Osservazioni varie su primitive e integrali

Luciano Battaia*

Versione del 5 marzo 2007

In questa nota propongo alcune osservazioni relative alle proprietà delle primitive, degli integrali di Riemann, degli integrali impropri e delle funzioni integrali, normalmente sparse in diversi capitoli dei testi di calcolo infinitesimale e che invece mi pare opportuno sintetizzare in un unico documento.

La lettura di queste pagine ha senso solo dopo aver studiato i concetti di integrale e di primitiva, in quanto non vengono fornite tutte le definizioni e proprietà richieste, né proposte dimostrazioni.

Potete trovare una completa ed esauriente trattazione di tutti questi concetti nelle seguenti pagine di www.batmath.it:

- http://www.batmath.it/matematica/a_primitive/primitive.htm
- http://www.batmath.it/eng/a_riemann/riemann.htm
- http://www.batmath.it/matematica/a_appl_riem/appl_riem.htm
- http://www.batmath.it/matematica/a_int_impropri/int_impropri.htm

Indice

*http://www.batmath.it

1 Primitive

Data una funzione reale di variabile reale: $f\colon D \to \mathbb{R}$, dove D è un intervallo o un'unione di intervalli, si dà la seguente

Definizione

Primitiva *di f è una qualunque funzione $F\colon D \to \mathbb{R}$, derivabile e tale che*

$$F'(x) = f(x)\,, \quad \forall\, x \in D\,. \tag{1}$$

In sostanza l'operatore *primitiva* si presenta come l'inverso dell'operatore derivata, nel senso che a partire da una funzione f si deve ricercare una funzione F di cui f sia la derivata.

Osservazione 1.1. È molto importante segnalare che l'uguaglianza contenuta nella formula (1) deve valere per ogni x del dominio D. Per capire il problema consideriamo l'esempio che segue. La funzione $f(x) = \sin x$ non ha sicuramente la funzione $F(x) = x$ come primitiva, eppure la derivata di $F(x)$ è 1, che coincide con il valore di $\sin x$, nei punti $\pi/2 + 2k\pi$. Una primitiva di $f(x)$ è invece $-\cos x$, la cui derivata coincide con $\sin x$ su *tutto* il suo dominio, ovvero su tutto $\mathbb{R}$.

Osservazione 1.2. Si noti che, come conseguenza dell'osservazione precedente, non ha alcun significato parlare di primitiva di una funzione in un punto (in contrasto con quanto succede per il concetto di derivata): ha solo senso parlare di primitiva in un insieme.

Osservazione 1.3. Se il dominio della funzione è un intervallo, due sue primitive diverse differiscono per una costante (per uno dei corollari del teorema di Lagrange), ovvero:

$$(f \text{ definita in } I,\ \text{intervallo}) \ \wedge (F,\, G \text{ primitive di } \ f) \ \Rightarrow\ F(x) - G(x) = c\,.$$

La cosa non è affatto vera se il dominio di f (come succede spessissimo) non è un intervallo, ma un'unione di intervalli disgiunti. Per rendersi conto del problema si può considerare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}\,.$$

È immediato provare che le due funzioni che seguono:

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ \ln(-x) + 2 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad , \quad G(x) = \begin{cases} \ln x + 3 & \text{se} \quad x > 0 \\ \ln(-x) - 1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad ,$$

sono entrambe primitive di f, ma la loro differenza vale

$$F(x) - G(x) = \begin{cases} -2 & \text{se} \quad x > 0 \\ \ \ 3 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \quad ,$$

funzione che non è affatto costante.

Osservazione 1.4. Come conseguenza dell'osservazione precedente si conclude che, mentre una funzione derivabile ha una ben definita derivata, una funzione che abbia primitive ne ha sempre infinite.

Osservazione 1.5. Si usa indicare l'insieme di tutte le primitive di una funzione f con il simbolo

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{o anche} \quad \int f\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{o semplicemente} \quad \int f.$$

Se F è una primitiva di f si dovrebbe scrivere, pertanto,

$$F \in \int f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

nei prontuari e negli esercizi si trova scritto, invece,

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + k\,.$$

La notazione è comoda ed è ormai entrata nell'uso comune, ma bisogna utilizzarla con molta attenzione, anche alla luce dell'osservazione 1.3.

Osservazione 1.6. Una funzione che abbia, in un intervallo, una discontinuità a salto (di solito discontinuità di prima specie) non può avere primitive sull'intervallo.

