Matematica per l'eccellenza - Polinomi

Materiale prelevato da[*]
http://www.batmath.it/matematica/eccell/eccell.htm

Versione del 5 marzo 2010

1 Notazioni

Salvo avviso contrario opereremo sempre sul campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali o sul campo $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Denoteremo i polinomi in una variabile (o indeterminata) con la seguente scrittura:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n\,, \quad a_n \neq 0\,.$$

I numeri a_0, a_1, ..., a_n si dicono i *coefficienti* del polinomio, il numero a_0 è anche detto *termine noto*, il numero n (esponente del termine di grado massimo) é il *grado* del polinomio e si scrive $\deg(p) = n$. Se il coefficiente a_n vale 1, il polinomio si dice *monico*.

In moltissimi problemi i coefficienti del polinomio sono vincolati ad essere numeri interi ed è allora chiaro che, per questo tipo di polinomi, $p(a)$ è intero, per qualsiasi a intero.

Ogni numero reale a tale che $p(a) = 0$ si chiama una *radice* o *zero* del polinomio. Una radice del polinomio è naturalmente una soluzione dell'equazione

$$p(x) = 0\,,$$

ottenuta uguagliando a zero il polinomio.

2 Il teorema di Ruffini

Il teorema di Ruffini (teorema di fattorizzazione o teorema del resto) è di grande importanza in tutte le questioni riguardanti i polinomi: se $p(x)$ è un polinomio di grado n, e a è un reale qualunque, si ha che

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a)\,,$$

ove $q(x)$ è un opportuno polinomio di grado $n - 1$.

In sostanza la formula precedente esprime il fatto che $q(x)$ è il quoziente della divisione di $p(x)$ per $x - a$, mentre $p(a)$ è il resto di questa divisione. Se $p(a)$ è zero, il polinomio $p(x)$ è divisibile per $x - a$ e si scrive, conformemente a quanto si fa con gli interi,

$$x - a \mid p(x)\,,$$

formula che si legge: $x - a$ divide $p(x)$.

È importante osservare che se $p(x)$ è a coefficienti interi e a è un intero, anche $q(x)$ è a coefficienti interi. Una dimostrazione elementare si deduce tenendo presente la tecnica che si usa per dividere due polinomi, e il risultato è legato al fatto che $x - a$ è un polinomio (di primo grado) monico.

[*]Queste note contengono solo alcune idee relative ai polinomi e non hanno alcuna pretesa di completezza e sistematicità.

3 Il principio di identità dei polinomi

Se due polinomi di grado minore o uguale a n assumono lo stesso valore in $n+1$ punti distinti, allora sono identici, il che significa che hanno lo stesso grado e gli stessi coefficienti.

Il principio è sostanzialmente connesso, anche se non entriamo nei dettagli tecnici, al fatto che un polinomio di grado n ha $n+1$ coefficienti e la determinazione di questi coefficienti è legata alla risoluzione di un sistema lineare (cioè di primo grado) di $n+1$ equazioni (ottenute imponendo che il polinomio abbia i valori assegnati in corrispondenza degli $n+1$ punti) in $n+1$ incognite (i coefficienti appunto).

4 Fattorizzazione di un polinomio

Se $p(x)$ è un polinomio di grado n e α_1, α_2, ..., α_r sono le sue, eventuali, radici (reali), il polinomio si può sempre decomporre nel seguente modo:

$$p(x) = a_n(x-\alpha_1)^{m_1}(x-\alpha_2)^{m_2}\dots(x-\alpha_r)^{m_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}(x^2+p_2x+q_2)^{s_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{s_t}\,,$$

dove tutti i trinomi di secondo grado hanno discriminante negativo, e quindi non sono ulteriormente scomponibili (in $\mathbb{R}$). I numeri m_1, m_2, ..., m_r si chiamano *molteplicità* delle radici α_1, α_2, ..., α_r rispettivamente. Si deve ovviamente avere

$$n = m_1 + m_2 + \dots + m_r + 2s_1 + 2s_2 + \dots + 2s_t\,.$$

Questo risultato è una conseguenza del teorema fondamentale dell'algebra, applicato ai polinomi a coefficienti reali. Segnaliamo, per chi conosce i numeri complessi, che i trinomi di secondo grado a discriminante negativo sono ulteriormente scomponibili in $\mathbb{C}$ e che, allora, i numeri s_1, s_2, ..., s_t sono le molteplicità delle coppie di radici complesse coniugate di ciascuno di questi trinomi di secondo grado.

Si tenga ben presente che, se è ben vero che ogni polinomio in $\mathbb{R}$ si può fattorizzare nel modo detto, non è affatto detto che tale fattorizzazione possa essere determinata in pratica. Molti problemi "olimpici" o dei test di ammissione alle scuole di eccellenza sono proprio legati alla fattorizzazione non elementare di polinomi.

