Università degli studi di Udine - Facoltà di Ingegneria

Matematica di base

Soluzione schematica del tema del 24/01/2011

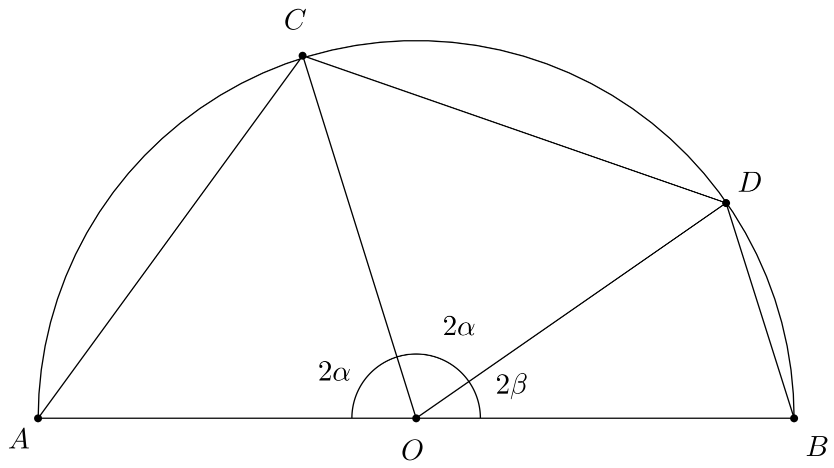
Luciano Battaia(*)

25 gennaio 2011

Questo fascicolo contiene la risoluzione schematica del tema di Matematica di Base, assegnato agli studenti iscritti alla Facoltà di Ingegneria dell'Università degli studi di Udine il 24 gennaio 2011. Al link http://www.batmath.it/matematica/mat_base/mat_base.htm si può trovare la raccolta di tutti i temi assegnati dal 28 settembre 2001 in poi, con soluzione breve.

Esercizio 1. Sulla semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ si considerino i punti C e D tali che $AC = CD = 2DB$. Calcolare il perimetro del quadrilatero $ABDC$

Risoluzione: Si veda la figura seguente che traduce le informazioni date dal testo.



Si ha, per il noto teorema della corda,

$$\overline{AC} = \overline{CD} = 2r \sin \alpha\,, \quad \overline{DB} = 2r \sin \beta\,.$$

Da qui, tenendo conto che $AC = 2DB$, si trova

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DB}} = 2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}\,.$$

*http://www.batmath.it

Poichè

$$2\alpha + 2\alpha + 2\beta = \pi\,,$$

se ne deduce che

$$2\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\,.$$

La precedente relazione tra $\sin\alpha$ e $\sin\beta$ si traduce allora in un'equazione in α:

$$\sin\alpha = 2\sin\beta \;\Rightarrow\; \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\,.$$

Si trova facilmente

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}\,.$$

Il perimetro richiesto è quindi:

$$2p = \frac{r}{8}\left(11 + 5\sqrt{33}\right)\,.$$

Esercizio 2. Si consideri il polinomio

$$P(x) = x^3 - hx^2 - x + h,\; h \in \mathbb{R}\,.$$

a) Dire per quali valori di h, $x = h$ è radice di $P(x)$;
b) dire quali sono i valori di h per i quali $x = h$ è radice multipla di $P(x)$.

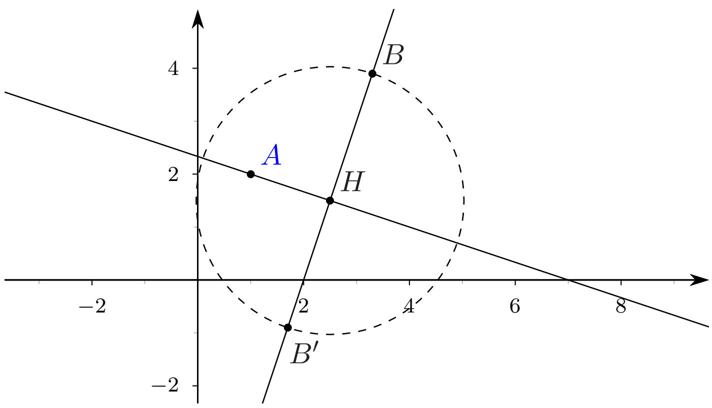
Risoluzione: Il polinomio dato si scompone in

$$P(x) = (x^2 - 1)(x - h) = (x - 1)(x + 1)(x - h)\,.$$

Se ne deduce subito che h è sempre radice del polinomio stesso, e che è radice multipla (doppia) per $h = \pm 1$.