Per esempio la funzione

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ 1 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}\,,$$

non può avere primitive nel suo dominio, cioè in $\mathbb{R}$, mentre la funzione

$$g(x) = \frac{x}{|x|}\,,$$

che è definita per $x \neq 0$, può avere primitive nel suo dominio, proprio perché il suo dominio non è un intervallo; una primitiva è:

$$G(x) = \begin{cases} -x & \text{se} \quad x < 0 \\ x & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}\,.$$

Osservazione 1.7. Come conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che ogni funzione continua su un intervallo ha primitive, ma anche funzioni discontinue su intervalli possono avere primitive (ovviamente purché non si tratti di discontinuità a salto). Un esempio si può costruire con il ragionamento che segue.

Sia data la funzione

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

È facile provare che si ha

$$F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x\cos\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}\,.$$

La funzione F è, per costruzione, una primitiva di f, ma f non è continua (in 0), e addirittura nemmeno limitata in un intorno di 0.

Osservazione 1.8 (Molto importante all'atto pratico)**.** Come è ben noto non tutte le funzioni continue sono derivabili, mentre, come già ricordato, tutte le funzioni continue hanno primitive: l'operatore primitiva è meno esigente dell'operatore derivata. Dal punto di vista pratico c'è però un grosso problema: mentre la derivata di una funzione elementare qualunque è ancora una funzione elementare, lo stesso non accade per le primitive. Tra gli esempi più famosi, e storicamente importanti, citiamo le funzioni

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases},$$

che non hanno primitive elementari.

Questo fatto ha come conseguenza che, molto spesso, il calcolo delle primitive di una funzione è tecnicamente complesso, se non addirittura irrisolubile con tecniche elementari.

2 Integrale di Riemann

Il concetto di Integrale di Riemann è, logicamente, profondamente diverso da quello di primitiva. Anche se non intendo ora occuparmi della definizione, ricordo che il problema di cui ci si occupa qui è quello della quadratura (calcolo di aree) di regioni piane opportune, secondo una ben precisa definizione di misura (Peano-Jordan), che estende il concetto di area di figure poligonali introdotto nella geometria euclidea.

Osservazione 2.1. Il concetto di integrale di Riemann si introduce *solo ed esclusivamente* per funzioni

— definite in un intervallo $[a, b]$ *chiuso e limitato*;
— *limitate* nell'intervallo $[a, b]$.

Si noti, già da qui, una differenza anche tecnica con il concetto di primitiva: una funzione illimitata può tranquillamente avere primitive, vedi oss.1.7, mentre non è sicuramente integrabile secondo Riemann.

Osservazione 2.2. Il simbolo utilizzato per l'integrale di Riemann (detto anche integrale definito) è

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{o anche} \quad \int_a^b f\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{o semplicemente} \quad \int_a^b f\,.$$

Nonostante la quasi identità di notazioni rispetto all'insieme delle primitive di una funzione, i due simboli hanno significati completamente diversi:

— $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ rappresenta un insieme di funzioni (se la funzione f ha primitive!);
— $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rappresenta un numero reale (se la funzione f è integrabile!).

Osservazione 2.3. Tutte le funzioni continue sono integrabili secondo Riemann, ma anche funzioni anche ampiamente discontinue, purchè limitate, sono integrabili: un famoso teorema (di Vitali e Lebesgue) classifica le funzioni Riemann-integrabili in relazione alla numerosità dei loro punti di discontinuità; anche se l'enunciato preciso di questo teorema esula dagli scopi di questa nota, segnalo che una funzione che abbia un numero finito o un'infinità numerabile di discontinuità è integrabile secondo Riemann. Come conseguenza di questo fatto, e la cosa riveste una grande importanza, l'integrale di Riemann non cambia se si cambia il valore di una funzione in un numero finito, o addirittura in un'infinità numerabile di punti: l'integrale di Riemann si preoccupa dell'andamento globale di una funzione (limitata) su un intervallo, e non del suo comportamento "locale".

3 Integrali impropri

L'integrale di Riemann risolve il problema della misura di insiemi piani in un grande numero di casi, ma non è sufficiente per le applicazioni, anche in casi di frequente interesse. Solo la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue risulta essere pienamente soddisfacente, sia dal punto di vista pratico che da quello teorico. Considerata comunque la complessità di questa teoria, è possibile considerare invece una estensione del concetto di integrale di Riemann, sufficiente a trattare i casi più comuni: si tratta del concetto di integrale improprio, che tratta i casi di funzioni definite su intervalli illimitati, oppure illimitate in prossimità di un numero finito di punti.

