

Tips sul differenziale

Luciano Battaia^(*)

14 gennaio 2010

Scopo di questo articolo è di proporre alcune considerazioni “spicciole” ed elementari sul concetto di differenziale, in particolare per le funzioni di due variabili. L’articolo nasce dalla constatazione delle difficoltà riscontrate nella gran parte degli allievi per comprendere questo concetto, se presentato in maniera troppo formale, e ancor più delle difficoltà che sorgono nella risoluzione degli esercizi. In particolare in questo articolo non proporrò nemmeno la definizione di differenziale di una funzione, quanto piuttosto considerazioni su che cosa voglia dire che una funzione è differenziabile e su come si possa verificare praticamente la differenziabilità. Per una trattazione più completa si rimanda a testi specializzati o ad altri (numerosi!) articoli presenti su <http://www.batmath.it>.

1 Funzioni reali di una sola variabile reale

Sia

$$(1) \quad f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione reale di una variabile reale, e x_0 un punto interno al dominio A (che possiamo supporre aperto). Se x è un altro punto generico di A , ha interesse considerare la quantità $f(x) - f(x_0)$ (detta *incremento* della funzione relativa al punto x_0 e all’incremento $x - x_0$ della variabile indipendente), in quanto la sua conoscenza ci permette di valutare $f(x)$ una volta noto $f(x_0)$. Se la funzione f è una funzione polinomiale di primo grado, $f(x) = mx + q$ (avente come grafico una retta nel piano cartesiano), si ha

$$(2) \quad f(x) - f(x_0) = mx + q - (mx_0 + q) = m(x - x_0),$$

ovvero l’incremento della funzione risulta proporzionale all’incremento della variabile indipendente, qualunque sia x .

Questo fatto non è ovviamente vero per una funzione di tipo più generale, ma possiamo chiederci se una tal proporzionalità esiste *almeno approssimativamente*, cioè se vale una uguaglianza approssimata del tipo

$$(3) \quad f(x) - f(x_0) \simeq m(x - x_0),$$

per tutti gli x del dominio di f , o almeno per una parte (da precisare) degli x del dominio di f . Se scriviamo la (3) come segue

$$(4) \quad f(x) \simeq f(x_0) + m(x - x_0),$$

^{*}<http://www.batmath.it>

poiché il secondo membro della (4) è una funzione avente come grafico una retta passante per $(x_0, f(x_0))$, la domanda precedente si può riformulare come segue: è possibile trovare una retta, passante per $(x_0, f(x_0))$, che *approssimi* la funzione f in un certo sottoinsieme (da precisare) del dominio?

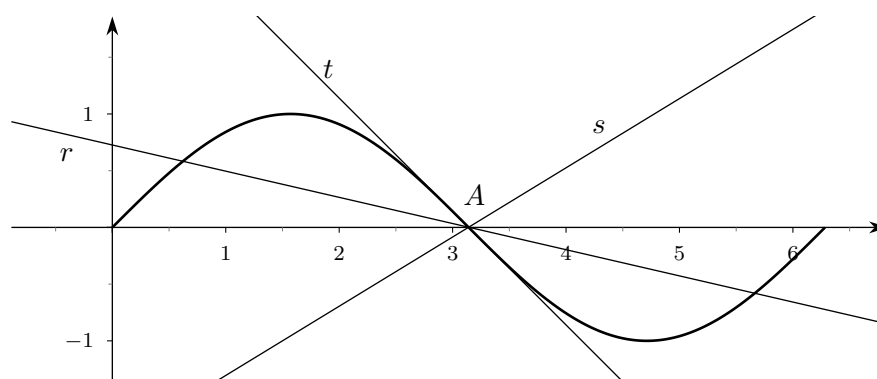
Occorrerà naturalmente

- precisare che cosa vuol dire *approssimare* (cioè qual è l'errore che siamo disposti a tollerare);
- precisare in quale sottoinsieme del dominio pretendiamo che tale uguaglianza approssimata sia valida.

