

Il teorema dell'unicità del limite

Luciano Battaia e Maddalena Falanga

17 dicembre 2006

Sommario

Riportiamo in questo breve articolo due diverse dimostrazioni, prese quasi integralmente da due testi in uso nelle scuole medie superiori del famoso teorema dell'unicità del limite. Scopo di questa trattazione è di far vedere come si possa “rendere impossibile” una dimostrazione semplice ed elementare. Il motivo che ci ha spinto a scrivere queste pagine si può leggere in http://www.batmath.it/stampa/manuali/unic_limite.htm.

1 Una dimostrazione. . . “arzigogolata”

Dimostriamo ora il fondamentale:

Teorema dell'unicità del limite. Se, per $x \rightarrow c$, la funzione $f(x)$ ammette un limite, questo è unico.

Infatti, dalle definizioni risulta subito che una funzione non può ammettere contemporaneamente i limiti $+\infty$ e $-\infty$ (*) e neppure un limite finito e un limite infinito. Resta dunque da considerare il caso che esistano due limiti finiti distinti, l ed l' . Supposto, per assurdo, che ciò sia possibile, si prenda il numero

$$\frac{\epsilon}{2}$$

positivo e arbitrariamente piccolo e, in particolare, tale che risulti

$$\epsilon < |l' - l|;$$

allora sarà possibile trovare un intorno I' di c per i punti x del quale, escluso al più c , risulti

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}$$

ed un altro intorno I'' di c tale per cui risulti

$$|f(x) - l'| < \frac{\epsilon}{2}$$

per ogni $x \in I''$, escluso al più c .

Per tutti i valori di x , escluso al più c , comuni ai due intorni trovati, cioè per $x \in I = I' \cap I''$, queste due ultime disuguaglianze valgono contemporaneamente, quindi, sommandole membro a membro, si avrà

$$|f(x) - l| + |f(x) - l'| < \epsilon. \quad (1)$$

Si noti ora che si ha l'identità

$$l' - l = [f(x) - l] - [f(x) - l']$$

per cui, essendo il valore assoluto di una differenza minore od eguale alla somma dei valori assoluti dei due termini (**), si ha pure

$$|l' - l| \leq |f(x) - l| + |f(x) - l'|,$$

ossia, per la disuguaglianza precedente (2) e sempre nell'intorno I comune (escluso al più c),

$$|l' - l| < \epsilon.$$

Questo è un assurdo, perché contrasta con l'ipotesi che sia $\epsilon < |l' - l|$. Si deve così concludere che, se $f(x)$ ammette un limite, questo è unico. c.v.d.

(*) Cioè, per una data funzione $y = f(x)$ non possono sussistere contemporaneamente, ad esempio, le scritture:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= +\infty; \\ \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) &= -\infty. \end{aligned}$$

Si osservi che la scrittura

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \infty;$$

non significa che $f(x)$ ha due limiti ($+\infty$ e $-\infty$), bensì che $f(x)$, per $x \rightarrow c^-$, assume valori sempre più grandi in valore assoluto "oscillanti" tra $-\infty$ e $+\infty$.

(**) In generale, infatti, $|\alpha - \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

2 Una dimostrazione... "normale"

Per semplicità ci limiteremo a considerare il caso in cui i limiti, per $x \rightarrow c$, siano *finiti*. Il lettore, come utile esercizio, potrà provare questo teorema anche nei casi in cui qualche (od ogni) limite sia infinito, e quando $x \rightarrow \infty$.

TEOREMA DELL'UNICITÀ DEL LIMITE. **Se esiste il limite della funzione $f(x)$, per x tendente a c , tale limite è unico.**

Per dimostrare il teorema, ragioniamo per assurdo e supponiamo che, per $x \rightarrow c$, la funzione ammetta due limiti finiti diversi, l ed m , e sia $l < m$; cioè risulti:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} f(x) = m, \quad l < m.$$

Allora, per definizione di limite, per *ogni* $\epsilon > 0$, scelto ad arbitrio, devono esistere due intorni I_1 e I_2 di c , tali che si abbia, rispettivamente,

$$l - \epsilon < f(x) < l + \epsilon, \quad \forall x \in I_1 \setminus c,$$

e

$$m - \epsilon < f(x) < m + \epsilon, \quad \forall x \in I_2 \setminus c.$$

Siccome le due uguaglianze scritte devono valere per ogni scelta di ϵ , possiamo approfittare di questo fatto e scegliere ϵ in modo da ottenere un assurdo. Basta prendere:

$$\epsilon = \frac{m - l}{2}.$$

Le due doppie disuguaglianze sopra scritte diventano:

$$\frac{3l - m}{2} < f(x) < \frac{l + m}{2}, \quad \forall x \in I_1 \setminus c,$$

e

$$\frac{l + m}{2} < f(x) < \frac{3m - l}{2}, \quad \forall x \in I_2 \setminus c.$$

Se ora consideriamo tutti gli $x \in I_1 \cap I_2 \setminus c$, le disuguaglianze devono valere simultaneamente, da cui si deduce subito:

$$\frac{l + m}{2} < f(x) < \frac{l + m}{2},$$

palesamente assurda.

