Insufficienza delle derivate direzionali

Luciano Battaia[(*)]

3 gennaio 2010

In questo breve articolo propongo un interessante esempio di funzione di due variabili che ha tutte le derivate direzionali nulle nell'origine, pur essendo addirittura illimitata in un intorno dell'origine.

La derivata direzionale non può essere considerata l'estensione a più variabili del concetto di derivata introdotto per le funzioni reali di una variabile reale, in quanto le derivate direzionali fanno intervenire, nell'intorno di un dato punto P_0, solo i valori che la funzione assume sulle rette passanti per P_0, mentre per una accurata comprensione dell'andamento della funzione è indispensabile valutarne il comportamento globale in tutto l'intorno. Questo comportamento globale interviene invece nel concetto di funzione differenziabile, che porta alla considerazione del piano tangente al grafico della funzione nel punto P_0.

Ricordiamo le definizioni fondamentali che ci serviranno nel seguito, focalizzando l'attenzione sulle funzioni reali di due variabili reali.

Definizione 1. *Sia $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, definita in un aperto A di $\mathbb{R}^2$, e $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A. Se $\vec{u} = (l, m)$ è un versore di $\mathbb{R}^2$, si considera la funzione*

$$g(t) = f(x_0 + lt, y_0 + mt)\,. \tag{1}$$

Se la funzione g è derivabile per $t = 0$, $g'(0)$ si chiama derivata di f nel punto P_0, nella direzione del versore $\vec{u}$, e si scrive

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = g'(0)\,. \tag{2}$$

La derivata direzionale, quando esiste, è il coefficiente angolare della tangente, in P_0, al grafico della curva che si ottiene sezionando la superficie grafico della funzione con il piano $P_0 z \vec{u}$. Segnaliamo che si potrebbe anche definire, con le stesse parole, la derivata secondo un vettore qualunque (non necessariamente un versore), ma una tale derivata sarebbe un multiplo del coefficiente angolare della tangente precedente. Le derivate parziali non sono altro che le derivate secondo le direzioni dei versori $\vec{i}$ e $\vec{j}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{i}}(P_0)\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial \vec{j}}(P_0)\,. \tag{3}$$

Definizione 2. *Sia $f\colon A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione di due variabili, definita in un aperto A di $\mathbb{R}^2$, e $P_0 = (x_0, y_0)$ un punto di A. La funzione f si dice differenziabile in P_0 se esiste una funzione lineare $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - L(h, k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0\,. \tag{4}$$

[*] http://www.batmath.it

Se una funzione è differenziabile in P_0, allora esistono entrambe le derivate parziali e si ha:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + \omega(h, k)\,, \tag{5}$$

dove $\omega(h, k)$ è una funzione infinitesima, per $(h, k) \to (0, 0)$, di ordine superiore rispetto a $\sqrt{h^2+k^2}$.

Se una funzione è differenziabile esistono anche tutte le derivate direzionali e si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)l + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)m\,, \quad \text{ove} \quad \vec{u} = (l, m)\,. \tag{6}$$

Spesso per provare che una funzione non è differenziabile si verifica proprio la non validità della formula (6), che, nella sostanza, traduce in formule il fatto che le derivate lungo le varie direzioni per P_0 sono combinazioni lineari delle due derivate parziali, con coefficienti della combinazione dati dalle componenti di $\vec{u}$. Occorre tenere presente comunque che la differenziabilità è una condizione sufficiente per la validità della (6): se la (6) non vale, la funzione sicuramente non è differenziabile, se la (6) vale, nulla si può dire sulla differenziabilità della funzione.

L'esempio proposto in questo articolo è interessante proprio perché riguarda una funzione in cui vale la (6) senza che la funzione sia differenziabile, anzi addirittura senza che sia nemmeno continua.

Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita[1] come segue:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^8}\,, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\,, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}\,. \tag{7}$$

Sia $P_0 = (0, 0)$ e $\vec{u} = (l, m)$ un versore. La generica direzione per P_0 ha equazione

$$\begin{cases} x = lt \\ y = mt \end{cases} \tag{8}$$

Si ha dunque

$$g(t) = f(lt, mt) = \begin{cases} \dfrac{l^5t^3}{m^2 + l^4t^2 - 2ml^2t + l^8t^6}, & \text{se} \quad m \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad m = 0 \end{cases}\,. \tag{9}$$

È immediato provare che si ha sempre $g'(0) = 0$, ovvero

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0, 0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)l + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)m, \quad \forall \vec{u} = (l, m)\,. \tag{10}$$

La funzione comunque non può essere differenziabile, perché non continua. Se infatti ne consideriamo la restrizione sulla parabola di equazione $y = x^2$, otteniamo

$$h(x) = f(x, x^2) = \begin{cases} \dfrac{x^5}{x^8} = \dfrac{1}{x^3}, & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}\,. \tag{11}$$

Ne segue

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} h(x) = -\infty\,. \tag{12}$$

[1] Esempio preso da Schwartz,L., *Cours d'analyse*, Hermann, Paris, 1967.

La funzione f dunque non è continua nell'origine, anzi è addirittura illimitata.

È abbastanza interessante visualizzare il grafico di questa funzione per rendersi effettivamente conto di come vanno le cose: il grafico è proposto nella successive figure 1 e 2, in due diverse scale.

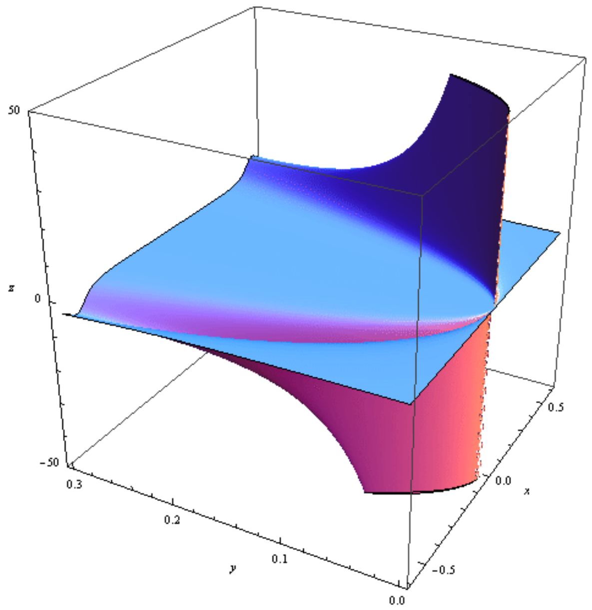

Figura 1 *Superficie-grafico, nei pressi dell'origine*

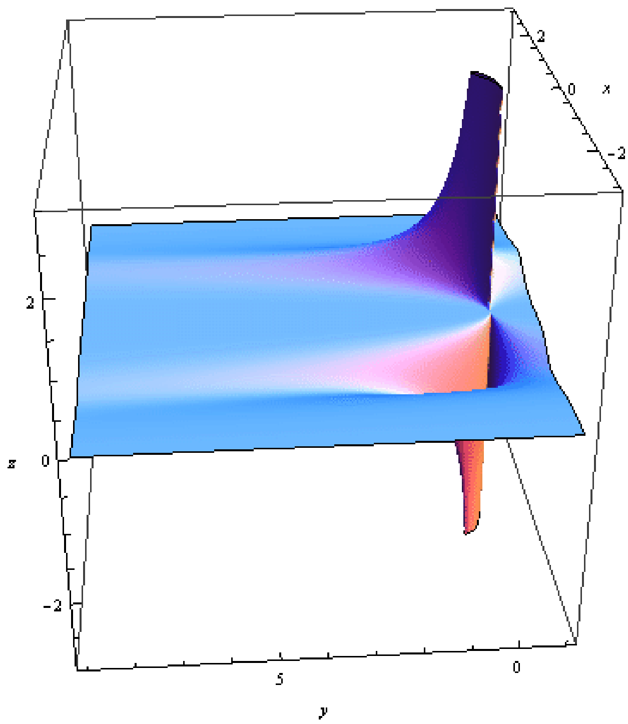

Figura 2 *Superficie-grafico, in un ampio intorno dell'origine*

Come si può ben vedere, a parte i punti del dominio prossimi alla parabola $y = x^2$, il grafico è una superficie molto semplice, anzi "quasi piatta".