

Un esercizio di analisi con il supporto di PSTricks

Luciano Battaia

Sommario

In questa nota propongo un esempio, commentato, di attività didattica per le Scuole Medie Superiori, coinvolgente \LaTeX e in particolare il pacchetto PSTricks. L'idea di base è quella di mostrare come si possa fare un interessante esercizio di Analisi (in una variabile) avendo la finalità di produrre un grafico di elevata qualità (adatto ad essere pubblicato in un testo scientifico). Ritengo che un esercizio di questo tipo possa essere didatticamente molto valido e stimolante.

La trattazione presentata in questa nota non è esaustiva, ed ha solo lo scopo di mostrare l'uso di una strategia "non standard" da proporre come attività in classe.

Il compito da svolgere

Si chiede di rappresentare il grafico della funzione $f(x) = x^2 \ln x - 2x$.

Successivamente si chiede di rappresentare graficamente:

1. la retta tangente al grafico nel punto di ascissa -1;
2. la retta normale al grafico nello stesso punto;
3. la circonferenza osculatrice nello stesso punto.

Le conoscenze di informatica che servono

La quantità di \LaTeX che serve per un compito come questo è veramente poca e coinvolge solo conoscenze elementari. Qualche conoscenza in più è richiesta per il pacchetto PSTricks, e in particolare per le sue abilità nel tracciare grafici di funzioni.

Le conoscenze di matematica che servono

La matematica richiesta contiene sia nozioni semplici, che qualche concetto più sofisticato e non sempre trattato nella Scuola Media Superiore.

In particolare si richiede:

1. di saper utilizzare con disinvoltura le coordinate cartesiane;
2. di conoscere gli elementi di base per tracciare i grafici di funzioni reali di variabile reale;
3. di saper trovare le equazioni delle rette tangente e normale ad una curva in un suo punto;
4. di saper trovare il raggio e il centro di curvatura di una curva piana in un suo punto.

Richiamo brevemente le formule di analisi da utilizzare. Per quanto riguarda la geometria analitica serve praticamente solo la condizione di perpendicolarità tra due rette.

Data una funzione $x \mapsto f(x)$ (regolare quanto serve), indicate con $f'(x)$ e $f''(x)$ le derivate prima e seconda, e dato un punto x_0 abbiamo:

1. la retta tangente al grafico della funzione ha equazione $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$;
2. la retta normale al grafico della funzione (nell'ipotesi che non sia verticale) ha equazione $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$;
3. per il raggio di curvatura vale la seguente formula:

$$r = \frac{[1 + (f'(x_0))^2]^{3/2}}{|f''(x_0)|}$$

4. le coordinate (α, β) del centro di curvatura sono date da:

$$\alpha = x_0 - \frac{f'(x_0)(1+(f'(x_0))^2)}{f''(x_0)} \quad , \quad \beta = y_0 + \frac{(1+(f'(x_0))^2)}{f''(x_0)}$$

Nel nostro caso, dato $x_0 = 1$, si trova facilmente $y_0 = f(x_0) = -2$, $f'(x_0) = -1$, $f''(x_0) = 3$, $r = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\alpha = \frac{5}{3}$, $\beta = -\frac{4}{3}$.

Inoltre l'equazione delle rette tangente e normale sono, rispettivamente, $y = -x - 1$ e $y = x - 3$.

Il codice PSTricks completo della figura

A questo punto la figura si costruisce facilmente. Per semplicità ho sostituito i valori di α e β con le loro approssimazioni decimali alla terza cifra. Si sarebbe potuto anche usare direttamente le capacità di calcolo di PSTricks utilizzando PostScript.

```
\begin{pspicture}(-0.5,-4)(4,2)
  \psplot[linecolor=magenta,linewidth=0.5pt]{-0.5}{2.5}{x neg 1 sub}
  \psplot[linecolor=green,linewidth=0.5pt]{-0.5}{3.5}{x 3 sub}
  \psaxes[linestyle=none](0,0)(-0.5,1.5)(3.5,-3.5)
  \psline[linecolor=cyan]{->}(-0.5,0)(3.5,0)
  \psline[linecolor=cyan]{->}(0,-3.5)(0,1.5)
  \psplot[linecolor=red,linewidth=1pt]{0.01}{2.5}{x 2 exp x ln mul 2 x mul sub}
  \psdots(1.667,-1.333)
  \pscircle(1.667,-1.333){0.943}
  \uput[u](0,1.5){\emph{y}}
  \uput[r](3.5,0){\emph{x}}
  \uput[d](1,-2){\mathbb{P}}
  \uput[u](1.667,-1.333){\mathbb{C}}
```

In realtà il codice proposto è molto più complesso di quello che servirebbe, ma ho voluto aggiungere le etichette per i punti, i nomi degli assi e piazzare le etichette per la griglia sugli assi in maniera opportuna per non disturbare la figura.

Bisognerà naturalmente aggiungere, nel preambolo, le istruzioni per il caricamento dei pacchetti:

```
\usepackage{pstricks}
\usepackage{pst-plot}
```

Ed ecco il risultato finale