Vediamo il senso di quanto detto su un esempio. Sia $f(x) = \sin x$, $0 < x < 2\pi$ e $x_0 = \pi$. Consideriamo tre diverse rette passanti per $P_0 = (\pi, f(\pi)) = (\pi, 0)$: r, t, s , di cui t è la retta tangente al grafico. Queste tre rette avranno un'equazione del tipo:

$$(5) \quad y = g(x) = \sin(\pi) + m(x - \pi) \quad \text{ovvero} \quad g(x) = m(x - \pi),$$

con un valore di m che cambierà al cambiare della retta, e che coinciderà con $f'(\pi) = \cos(\pi) = -1$ per la retta tangente t .



È visivamente evidente che la retta r approssima abbastanza bene la funzione f in *tutto* l'intervallo $0 < x < 2\pi$, la retta t approssima bene la funzione f (tanto che il suo grafico si confonde con quello della funzione), *solo* “nei pressi” di P_0 , la retta s è una cattiva approssimazione di f ovunque (tranne ovviamente nel punto P_0).

Per valutare l'errore che si commette approssimando f con una delle tre rette basterà calcolare $f(x) - g(x)$, quantità che possiamo chiamare $\varepsilon(x)$:

$$(6) \quad \varepsilon(x) = f(x) - g(x) = \sin(x) - m(x - \pi)$$

Se teniamo conto che la funzione \sin è continua in π (naturalmente è continua ovunque, ma qui ci interessa solo il valore π), possiamo osservare che

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \varepsilon(x) = \lim_{x \rightarrow \pi} \sin(x) - m(x - \pi) = \sin(\pi) - m(\pi - \pi) = 0,$$

ovvero che $\varepsilon(x)$ è una funzione infinitesima, per $x \rightarrow \pi$. Questo risultato è solo la traduzione in formule del fatto che la funzione continua f e una qualunque delle tre rette passano per lo stesso punto P_0 .

Poiché $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo per $x \rightarrow \pi$, possiamo confrontarlo con il campione standard degli infinitesimi per $x \rightarrow \pi$ e chiederci qual è l'ordine (se c'è un ordine!) di $\varepsilon(x)$ rispetto a $x - \pi$. Dovremo calcolare

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\varepsilon(x)}{|x - \pi|^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x) - m(x - \pi)}{|x - \pi|^\alpha},$$

e vedere se è possibile trovare $\alpha > 0$ in modo tale che questo limite sia finito e diverso da zero. Si potrebbero usare i limiti fondamentali, ma per semplicità usiamo la regola di l'Hôpital (limitandoci al caso $x > \pi$, l'altro è simile):

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sin(x) - m(x - \pi)}{(x - \pi)^\alpha} \stackrel{(H)}{\leftarrow} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos(x) - m}{\alpha(x - \pi)^{\alpha-1}}.$$

Il numeratore dell'ultima frazione tende a $-1 - m$, il denominatore ha per limite

- $+\infty$ se $0 < \alpha < 1$;
- 1 se $\alpha = 1$;
- 0 se $\alpha > 1$.

Dunque

- se $m \neq -1$ il limite (9) è finito e diverso da zero per $\alpha = 1$, cioè $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo di ordine 1 rispetto a $x - x_0$;
- se $m = -1$ il limite (9) può essere finito e diverso da zero solo se $\alpha > 1$, caso in cui possiamo nuovamente applicare la regola di l'Hôpital:

$$(10) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\cos(x) - m}{\alpha(x - \pi)^{\alpha-1}} \stackrel{(H)}{\leftarrow} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin(x)}{\alpha(\alpha - 1)(x - \pi)^{\alpha-2}}.$$

Quest'ultimo limite vale 0 se $\alpha \leq 2$, si presenta ancora nella forma $0/0$ (e quindi potrebbe essere finito e diverso da zero) se $\alpha > 2$, caso in cui applichiamo nuovamente la regola di l'Hôpital:

