Triangoli, PSTricks e Cabri

Luciano Battaia

Sommario

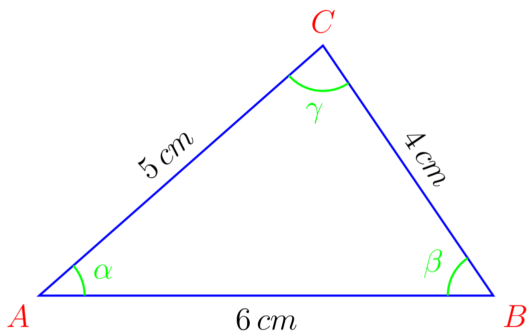
In questa nota propongo un esempio, commentato, di attività didattica per le Scuole Medie Superiori, coinvolgente LaTeX e in particolare il pacchetto PSTricks. L'idea di base è quella di utilizzare un esercizio elementare (disegno di un triangolo conoscendo i lati) per mostrare le potenzialità di LaTeX, ma, soprattutto, per ripassare un bel po' di trigonometria e di geometria analitica. Ritengo che un esercizio di questo tipo sia didatticamente più valido e stimolante di molti problemi di trigonometria proposti sui testi in uso. Come ulteriore applicazione didattica voglio anche mostrare una interessante interazione tra Cabri e LaTeX.

La trattazione proposta in questa nota non è esaustiva, ed ha solo lo scopo di mostrare l'uso di una strategia "non standard" da proporre come attività in classe.

L'idea di base per la costruzione del triangolo è presa dall'ottimo PSTricks Tutorial reperibile all'indirizzo `http://sarovar.org/projects/pstricks/`.

Il compito da svolgere

Si chiede di costruire un triangolo ABC di cui siano noti i tre lati: $AB = 6cm$, $AC = 5cm$, $BC = 4cm$. L'esercizio richiede anche il posizionamento di etichette e misure, come si può vedere dalla figura qui sotto rappresentata.



Il problema è, volutamente, elementare come impostazione e può essere realizzato in maniera banale a mano o con un qualunque software di geometria dinamica. Quello che qui vogliamo provare è che esso può essere realizzato con un codice LaTeX, pur di utilizzare convenientemente una serie di formule di trigonometria e geometria analitica.

Le conoscenze di matematica che servono

La realizzazione con LaTeX di una figura come quella proposta richiede la conoscenza di parecchi capitoli di matematica, in particolare:

- L'uso delle coordinate cartesiane e la capacità di trattare le traslazioni di assi.
- L'uso delle coordinate polari e dei legami tra coordinate polari e cartesiane.

- La conoscenza di alcuni algoritmi fondamentali nell'uso delle coordinate (per esempio il punto medio di un segmento).
- Le formule fondamentali di trigonometria dei triangoli, in particolare la possibilità di *risolvere* un triangolo di cui siano noti i lati.

Le conoscenze di informatica che servono

La quantità di LaTeX puro utilizzata è veramente poca e coinvolge solo elementi assolutamente basilari.

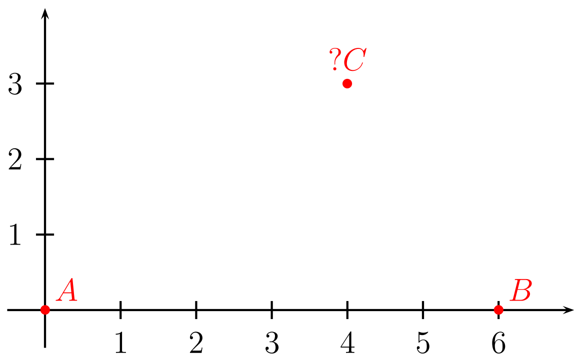
Occorre invece una certa dimestichezza con PSTricks, anche se limitata alle opzioni fondamentali. E' richiesta anche una elementare conoscenza del linguaggio PostScript, in particolare in relazione alla scrittura di formule matematiche. Ritengo che il saper scrivere una formula matematica utilizzando questo linguaggio sia, di per sé, già un ottimo esercizio di matematica.

Infine è richiesta la conoscenza di Cabri, in particolare in relazione all'uso delle coordinate cartesiane.

In questa nota non mi occuperò comunque né della spiegazione dei comandi PSTricks, né della spiegazione delle tecniche Cabri. Mi preme principalmente la parte matematica del problema: rimando a trattazioni specializzate gli altri approfondimenti necessari. Per quanto riguarda LaTeX il poco che serve può anche essere reperito nella mia miniguida, all'indirizzo `http://www.batmath.it/latex/miniguida.htm`.

Discussione preliminare - Cenno a PostScript

Poichè PSTricks usa le coordinate cartesiane per posizionare gli oggetti nella pagina, disponiamo opportunamente il triangolo in modo da semplificare la costruzione della figura. Scegliamo di mettere il punto A nell'origine degli assi cioè in $(0, 0)$, il punto B in $(6, 0)$ e il punto C nel primo quadrante, in una posizione da determinare.