3 Commenti

Si può notare a prima vista la sostanziale differenza nel formulare le due dimostrazioni. Si tratta naturalmente di una differenza di forma e non di sostanza, perché i ragionamenti e le conclusioni sono corretti in entrambi i casi.

Segnaliamo in particolare l'inizio, per lo meno azzardato, della prima dimostrazione (“Infatti dalle definizioni... infinito.”): ci pare che un'affermazione del genere renda già di per sé inutile la dimostrazione. Se la tesi del teorema è evidente quando almeno uno dei limiti è infinito, è altrettanto, se non più, evidente quando entrambi sono finiti!

Inoltre, mettendoci nei panni di un neofita che incontra questo teorema proprio all'inizio della teoria dei limiti, non possiamo non provare un notevole disagio nel leggere una dimostrazione che comincia con la scelta di un $\epsilon/2$, al posto dell' ϵ usato fino a quel momento: sembra proprio che il tutto sia costruito con un artificio “per far tornare i conti che altrimenti non verrebbero”. Si perde così di vista quello che invece è il punto essenziale del ragionamento, e cioè il fatto che punti distinti in \mathbb{R} possano avere intorni disgiunti.

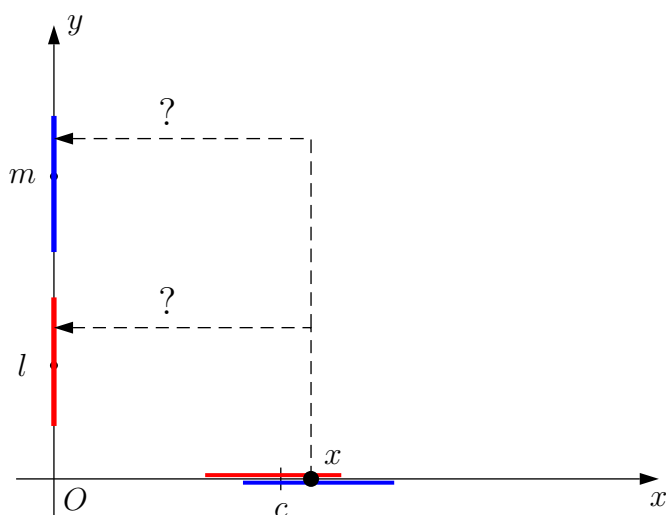
Ma la cosa peggiore è, secondo noi, il fatto delle inutili complicazioni di calcolo introdotte nel ragionamento, andando a scomodare addirittura una proprietà dei valori assoluti, importante, ma inutile in questo contesto.

4 Ma si può fare ancora di più. . .

Ci pare utile segnalare anche che, scegliendo di dare la definizione di limite usando direttamente gli intorno, anziché il tradizionale metodo “ ϵ - δ ”, tutto si semplificherebbe ulteriormente e non ci sarebbe nemmeno bisogno di considerare separatamente il caso dei limiti infiniti da quello in cui entrambi i limiti sono finiti.

Con questa scelta la dimostrazione potrebbe essere fatta quasi solo a parole: se per ipotesi la funzione ha due limiti diversi l ed m , e se scelgo due intorni *disgiunti* per l ed m , posso concludere che esiste un intorno di c per tutti gli x del quale i valori di $f(x)$ cadono contemporaneamente nei due intorni scelti, cosa palesemente assurda, visto che questi non hanno punti in comune.

Una illustrazione grafica opportuna, come quella di seguito riportata, aiuterebbe subito ad evidenziare il nocciolo del problema e a memorizzare in maniera efficace il ragionamento, sicuramente molto meglio che non l'apprendere a memoria una serie di calcoli che sembrano astrusi e, sicuramente, potrebbero essere evitati.



È chiaro che la “freccia sparata dal punto x ” non può finire sia “vicino a l ” che “vicino a m ”.

Per concludere riportiamo quanto scrive Mario Dolcher nel suo *Elementi di Analisi Matematica*, Lint, Trieste 1991: ci paiono idee assolutamente condivisibili.

Pensando alla preparazione di chi accede all'università, 'incomincian le dolenti note' (Inf.V). Premetto che non voglio generalizzare. Eccezioni ci sono: qualche insegnamento preuniversitario valido non manca. Ma son casi tanto rari che chi deve prendersi cura di giovani appena entrati all'università preferirebbe, il più delle volte, avere dinanzi la *tabula rasa* di Locke o il $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha\tau\epsilon\acute{\iota}\omicron\nu$ di Aristotele. [...] Per quanto riguarda la Matematica, essa viene vista come un cerimoniale da compiere scrivendo, piuttosto che come una realtà da capire pensando.