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin(x)}{\alpha(\alpha - 1)(x - \pi)^{\alpha-2}} \stackrel{(H)}{\leftarrow} \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\cos(x)}{\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)(x - \pi)^{\alpha-3}}.$$

Poiché il numeratore di quest'ultima frazione tende a 1, il limite è finito e diverso da zero solo se $\alpha = 3$. Dunque se $m = -1$ il limite è finito e diverso da zero per $\alpha = 3$, ovvero $\varepsilon(x)$ è un infinitesimo di ordine 3 rispetto a $x - x_0$.

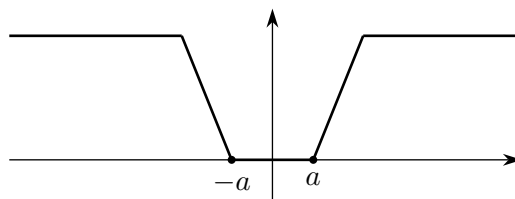
In conclusione l'errore che si commette approssimando il grafico della funzione $\sin(x)$ con una retta (non verticale) passante per il punto $(\pi, \sin(\pi))$ è infinitesimo al tendere di x a π e precisamente

- è infinitesimo di ordine 1 rispetto a $x - x_0$ per tutte le rette che non hanno coefficiente angolare -1 ;
- è infinitesimo di ordine > 1 , precisamente 3, rispetto a $x - x_0$ per la retta che ha coefficiente angolare -1 .

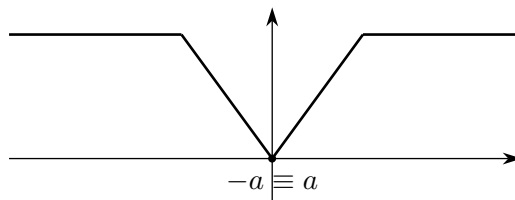
La retta di coefficiente angolare -1 gioca dunque un ruolo speciale in questa approssimazione: è l'unica retta per cui l'errore è infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a $x - x_0$. Per questo motivo questa retta è la *retta tangente* al grafico della funzione.

Si tenga ben presente che dire che $\varepsilon(x)$ è infinitesimo di ordine superiore al primo in corrispondenza alla retta tangente non significa affatto dire che la retta tangente è la migliore *approssimazione globale*, cioè in tutto l'intervallo $]0, 2\pi[$, della funzione con una retta, ma solo che la retta tangente è la migliore *approssimazione locale*, cioè in un opportuno intorno di π , intorno di cui non è possibile a priori precisare l'ampiezza. Dal punto di vista delle applicazioni pratiche questa approssimazione potrebbe essere addirittura (ma si tratta di casi patologici!) assolutamente inutile, come mostra l'esempio che segue.

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con un grafico come il seguente:



È chiaro che la retta tangente nell'origine a questo grafico è l'asse delle x , qualunque sia l'ampiezza dell'intervallo $[-a, a]$: se per caso l'ampiezza dell'intervallo fosse trascurabile dal punto di vista delle applicazioni (per esempio $a = 10^{-100}$), l'asse delle x continuerebbe ad essere la retta tangente, ma la cosa non avrebbe alcun interesse pratico: una simile funzione potrebbe essere sperimentalmente identificata con una funzione avente un punto angoloso nell'origine:



Per concludere con l'esempio della funzione osserviamo che la scelta della retta tangente come retta approssimante implica che si è scelto che

- siamo disposti ad approssimare in modo tale che l'errore $\varepsilon(x)$ sia un infinitesimo di ordine superiore a $x - x_0$;
- ci accontentiamo che l'approssimazione sia valida in un opportuno intorno del punto x_0 , intorno di cui non intendiamo precisare l'ampiezza.