Il modo più semplice per determinare la posizione di C è quello di usare le coordinate polari. Usiamo la notazione di PSTricks, che ci pare più efficiente di quella in uso nei testi di matematica: $C = (\rho;\theta)$, al posto di $C = [\rho, \theta]$. Si ha, evidentemente, $\rho = AC = 5$. Per trovare θ, ovvero l'angolo $C\widehat{A}B$, usiamo la formula trigonometrica che coinvolge l'arctangente. Non si tratta dell'unica formula possibile, ma è da preferire in questo caso in quanto il linguaggio PostScript ha l'arcotangente tra le funzioni predefinite.

La formula richiesta è: $C\widehat{A}B = 2\arctan\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, ove s è il semiperimetro e a, b, c sono i lati opposti agli angoli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$, come d'uso. I valori adatti al nostro problema sono: $s = 7.5, s-a = 3.5, s-b = 2.5, s-c = 1.5$. Dovremo allora calcolare $2\arctan\sqrt{\frac{2.5\times1.5}{7.5\times3.5}}$. Potremmo usare una calcolatrice e inserire direttamente il suo risultato nel codice LaTeX, ma preferiamo, a mo' d'esercizio, inserire direttamente il codice PostScript per eseguire il calcolo.

Il linguaggio PostScript, usato per molte stampanti professionali e oggi anche per le stampanti domestiche (molte, ma non tutte, le Laser), ha un modo non standard di scrivere le formule matematiche che mi pare abbastanza interessante, in quanto costringe ad un ragionamento non sempre semplice. Senza entrare troppo nei dettagli, mostriamo alcuni esempi di formule PostScript. Occorre prestare la massima attenzione all'ordine e agli spazi, che hanno la funzione di separatori. Le formule sono scritte tra apici, per rendere chiaro l'inizio e la fine: essi non vanno inseriti nel codice.

- $a+b$ si scrive: '*a b add*'
- $a-b$ si scrive: '*a b sub*'
- $a+b+c$ si scrive: '*a b add c add*'
- $a\cdot b$ si scrive: '*a b mul*'
- $\frac{a}{b}$ si scrive: '*a b div*'
- $(a+b)c$ si scrive: '*a b add c mul*'
- $a(b+c)$ si scrive: '*a b c add mul*'
- $\frac{a+b}{c+d}$ si scrive: '*a b add c d add div*'
- $\frac{a}{b+c}$ si scrive: '*a b c add div*'
- $\arctan\left(\frac{a}{b}\right)$ si scrive: '*a b atan*' e fornisce come risultato un angolo in gradi.
- $\sqrt{a}$ si scrive: '*a sqrt*'
- $\sqrt{\frac{a}{b+c}}$ si scrive: '*a b c add div sqrt*'
- a^b si scrive: '*a b exp*'

Si noti la mancanza di parentesi e l'uso degli operatori di somma, sottrazione, prodotto, quoziente solo per coppie di valori. Quest' ultima osservazione è fondamentale; è per questo che $a(b+c)$ si scrive '*a b c add mul*'. Infatti l'operatore *add* agisce sui due numeri che immediatamente lo precedono (b e c), producendo come un risultato un altro numero, diciamolo d; a questo punto l'operatore *mul* agisce sui due numeri che lo precedono, ovvero a e d. In sostanza si può evitare l'uso di parentesi proprio perchè ciascun operatore agisce solo come è previsto nella sua definizione originale. La cosa appare evidente quando si considera, per esempio, la somma di tre addendi: $a+b+c$ si scrive '*a b add c add*', ad indicare il fatto che si esegue intanto la somma tra a e b e poi il risultato si addiziona con c.

Nel nostro caso la formula $2\arctan\sqrt{\frac{2.5\times1.5}{7.5\times3.5}}$ si scrive: '*2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul*'. Si noti, in particolare, che '*2.5 1.5 mul sqrt*' fornisce il primo operando dell'arctangente, mentre '*7.5 3.5 mul sqrt*' fornisce il secondo: l'arcotangente deve operare, in PostScript, su due numeri, un numeratore e un denominatore. Non è l'unico modo per scrivere questa formula, ne proponiamo un altro, lasciando al lettore di individuarne la struttura: '*2.5 1.5 mul 7.5 3.5 mul div sqrt 1 atan 2 mul*'.

Una volta trovati i valori di ρ e θ per il punto C si potrebbe inserirli direttamente nel codice, usando la notazione $(\rho;\theta)$. Se però ci servono le coordinate cartesiane, basta che calcoliamo $\rho\cos\theta$ e $\rho\sin\theta$. Nel linguaggio Postcsript basterà scrivere '*2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul cos 5 mul*' e '*2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul sin 5 mul*' rispettivamente.

Ci servono anche le coordinate dei punti medi dei tre lati, in quanto con centro su di essi scriveremo le misure degli stessi: PSTricks provvederà a spostarle in modo che non siano sovrapposte ai segmenti.