Per questo si introducono le definizioni che seguono.

Cominciamo con il caso di funzioni da integrare su intervalli illimitati.

Definizione (Integrale improprio su intervalli illimitati)

Sia $f\colon I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c,d]$ *contenuto in* I*. Allora ha senso,* $\forall t \in I$*,*

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l \in \mathbb{R}\,,$$

la funzione si dice integrabile in senso improprio, o generalizzato, *in* I *e si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l$$

Analoga definizione se la funzione gode delle stesse proprietà in $I =]-\infty,a]$, che porta alla considerazione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nell'ipotesi che il limite esista finito.

Se poi la funzione gode delle stesse proprietà addirittura in tutto $\mathbb{R}$, allora si può definire l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

come somma degli integrali

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{a}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

purchè *entrambi* gli integrali esistano, ciascuno per proprio conto, finiti, ovvero purché esistano finiti i due limiti

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{u\to-\infty}\int_{u}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Consideriamo ora il caso di funzioni illimitate in prossimità di qualche punto del loro dominio.

Definizione (Integrale improprio di funzioni illimitate)

Sia $f\colon I=[a,b]\setminus\{x_0\}\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,d]$ contenuto in I. La funzione può anche essere illimitata in un intorno di x_0. Se t e u sono punti di I, con $t<x_0$ e $u>x_0$, hanno senso, rispettivamente, gli integrali

$$\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad t<x_0 \qquad e \qquad \int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad u>x_0\,.$$

Se, ciascuno per proprio conto, esistono finiti i limiti

$$\lim_{t\to x_0^-}\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad \lim_{u\to x_0^+}\int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

allora si pone

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to x_0^-}\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \lim_{u\to x_0^+}\int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se x_0 coincide con a oppure con b, basta considerare uno solo dei due integrali e limiti precedenti. Se invece di un unico punto x_0, ce ne sono un numero finito con le stesse caratteristiche, basterà "spezzare" l'integrale in corrispondenza di ciascuno dei punti, esattamente come fatto con x_0.

Osservazione 3.1. Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che, in entrambi i casi considerati, gli integrali impropri

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

sono definiti mediante due limiti che vanno calcolati *separatamente* e che devono esistere, *entrambi*, finiti.

A titolo d'esempio consideriamo la funzione $f(x) = x$ (su tutto $\mathbb{R}$). Per valutare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \,\mathrm{d}x\,,$$

dobbiamo calcolare, separatamente,

$$\lim_{t\to-\infty} \int_{t}^{0} x \,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty} \int_{0}^{t} x \,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo limite vale $-\infty$, mentre il secondo vale $+\infty$, per cui l'integrale richiesto non esiste o, come si usa dire, diverge.

Se avessimo calcolato, invece,

$$\lim_{t\to+\infty} \int_{-t}^{t} x \,\mathrm{d}x\,,$$

avremmo ottenuto 0, e questo non sarebbe stato il valore dell'integrale proposto.

Come secondo esempio consideriamo la funzione $g(x) = {}^1\!/_x$, in $[-1, 1]$. Per calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\,,$$

dobbiamo calcolare, separatamente,

$$\lim_{t\to0^-} \int_{-1}^{t} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{u\to0^+} \int_{t}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x\,.$$

Anche ora il primo limite vale $-\infty$, mentre il secondo vale $+\infty$, per cui l'integrale richiesto non esiste o, come si usa dire, diverge.

Se avessimo calcolato, invece,

$$\lim_{t\to0^+} \left[\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int_{t}^{1} \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \right]\,,$$

avremmo, anche in questo caso, ottenuto zero e, ancora una volta, questo non sarebbe stato il valore dell'integrale proposto.

Osservazione 3.2. Anche se il significato geometrico dell'integrale improprio non è dissimile da quello dell'integrale di Riemann, con la particolarità aggiuntiva che ora si consente la quadratura anche di regioni illimitate del piano, il concetto di integrale improprio è logicamente diverso, in quanto ottenuto mediante un processo di limite. Una delle proprietà che rendono evidente la differenza è che, nell'integrale di Riemann, se un funzione è integrabile lo è anche il suo modulo, mentre nell'integrale improprio succede esattamente l'opposto: se il modulo di una funzione è integrabile, allora lo è anche la funzione, ma non viceversa.