5 Qualche fattorizzazione e identità notevole

— $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
— $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, solo per $n \in \mathbb{N}, n$ dispari.
— $a^n - b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$, solo per $n \in \mathbb{N}, n$ pari.
— $a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + b^2)$
Questa formula è detta identità di Sophie-Germain, matematica francese (Parigi, 1776-1831), ed è notevole perchè consente la scomposizione della somma di due speciali quadrati negli interi.
— $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$.
Questa formula si può leggere dicendo che se due numeri sono la somma di due quadrati, anche il loro prodotto è la somma di due quadrati.

Il fatto che la seconda delle fattorizzazioni riportate valga solo per n dispari, non significa che non si possa fattorizzare la somma $a^n + b^n$, per certi valori di n con n pari. Si ha ad esempio

$$a^6 + b^6 = (a^2)^3 + (b^2)^3 = (a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4)\,.$$

6 Una utile proprietà dei polinomi a coefficienti interi

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e a, b sono due interi distinti, allora

$$a - b \mid p(a) - p(b)\,.$$

La dimostrazione di questo risultato è una semplice, ma interessante, applicazione del teorema di Ruffini. Si ha infatti

$$p(x) = (x - a)q(x) + p(a)\,,$$

dove $q(x)$ è ancora a coefficienti interi. Da qui si deduce

$$p(b) = (b - a)q(b) + p(a) \Rightarrow p(a) - p(b) = (a - b)q(b)\,,$$

da cui si ottiene il risultato voluto, tenendo conto che $q(b)$ è un numero intero.

7 Il teorema degli zeri razionali

Se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi e p/q è una sua radice razionale, allora $p \mid a_0$ e $q \mid a_n$.

Questo risultato è di vitale importanza per la ricerca degli zeri di un polinomio. In pratica si procede come segue:ù

1. si scrivono tutti i divisori di a_0;
2. si scrivono tutti i divisori di a_n;
3. si scrivono tutte le frazioni che hanno al numeratore un divisore di a_0 e al denominatore un divisore di a_n;
4. si procede (con pazienza!) a verificare se uno dei razionali trovati al punto precedente è radice del polinomio. . .

Ricordiamo che se nessuno dei razionali trovati è radice si può concludere che il polinomio non ha zeri razionali, ma potrebbe averne di reali non razionali.

Ricordiamo anche che ogni polinomio di grado dispari ha almeno uno zero reale e che esiste una formula, a tutti nota (!), per determinare le eventuali radici dei polinomi di secondo grado. Esistono anche formule per determinare gli eventuali zeri dei polinomi di terzo e quarto grado, mentre non esistono formule per polinomi di grado superiore al quarto.

La formula che permette di trovare le radici di un polinomio di secondo grado si ricava con la tecnica del *completamento dei quadrati*, tecnica molto importante in tantissimi problemi e che qui richiamiamo brevemente. Si ha

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right],$$

da cui si ricava immediatamente la nota formula.

8 Riducibilità

Un polinomio $p(x)$ si dice *riducibile* se esistono due polinomi $q_1(x)$ e $q_2(x)$, di grado maggiore o uguale a 1 (cioè non costanti), tali che

$$p(x) = q_1(x) \cdot q_2(x).$$

Un polinomio $p(x)$, non costante, per cui non valga l'identità precedente per nessuna coppia di polinomi $q_1(x)$ e $q_2(x)$ non costanti, si dice *irriducibile*. I polinomi irriducibili giocano, nell'anello dei polinomi su un campo $\mathbb{K}$, un ruolo simile a quello dei numeri primi negli interi: in particolare si dimostra che ogni polinomio $p(x)$ di grado maggiore o uguale a 1 si fattorizza in modo unico, a meno dell'ordine, nel prodotto di polinomi irriducibili. Si tenga ben presente che la riducibilità o meno di un polinomio in un dato campo $\mathbb{K}$ dipende dal campo stesso. Per esempio:

1. $x^2 - 2$ è irriducibile in $\mathbb{Q}$, mentre in $\mathbb{R}$ si può scomporre in $(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$;
2. $x^2 + 1$ è irriducibile in $\mathbb{R}$, mentre in $\mathbb{C}$ si può scomporre in $(x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})$.

È chiaro, in base al teorema di Ruffini, che se un polinomio ha una radice, a, allora è riducibile nel prodotto $p(x) = (x - a)q(x)$. È però importante tenere presente che anche un polinomio senza radici può essere riducibile. Per esempio il polinomio $p(x) = x^4 + 1$ non ha chiaramente radici in $\mathbb{R}$, ma si ha:

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}\,x)^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)\,,$$

cioè il polinomio è riducibile. Si noti che questo risultato era prevedibile, sulla base della fattorizzazione dei polinomi in $\mathbb{R}$ precedentemente citata.

Un utile criterio di irriducibilità per i polinomi a coefficienti interi è il seguente *Criterio di Eisenstein*: se $p(x)$ è un polinomio a coefficienti interi ed esiste un primo p che divide tutti i suoi coefficienti, tranne quello di grado massimo, e inoltre p^2 non divide a_0, allora il polinomio è irriducibile sugli interi.