pstInv{O}{\rinv}{z3}{z3'}\pstInv{O}{\rinv}{j3}{j3'}
\pstInv{O}{\rinv}{z4}{z4'}\pstInv{O}{\rinv}{j4}{j4'}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z3'}{j3'}{ZJ3}
\pstCircleABC[linestyle=none,PointName=none,PointSymbol=none]{O}{z4'}{j4'}{ZJ4}
%%costruzione dei circoli finali
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ3}{O}{O}{}{OZJ3}{OZJ3'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ3}{OZJ3}
\pstInterLC[Radius=\pstDistVal{\rcirca},PointName=none,PointSymbol=none]{ZJ4}{O}{O}{}{OZJ4}{OZJ4'}
\pstCircleOA[linecolor=red,linewidth=0.5pt]{ZJ4}{OZJ4'}
%%Fine sette-otto
\end{pspicture*}
```

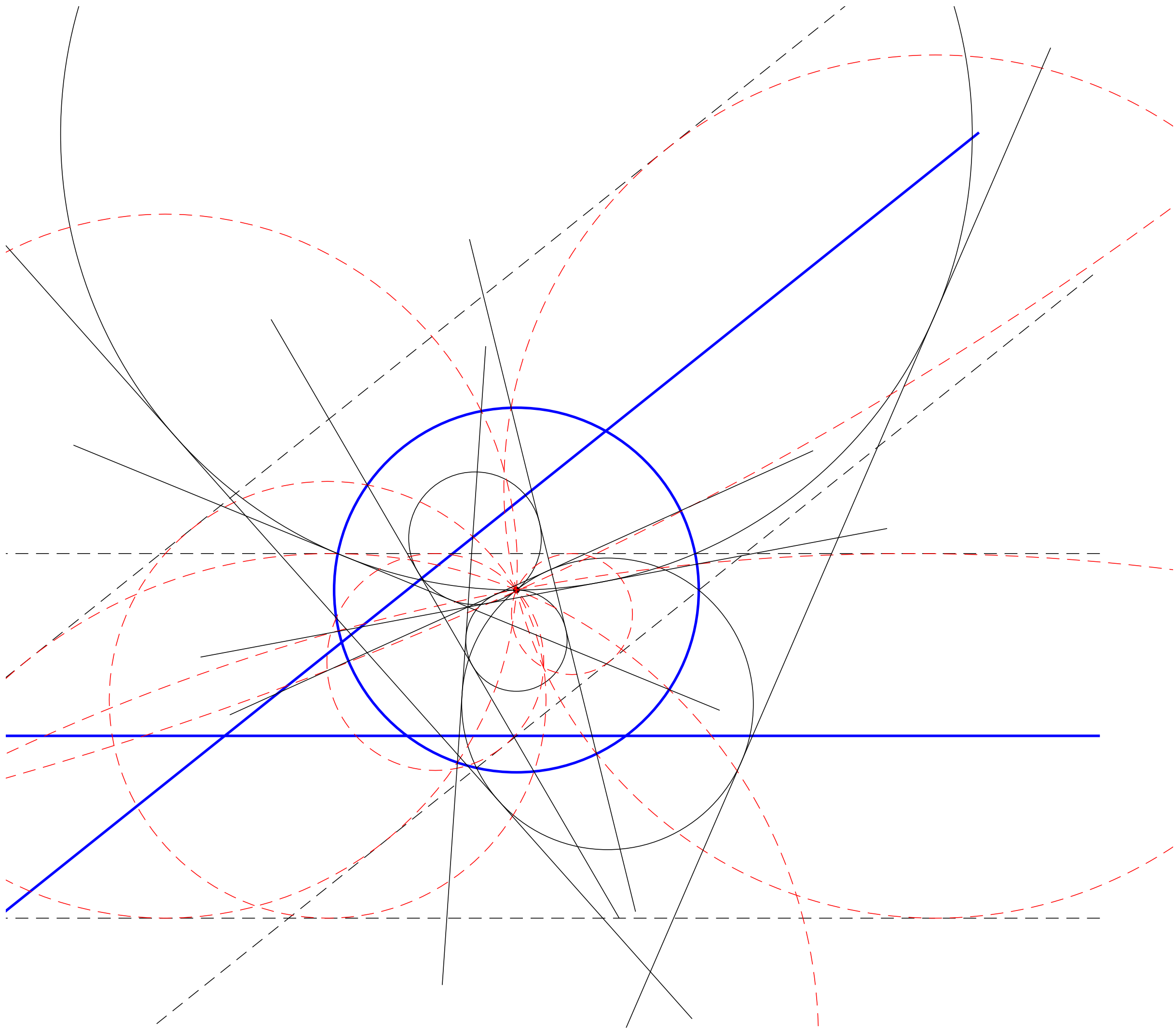

Figura 15: *Circonferenze tangenti a due rette e a una circonferenza date: le linee di costruzione della figura*