Osservazione 3.3. Si possono naturalmente considerare situazioni in cui ci sono combinazioni dei due casi qui trattati, ovvero integrali su intervalli illimitati di funzioni illimitate in prossimità di qualche loro punto: bisognerà "spezzare" opportunamente l'integrale nella somma di diversi integrali, ciascuno dei quali dovrà esistere finito.

Potete trovare una trattazione più dettagliata del concetto di integrale improprio, comprendente la spiegazione del perché la definizione viene data nel modo indicato, nel fascicoletto *Integrali impropri*, reperibile in `http://www.batmath.it/matematica/a_int_impropri/int_impropri.htm`.

4 La funzione integrale

Consideriamo una funzione f, definita in un insieme D, con la proprietà di essere integrabile, magari in senso improprio, in ogni sottointervallo di D.

Se a e x sono punti di D, ha allora senso l'integrale

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

e questo integrale è, una volta che si sia fissato a, una funzione di x: $F_a(x)$. Si dà in proposito la seguente

Definizione (Funzione integrale)

Nelle ipotesi dette per f, la funzione

$$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

si chiama funzione integrale*, di punto iniziale a, della funzione f.*

Se l'integrale

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

è elementarmente calcolabile, allora la funzione $F_a(x)$ si può esprimere in termini di funzioni elementari. Per esempio si ha:

$$F_0(x) = \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t = [-\cos t]_0^x = -\cos x + 1\,.$$

Se però l'integrale citato non è elementarmente calcolabile, allora la funzione $F_a(x)$ non si può esprimere in termini di funzioni elementari. È per esempio il caso seguente:

$$F_0(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,,$$

quando la funzione ottenuta non è elementare. È da tenere presente che l'uso della funzione integrale è uno dei sistemi più importanti per costruire funzioni non elementari.

Osservazione 4.1. L'esistenza della funzione integrale $F_a(x)$ è legata unicamente all'integrabilità, magari in senso improprio, della funzione f, nell'intervallo $[a,x]$, oppure $[x,a]$ (nel caso che l'integrabilità di f sia intesa in senso improprio bisogna prestare la massima attenzione; nelle applicazioni si considera quasi esclusivamente il caso di funzioni integrabili secondo Riemann). In ogni caso la funzione f può essere ampiamente discontinua nel suo dominio. Ebbene è un risultato molto importante il fatto che la *funzione integrale è sempre continua*, qualunque sia il punto iniziale a: la funzione integrale è, nella sostanza, più regolare che non la funzione integranda.

5 Il link tra primitive e integrali

Il risultato cruciale di tutta la teoria degli integrali, probabilmente uno dei risultati più importanti dell'analisi delle funzioni di una variabile, è il famoso

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione f, definita in D, e dotata di funzione integrale $F_a(x)$, con punto iniziale a, è continua in un punto x_0 di D, allora la funzione integrale è derivabile in x_0 e si ha

$$F'_a(x_0) = f(x_0)\,.$$

In particolare, se f è continua in tutto l'intervallo I, $F_a(x)$ è derivabile in tutto I e si ha, sempre in tutto I, $F'_a(x) = f(x)$, ovvero F è una primitiva di f.

Osservazione 5.1. Il teorema precedente stabilisce un link essenziale tra il concetto di primitiva e quello di integrale definito e, in un certo senso, costituisce una giustificazione della similarità dei simboli usati nei due casi.

Si deve però ricordare che questo link vale solo per funzioni continue. In particolare:

— se una funzione è integrabile ha sicuramente funzioni integrali, ma, se è discontinua, non è detto che abbia primitive, basta considerare l'esempio della funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (vedi oss.1.6);

— viceversa una funzione può avere primitive senza essere integrabile, come visto in oss.1.7.

Osservazione 5.2. Anche considerando funzioni continue, si deve osservare che, se è vero che ogni funzione integrale è una primitiva, viceversa ci possono essere primitive che non sono funzioni integrali, ovvero l'insieme delle primitive è un soprainsieme proprio di quello delle funzioni integrali. Per convincersi di questo basta osservare che una qualunque funzione integrale deve annullarsi almeno in un punto (il punto iniziale), mentre una funzione può avere primitive sempre diverse da zero; un esempio semplice è costituito dalla funzione $f(x) = 2x$, che ha la funzione $F(x) = x^2 + 1$ tra le sue primitive e, come si può vedere banalmente, F non si annulla mai.