

L'effetto Doppler

Il caso delle onde acustiche (o di onde con velocità di propagazione $\ll c$)

1 - Premessa sulle trasformazioni galileiane.

Siano S ed S' due sistemi di riferimento in moto relativo uno rispetto all'altro. Indichiamo con \vec{V} la velocità di S' rispetto ad S e supponiamo che \vec{V} sia parallela a x e a x' come in figura 1.

Si consideri un evento che avviene in un certo punto P, le cui coordinate sono (x,y,z) e (x',y',z') rispetto ai due riferimenti. Se l'osservatore S e l'osservatore S' hanno due orologi per misurare il

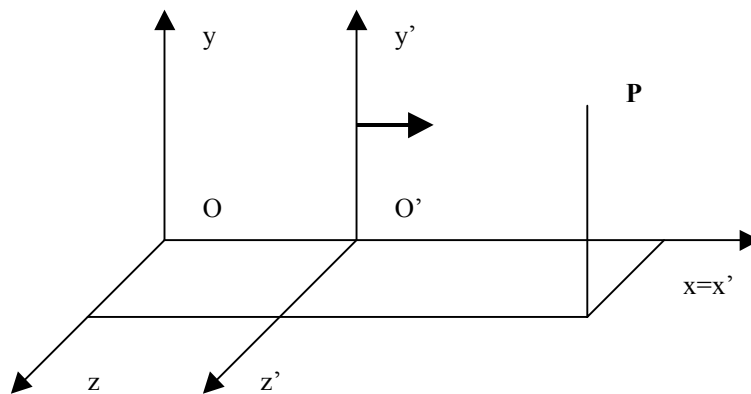


Figura 1

tempo, preventivamente sincronizzati, essi vedranno il fenomeno negli istanti t e t' rispettivamente. Le leggi della fisica classica impongono che valgano le seguenti relazioni, dette Trasformazioni galileiane:

$$(1) \quad \begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Queste formule sono del tutto evidenti e facilmente dimostrabili, almeno così si era

pensato fino agli inizi di questo secolo. In realtà come vedremo studiando la teoria della relatività ristretta esse sono in contrasto con alcuni risultati sperimentali, tra l'altro proprio con misure sull'effetto Doppler. Esse però hanno un alto grado di precisione per velocità piccole rispetto a quella della luce, ed è questo il caso che stiamo trattando. E' altresì noto che se \vec{v} è la velocità con cui un punto si muove rispetto a S e \vec{v}' quella rispetto a S', si ha:

$$(2) \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Anche per questa formula valgono le considerazioni precedenti, cioè essa è sufficientemente precisa solo per velocità piccole rispetto a quella della luce.

2 - Sorgente delle onde ferma nel mezzo e ricevitore in moto.

Si consideri una sorgente posta nell'origine di S e che generi onde (è più facile pensare alle onde piane che si propagano in una ben determinata direzione, rispetto alle onde per esempio sferiche che si propagano "in tutte le direzioni", ma i discorsi che faremo non dipendono da questo fatto) che si propagano con velocità v nella direzione positiva dell'asse x, rispetto ad un mezzo che sia solidale con S e quindi con la sorgente. La velocità delle onde rispetto a S' è (ci interessano solo i moduli perché trattiamo di vettori paralleli ed equiversi) $v' = v - V$ (vedi (2)). All'istante $t = 0$ viene lanciato dalla sorgente un segnale. Supponiamo che un ricevitore sia posto in O' e viaggi solidal-

mente ad S' , in modo che inizialmente $O=O'$. Allora il segnale viene istantaneamente ricevuto da S' nel punto $x'=0$. Un secondo segnale viene lanciato da S all'istante $t = \tau$. Esso viene visto da S' come lanciato nello stesso istante, ma ovviamente nel punto $x' = -V\tau$, in quanto nel frattempo S' si è spostato verso destra proprio della quantità $V\tau$. Il tempo $\Delta t'$ che esso impiega per andare da x' a O'

(dove si trova il ricevitore) è: $\Delta t' = \frac{|x'|}{v'} = \frac{V\tau}{v-V}$. Questo segnale arriva allora in O' nell'istante