Esercizio 3. Dati il punto $A = (1, 2)$ e la retta r di equazione $3x - y - 6 = 0$, determinare la proiezione ortogonale H di A su r e i punti B di r tali che l'area del triangolo AHB sia 2.

Risoluzione:
Si esamini la figura che segue.



Il punto H si trova subito intersecando la retta r con la sua perpendicolare per A. Si trova $H = (5/2\,, 3/2)$. A questo punto si trova la distanza $\overline{AH}$ come distanza tra due punti (si poteva naturalmente anche usare la formula della distanza tra un punto un punto e una retta):

$$\overline{AH} = \frac{\sqrt{10}}{2}\,.$$

I punti B richiesti devono allora essere tali che $\overline{AH}\;\overline{HB}$ sia il doppio dell'area data. Si trova

$$\overline{HB} = \frac{8}{\sqrt{10}}\,.$$

Per trovare i punti B basterà intersecare la circonferenza di centro H e raggio $\overline{HB}$ con la retta r data. Si trova

$$B = \left(\frac{33}{10}\,,\,\frac{39}{10}\right)\,,\quad B' = \left(\frac{17}{10}\,,\,-\frac{9}{10}\right)\,.$$

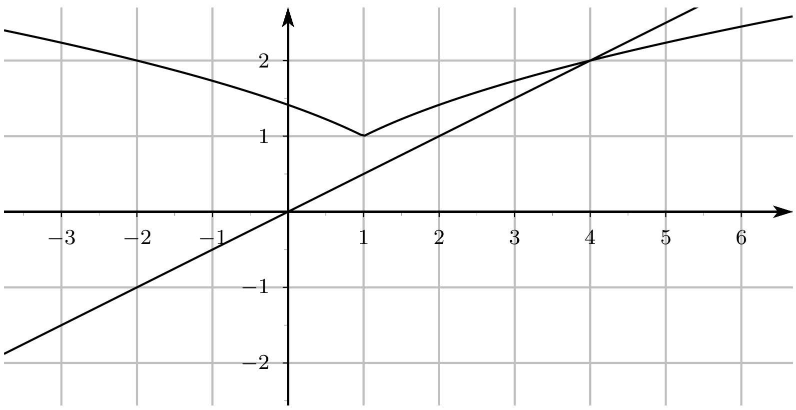
Esercizio 4. Risolvere la disequazione irrazionale algebrica

$$\sqrt{|x-1|+1} \geq \frac{x}{2}\,.$$

Risoluzione: Tra le varie soluzioni possibili la più semplice è quella per via grafica, elementare se si osserva che

$$\sqrt{|x-1|+1} = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se} \quad \geq 1 \\ \sqrt{2-x}, & \text{se} \quad x < 1 \end{cases}\,.$$

Si veda la figura che segue.



Se ne deduce subito che l'insieme delle soluzioni è $]-\infty, 4]$.

Esercizio 5. Si consideri il trapezio isoscele $ABCD$ in cui $\overline{AB} = 5$ è la base maggiore, $\overline{BC} = 3$ è un lato obliquo e $\overline{AC} = 4$ è la diagonale. Condotte dai vertici A e C le bisettrici degli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$ rispettivamente, e detti M ed N i punti di incontro di queste rette con BC e AD, dimostrare che le due bisettrici sono parallele e calcolare l'area del trapezio $AMCN$.

Risoluzione: Si esamini la figura che segue.

Cominciamo con l'osservare che l'angolo γ è retto per le note proprietà delle terne pitagoriche. Gli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$ sono uguali perchè le rette AB e CD sono parallele. Ne segue che anche i quattro angoli segnati con α sono uguali e quindi che le due rette NC e AM sono parallele.