Un'altra cosa che ci serve sono gli angoli $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$: per segnarli dovremo costruire un arco di cerchio di raggio opportuno e apertura uguale ai tre angoli α, β, γ. Una difficoltà in più (e quindi un'occasione per un ulteriore esercizio!): per ognuno dei tre casi dovremo indicare a PSTricks il valore iniziale e quello finale dell'angolo, tenendo conto che gli angoli vengono misurati in senso antiorario. Per esempio, per l'angolo γ, l'arco da disegnare sarà compreso tra $180 + \alpha$ e $360 - \beta$.

Ancora un ultimo, a questo punto piccolo, problema: le etichette relative agli angoli andranno posizionate a metà di ciascun angolo . . ., ma ormai siamo diventati abbastanza esperti!

Il codice PSTricks completo della figura

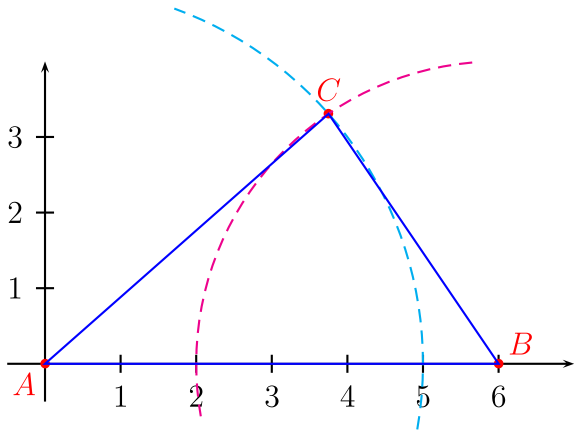
```
\documentclass[a4paper,12pt,italian]{article}
\usepackage[latin1]{inputenc}
\usepackage[italian]{babel}
\usepackage{latexsym}
\usepackage{amsmath,amssymb,amsfonts}
\usepackage{pstricks}
\begin{document}
\thispagestyle{empty}
\begin{pspicture}(0,-0.5)(6,4)
\SpecialCoor
\pspolygon[linecolor=blue](0,0)(6,0)%
  (!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul cos 5 mul%
  2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul sin 5 mul)
%%%Etichette sui vertici
\uput[dl](0,0){\color{red} $A$} \uput[dr](6,0){\color{red} $B$} \uput[u](5;!2.5
1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul){\color{red} $C$}
%%%Lunghezze scritte sui lati
\uput[d](3,0){$6\,cm$}
\rput[t]{!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul}%
  (!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul cos 5 mul 2 div%
  2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul sin 5 mul 2 div)%
  {\uput[u](0,0){$5\,cm$}}
\rput[b]{!3.5 1.5 mul sqrt 7.5 2.5 mul sqrt atan 2 mul -1 mul}%
  (!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul cos 5 mul 6 add 2 div%
  2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul sin 5 mul 2 div)%
{\uput[u](0,0){$4\,cm$}}
%%%Tracciamento degli angoli
\psarc[linecolor=green](0,0){0.6}{0}{!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2
mul} \rput(0.9;!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul 2
div){\color{green} $\alpha$}
\psarc[linecolor=green](5;!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul){0.6}%
  {!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul 180 add}%
  {!3.5 1.5 mul sqrt 7.5 2.5 mul sqrt atan 2 mul -1 mul}
\rput(5;!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul)%
  {\rput(0.9;!2.5 1.5 mul sqrt 7.5 3.5 mul sqrt atan 2 mul%
  3.5 1.5 mul sqrt 7.5 2.5 mul sqrt atan 2 mul sub 2 div 270 add)%
```

```
  {\color{green} $\gamma$}}
\psarc[linecolor=green](6,0){0.6}%
  {!3.5 1.5 mul sqrt 7.5 2.5 mul sqrt atan 2 mul -1 mul 180 add}{180}
\rput(6,0){\rput(0.9;!3.5 1.5 mul sqrt 7.5 2.5 mul sqrt atan 2 mul -1 mul 2 div
180 add){\color{green} $\beta$}}
\end{pspicture}
\end{document}
```

E se usassimo Cabri?

Gli angoli α, β, γ che servono per tracciare il triangolo possono naturalmente essere calcolati, usando le formule citate, con una calcolatrice, inserendo direttamente nel codice LaTeX il loro valore. É però molto più interessante, se si vuole evitare di utilizzare il linguaggio PostScript, usare Cabri per la costruzione e misurare le cose che servono direttamente dalla figura così realizzata.

La costruzione è immediata e il suo schema si può vedere nella figura di seguito.



Gli angoli, misurati direttamente in Cabri, sono: $\alpha = 41.41°, \beta = 55.77°, \gamma = 82.82°$. A questo punto la costruzione della figura con PSTricks è immediata.

La tecnica di utilizzare Cabri a supporto delle costruzioni da realizzare con PSTricks è molto vantaggiosa in quanto consente di realizzare figure di elevatissima qualità tipografica, e didatticamente interessante, in quanto prevede l'uso di uno dei più famosi software di geometria dinamica.