$t' = \tau + \Delta t' = \tau + \frac{V\tau}{v-V} = \frac{\tau v}{v-V}$. Se l'intervallo di tempo fra i due segnali è esattamente uguale al pe-

riodo dell'onda, $\nu_T = \frac{1}{\tau}$ è la frequenza con cui vengono lanciate le onde (frequenza di trasmissione),

mentre $\nu_R = \frac{1}{t'}$ è la frequenza con cui vengono ricevute da S' (frequenza di ricezione). Ne segue

$$\nu_R = \frac{1}{t'} = \frac{v-V}{\tau v} = \nu_T \frac{v-V}{v} = \nu_T \left(1 - \frac{V}{v}\right).$$

$$(3) \quad \nu_R = \nu_T \left(1 - \frac{V}{v}\right)$$

Così la frequenza con cui le onde vengono ricevute dall'osservatore collocato in O' è minore della frequenza con cui vengono lanciate da O . Il contrario succederebbe se il ricevitore si avvicinasse alla sorgente.

3 - Sorgente delle onde in movimento nel mezzo e ricevitore fermo.

Supponiamo ora che la sorgente si trovi in O' e il ricevitore in O , solidale con il mezzo in cui avviene la propagazione. La velocità con cui le onde si propagano nel mezzo, e dunque rispetto a S , è la stessa di prima in quanto la velocità di propagazione delle onde non dipende mai dal moto della sorgente. Questo fatto fa sì che i due casi che stiamo considerando non siano simmetrici: nel primo caso le onde venivano ricevute dal ricevitore alla velocità $v-V$, in questo caso alla velocità v . Come vedremo studiando le onde elettromagnetiche, se $v=c$, questa asimmetria sparisce completamente: la velocità delle onde elettromagnetiche non dipende né dal moto della sorgente (come per tutte le onde), né da quello del ricevitore.

Manteniamo le ipotesi precedenti; in particolare per $t=t'=0$, $O=O'$. In questo istante un segnale viene lanciato dalla sorgente posta in O' e immediatamente ricevuto dall'osservatore posto in O . All'istante $t' = \tau$ un secondo segnale viene lanciato dalla sorgente. Esso viene visto dall'osservatore posto in O come lanciato nello stesso istante τ , ma nel punto $x = V\tau$ (in quanto la sorgente si è spostata verso destra nel frattempo). Il tempo Δt che impiega per raggiungere O è allora $\Delta t = \frac{x}{v} = \frac{V\tau}{v}$.

Questo segnale arriva dunque in O nell'istante $t = \tau + \Delta t = \tau + \frac{V\tau}{v}$. Se l'intervallo di tempo tra questi due segnali è esattamente il periodo dell'onda, $\nu_T = \frac{1}{\tau}$ è la frequenza di trasmissione, mentre

$\nu_R = \frac{1}{t}$ è la frequenza di ricezione. Con facili calcoli si ottiene allora:

$$\nu_R = \frac{1}{t} \text{ è la frequenza di ricezione. Con facili calcoli si ottiene allora:}$$

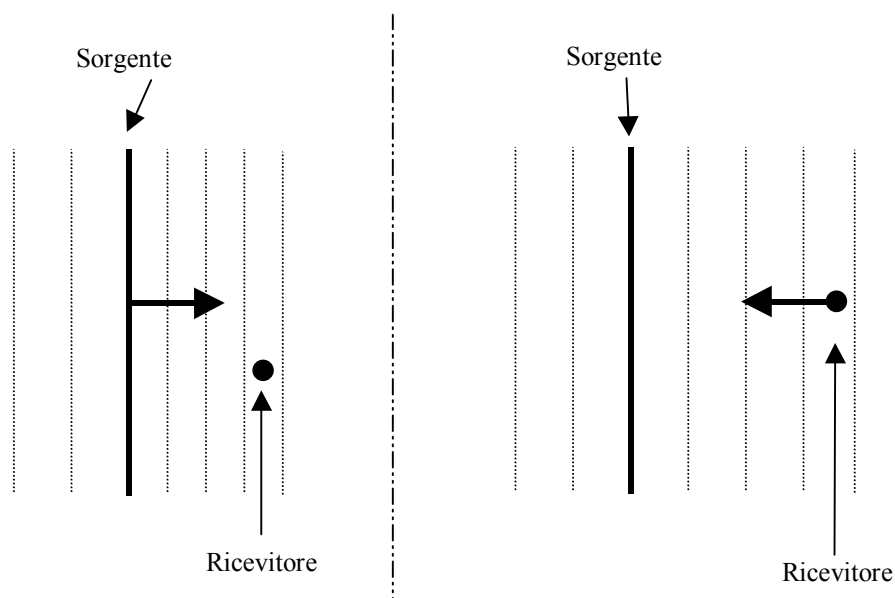
$$(4) \quad \nu_R = \frac{\nu_T}{1 + \frac{V}{v}}$$