Tornando ora al caso di una generica funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diremo che f è *differenziabile* in un punto x_0 interno al suo dominio se esiste una retta r di equazione $y = g(x)$ con

$$(12) \quad g(x) = f(x_0) + m(x - x_0),$$

tale che la differenza

$$(13) \quad \varepsilon(x) = f(x) - g(x) = f(x) - f(x_0) - m(x - x_0)$$

sia, per $x \rightarrow x_0$, infinitesima di ordine superiore al primo rispetto a $x - x_0$, cioè tale che il grafico della funzione sia approssimabile in un opportuno intorno di x_0 , con la retta r , a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto a $x - x_0$.

Si noti che, mentre nell'esempio precedente l'infinitesimo era addirittura di ordine 3, ora ci accontentiamo solo che sia di ordine superiore al primo.

Nel caso che stiamo trattando di funzioni reali di *una sola* variabile reale, si dimostra che la funzione è differenziabile se e solo se è derivabile, e che la retta approssimante con la proprietà indicata è la retta di equazione

$$(14) \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

2 Funzioni reali di due variabili reali

Se ora

$$(15) \quad f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

è una funzione di due variabili, si possono ripetere le considerazioni precedenti sostituendo la retta approssimante con un piano approssimante. Precisamente, se $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto interno al

dominio A della funzione, e $P = (x, y)$ è un altro punto generico di A , ci possiamo chiedere se esiste oppure no un piano di equazione $z = g(x, y)$, con

$$(16) \quad g(x, y) = f(x_0, y_0) + a(x - x_0) + b(y - y_0),$$

tale che la differenza

$$(17) \quad \varepsilon(x, y) = f(x, y) - g(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) - a(x - x_0) - b(y - y_0)$$

sia, per $P \rightarrow P_0$, un infinitesimo di ordine superiore al primo rispetto alla distanza tra P e P_0 , cioè rispetto a

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Se la risposta è affermativa si dirà che f è *differenziabile* nel punto P_0 e il piano di equazione $z = g(x, y)$ sarà il *piano tangente* al grafico f nel punto P_0 .

Purtroppo i legami tra il concetto di differenziabilità e quello di derivabilità sono molto più delicati per le funzioni di due variabili di quanto non lo erano per le funzioni di una variabile. Precisamente, se una funzione è differenziabile in un punto P_0 si ha che:

1. la funzione è continua in P_0 ;
2. esistono entrambe le derivate parziali in P_0 e si ha

$$(18) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = a, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = b;$$

3. esiste la derivata lungo ogni direzione di versore \vec{u} per P_0 ;
4. vale il seguente legame tra la derivata lungo la direzione di versore \vec{u} per P_0 e il gradiente della funzione in P_0 :

$$(19) \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f \cdot \vec{u}.$$

Dunque se una funzione è differenziabile, il piano di equazione

$$(20) \quad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

è il piano approssimante con la proprietà cercata ed è il piano tangente.

Purtroppo tutte le quattro condizioni indicate sono solo *necessarie* per la differenziabilità: una funzione può godere di una o più di queste proprietà, senza per questo essere differenziabile⁽¹⁾. Negli esercizi di solito si usa la *manca* di una delle quattro proprietà indicate per verificare la *non differenziabilità* della funzione.

Per verificare direttamente la differenziabilità di una funzione il teorema fondamentale è quello del differenziale totale.

Teorema 1 (del differenziale totale). *Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, una funzione definita in un (aperto) A di \mathbb{R}^2 . Se f è parzialmente derivabile in un intorno I di un punto (x_0, y_0) e le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0) , allora la funzione è differenziabile in (x_0, y_0) .*

Questo teorema garantisce la differenziabilità delle funzioni elementari in quasi tutti i punti del loro dominio, ma non è di facile applicazione in generale, perché la verifica della continuità di una funzione di due variabili è tutt'altro che banale...

¹Ricordiamo che, inoltre, una funzione può avere la proprietà numero 2, o addirittura la numero 3, senza essere nemmeno continua.