Dal triangolo rettangolo ABC si ricava

$$\sin 2\alpha = \frac{3}{5}\,,\quad \cos 2\alpha = \frac{4}{5}\,,$$

da cui

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}\,,\quad \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}\,.$$

A questo punto nel triangolo (rettangolo) ACM si ricava facilmente $\overline{CM}$ e l'area.

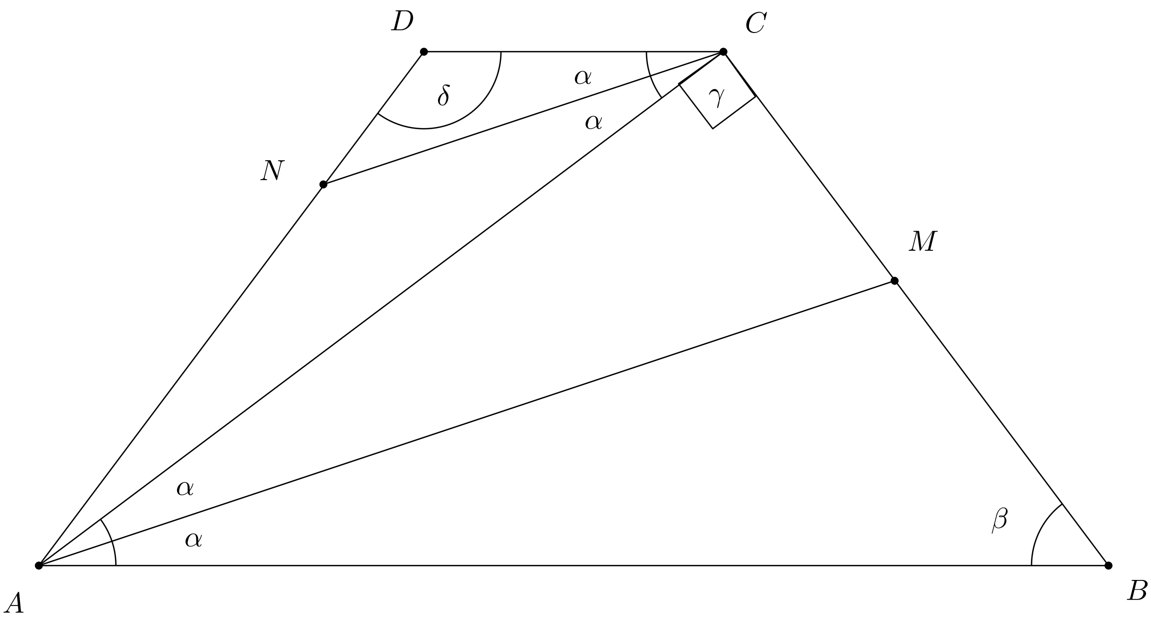
Rimane da trovare l'area del triangolo ACN che si può fare con la formula

$$\frac{1}{2}\overline{CN}\ \overline{AC}\sin\alpha\,.$$

La determinazione di $\overline{AC}$ si può fare direttamente nel trapezio isoscele di partenza, trovando prima la proiezione di CB sulla base maggiore. A questo punto la lunghezza del segmento CN si può fare nel triangolo CDN, con il teorema dei seni, in quanto si conoscono $\overline{CD}$, $\sin\alpha$ e si può trovare $\sin\delta$, che è uguale a $\sin\beta$.

Eseguendo tutti i calcoli si trova, infine, che l'area è

$$\frac{176}{45}\,.$$



Esercizio 6. Data l'equazione

$$x^2 - kx + k - 4 = 0\,,\quad x\in\mathbb{R}\,,$$

determinare i valori di $k\in\mathbb{R}$ tali che la somma dei quadrati delle soluzioni sia 11.

Risoluzione: Si deve ricordare che, se x_1 e x_2 sono le radici, si ha

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)\,,$$

con il solito significato dei simboli.

Impostando i calcoli si trova l'equazione in k:

$$k^2 - 2k - 3 = 0\,,$$

che ha peri soluzioni $k=-1$ e $k=3$, entrambe accettabili perché il discriminante relativo è positivo.