Così la frequenza con cui le onde vengono ricevute è minore della frequenza con cui vengono lanciate. Il contrario succederebbe se l'osservatore si avvicinasse alla sorgente.

4 - Osservazioni.

Si noti che i risultati ottenuti nei due casi, benché **qualitativamente** uguali (si ha in ogni caso diminuzione della frequenza per l'allontanamento reciproco di sorgente e ricevitore, aumento per l'avvicinamento), sono **quantitativamente** diversi. Questo risultato è, a prima vista, molto strano, in quanto non vi dovrebbero essere differenze a secondo che a muoversi sia la sorgente oppure il ricevitore (stando su un treno, che vada a velocità costante, non posso sapere se sono io che mi sto muovendo oppure gli alberi ai lati dei binari). In realtà questa differenza non è in contrasto con la relatività galileiana che afferma appunto che i due riferimenti sono assolutamente equivalenti, perché, come già osservato, non c'è simmetria tra i due casi. La trattazione dell'effetto Doppler qui riportata mette chiaramente in luce l'importanza del mezzo di propagazione per le onde acustiche e il fatto che la velocità di propagazione dei segnali acustici non è una costante universale, come invece è la velocità della luce. Trattando l'effetto Doppler per le onde elettromagnetiche troveremo risultati completamente diversi, in quanto le onde elettromagnetiche non hanno bisogno di un mezzo per propagarsi, e il moto della sorgente o quello del ricevitore saranno perfettamente equivalenti.

I fenomeni qui descritti sono del tutto intuitivi. Si pensi ad esempio ad un generatore di onde piane, per esempio di onde d'acqua. Se esso si muove nel mezzo, oppure se il ricevitore si muove nel mezzo, si hanno i due casi evidenziati nella figura a fianco.



Nel primo caso le onde risultano "ravvicinate" dalla parte dove si muove la sorgente, "allontanate" dalla parte opposta, perché esse vengono emesse in punti sempre diversi dalla sorgente che si sposta, quindi un ricevitore come in figura ne riceve più del previsto, uno dalla parte opposta meno. Nel secondo caso la distanza tra le

onde è quella data dalla lunghezza d'onda, ma il ricevitore ne incontra più del previsto se si avvicina (come in figura), meno se si allontana, in quanto va "incontro alle onde", oppure "fugge dalle onde". In entrambi i casi si ha aumento, o diminuzione, della frequenza, cioè del numero di onde nell'unità di tempo, ma i risultati quantitativi sono diversi, come abbiamo visto. Si osservi inoltre che se V è maggiore della velocità di propagazione delle onde i fenomeni sono completamente diversi (fenomeni supersonici). Questo fatto non può presentarsi nel caso delle onde elettromagnetiche che hanno la massima velocità consentita.

Si noti che se il moto della sorgente oppure dell'osservatore è perpendicolare a quello di propagazione delle onde, non si ha alcun effetto Doppler. Per le onde acustiche non esiste effetto Doppler trasversale.

Si osservi ancora, per concludere, che la asimmetria tra i due casi sopra considerati non risulta manifesta fin quando non ci si decide a "fare i conti". Questo è una chiara dimostrazione del fatto che *non ci può essere "fisica" senza "matematica"*.