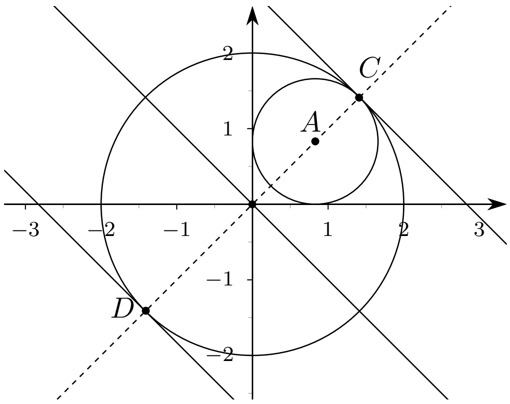
Esercizio 7. Sono date la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2 + y^2 = 4$ e la retta r di equazione $x + y = 0$. Scrivere le equazioni delle rette parallele ad r e tangenti a $\mathcal{C}$. Scrivere inoltre l'equazione della circonferenza contenuta nel primo quadrante e tangente internamente a $\mathcal{C}$.

Risoluzione: I punti di tangenza delle rette parallele ad r con la $\mathcal{C}$ sono, banalmente,

$$C = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad \text{e} \quad D = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}).$$

Le equazioni delle due rette richieste sono dunque

$$x + y = 2\sqrt{2} \quad \text{e} \quad x + y = -2\sqrt{2}.$$



Per trovare l'equazione della circonferenza richiesta si può osservare che, detto $A = (a, a)$ il suo centro, si deve avere

$$a = \overline{AC},$$

ovvero

$$a = \sqrt{(a - \sqrt{2})^2 + (a - \sqrt{2})^2},$$

da cui $a = 2(\sqrt{2} - 1)$. L'equazione richiesta è:

$$\left(x - 2\sqrt{2} + 2\right)^2 + \left(y - 2\sqrt{2} + 2\right)^2 = \left(2\sqrt{2} - 2\right)^2.$$

Esercizio 8. Risolvere la disequazione

$$\frac{2\cos 2x + 2(\sqrt{3} + 1)\sin x - 2 - \sqrt{3}}{3\sin^2 x - \cos^2 x} \geq 0, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Risoluzione: Si può studiare il segno di numeratore e denominatore e poi fra un grafico di segno. Per quanto riguarda il numeratore, trasformando tutto in $\sin x$, si trova che è positivo per

$$\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Procedendo allo stesso modo con il denominatore, si trova che esso è positivo per

$$\sin x < -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin x > \frac{1}{2}.$$

Se ne deduce che la disequazione è verificata per

$$x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right].$$

Esercizio 9. Scrivere l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ che ammette come fuoco il punto $F = (1, -3/4)$ e come direttrice la retta $y = -5/4$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{P}$ e ortogonale alla retta $x - 2y + 2 = 0$.

Risoluzione: L'equazione della parabola $\mathcal{P}$ si può fare in base alla definizione: la parabola è il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti dal fuoco e dalla direttrice. Detto $P = (x, y)$ il generico punto della parabola, si deve avere allora

$$\sqrt{(x-1)^2 + \left(y + \frac{3}{4}\right)^2} = \left|y + \frac{5}{4}\right|$$

Quadrando e semplificando si ottiene

$$y = x^2 - 2x\,.$$

La retta richiesta deve avere coefficiente angolare -2 (condizione di perpendicolarità), e dunque sarà del tipo $y = -2x + q$. Mettendola a sistema con la parabola e richiedendo che il discriminante della equazione risolvente sia 0 si trova subito $q = 0$. La retta richiesta è dunque

$$y = -2x\,.$$

Esercizio 10. Determinare i numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} < 1 \\ x - k^2(x-1) - x^2 > 0 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R},$$

non abbia soluzioni.

Risoluzione: La prima disequazione risulta verificata per $x < -3$ e per $x > 1$. La seconda risulta verificata per $-k^2 < x < 1$. Se si richiede che il sistema non abbia soluzioni occorrerà che l'intervallo delle soluzioni della seconda sia un sottointervallo di $[-3, 1]$, ovvero che $-3 \le -k^2 \le 1$. Si trova facilmente

$$-\sqrt{3} \le k \le \sqrt{3}\,.$$