Luciano Battaia

# Potenze, radicali e funzioni elementari ad essi collegate

$$2^{2^{2^{2}}} = ?$$

Anno Scolastico 1998/99

# 0. Premessa

Questi appunti hanno solo lo scopo di fissare le convenzioni e le regole connesse con il concetto di potenza e non contengono le dimostrazioni dei risultati via via ottenuti, dimostrazioni che si possono trovare su tutti i testi. Molti problemi sulle potenze nascono dal fatto che le convenzioni in uso non sono purtroppo universalmente accettate e questo crea non poca confusione in molti studenti. Nella mia esperienza ho potuto constatare che alla maggioranza degli studenti che ho conosciuto (tra cui me stesso, anche fino ad un livello avanzato degli studi) il concetto preciso di potenza (nell'ambito reale) e le problematiche ad esso connesse erano, per usare un eufemismo, "poco chiare".

Prima di leggere queste note invito lo studente a rispondere alle domande che seguono.

Che legame c'è tra:

i) $\sqrt[3]{x}$ *e* $\sqrt[6]{x^2}$ ?

ii) $\left\{(-1)^{\frac{3}{2}}\right\}^2$ , $\left\{(-1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$ , $(-1)^3$ ?

iii) $\left(x^2\right)^x$ e $(x)^{2x}$ ?

iv) $\sqrt{x^2(x-1)}$ e $|x|\sqrt{x-1}$ ?

# 1. Potenza con esponente intero

### *1.1 Esponenti interi ≥2*

Se $x \in \mathbf{R}$ e $m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, allora si pone, per definizione:

(1.1) $$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \quad volte}$$

Il numero reale $x^m$ si chiama **potenza** di **base** x ed **esponente** m.(1)

In sostanza questa definizione appare, per ora, solo come un trucco per semplificare la scrittura di prodotti con tanti fattori tutti tra di loro uguali.

Come é noto si dimostra che valgono le seguenti proprietà, che chiameremo **proprietà formali** delle

---

[1]Poiché in queste pagine lavoreremo solo con numeri reali, nel seguito ometteremo spesso l'indicazione "$\in$ R". Conveniamo inoltre che N = {0,1,2,3,...}, segnalando che la convenzione non é da tutti accettata, in quanto alcuni escludono lo zero dai naturali. I simboli Z, Q, R rappresenteranno, come di consueto, i numeri interi, razionali e reali rispettivamente. Useremo inoltre gli aggettivi positivo e negativo nel senso, rispettivamente, di ≥0 e ≤0, strettamente positivo e strettamente negativo nel senso di >0 e <0 rispettivamente. Anche questa convenzione non é da tutti accettata.

potenze (x ed y sono numeri reali, diversi da zero se compaiono al denominatore):

(1.2) $$x^m \cdot x^n = x^{m+n}\ ; (x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m\,;$$

(1.3) $$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\ , se\ m \geq n+2;\ \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}\,;$$

(1.4) $$\left(x^m\right)^n = x^{mn}\,.$$

### *1.2 Esponente zero ed esponente 1*

La definizione data si estende, senza alcuna difficoltà, al caso che l'esponente m sia 1, ponendo, per definizione,

(1.5) $$x^1 = x\,.$$

Con una certa cautela é possibile estendere la definizione di potenza anche al caso che l'esponente m sia 0 (zero), occorre solo introdurre una limitazione per le possibili basi, escludendo lo zero. Se x $\in$ **R**\{0} si pone, per definizione:

(1.6) $$x^0 = 1\,.$$

Si noti che, pur di aumentare le possibilità di scelta per l'esponente, abbiamo tranquillamente introdotto una limitazione sulla base.(2)

E' lecito chiedersi il perché delle scelte effettuate con le definizioni 5 e 6. Se si può ritenere, in un certo senso, "naturale" la definizione 5, non altrettanto può dirsi della 6. L'unica giustificazione risiede nel fatto che, se si danno le definizioni 5 e 6 in questo modo, le proprietà 2, 3, 4 sopra elencate continuano a valere anche con i nuovi esponenti. Alcuni testi (troppi purtroppo, soprattutto tra quelli a livello elementare) pretendono di 'dimostrare' che se x$\in$R, x$\neq$0, allora $x^0$=1. Il ragionamento é all'incirca questo: se x$\neq$0 e m$\in$N, m$\geq$2, allora: $1 = \frac{x^m}{x^m} = x^{m-m} = x^0$, dunque $x^0 = 1$. Questo "ragionamento" contiene un grave errore logico: il simbolo $x^o$ non é stato definito e non si può pretendere che esso rappresenti alcunché finché non si sa che cosa sia; inoltre non é vero che $\frac{x^m}{x^m} = x^{m-m}$, in quanto questa proprietà é stata dimostrata solo se l'esponente del numeratore supera di almeno 2 quello del denominatore (vedi proprietà 3 qui sopra). Questa argomentazione prova invece che: se si vuole che le proprietà formali delle potenze continuino ad essere valide anche con i nuovi esponenti é indispensabile dare le definizioni contenute nelle formule 5 e 6. E' anzi questa la linea che si segue per estendere la definizione di potenza, in modo da consentire la scelta degli esponenti in insiemi via via più ampi, magari con qualche sacrificio per la possibilità di scelta delle basi: si dà una definizione tale che anche con i nuovi esponenti le proprietà formali delle potenze continuino ad essere valide.

---

2 Si sarebbe potuto, più semplicemente, dare la seguente definizione "per ricorrenza" di potenza: se x$\neq$0 ed m$\in$N, m$\geq$0, allora si pone:

$$x^0 = 1\,, \quad x^{m+1} = x^m \cdot x\,,$$

comprendendo, in un'unica definizione, tutti gli esponenti naturali.

### *1.3 Esponente negativo*

Seguendo l'idea appena menzionata, se $x\neq 0$ e $m\in \mathbf{Z}$, $m<0$, si pone, per definizione,

(1.7)
$$x^m = \frac{1}{x^{-m}}$$

e la definizione ha senso perché $-m>0$.

Le proprietà formali possono ora essere scritte nel modo seguente:

se $x,y \in R\setminus\{0\}$ ed $m, n \in Z$

(1.8)
$$\begin{gathered} x^m \cdot x^n = x^{m+n} \\ (x\cdot y)^m = x^m \cdot y^m \\ x^m = \frac{1}{x^{-m}} \\ \left(x^m\right)^n = x^{mn}. \end{gathered}$$

Tutte le volte che ambo i membri delle 8 hanno senso, le proprietà sono valide anche se x, y, od entrambi, sono 0 (zero).

Da quanto detto risultano **non definiti** (e quindi privi di significato), simboli quali $\mathbf{0^0}$ **e** $\mathbf{0^{(num.negativo)}}$.

# 2. I radicali

### *2.1 Radicali assoluti*

Sia ora $m \in N$, $m\geq 2$, e $x\geq 0$; allora esiste uno ed un solo numero reale positivo $y\geq 0$, tale che $y^m = x$. Il numero reale y si indica con la scrittura $\sqrt[m]{x}$ e si chiama **radice emmesima** di x o radicale emmesimo. Il numero naturale m (che deve essere $\geq 2$) si chiama indice della radice, il numero reale x (che deve essere $\geq 0$) si chiama invece radicando. Se $m=2$ si usa scrivere solo $\sqrt{x}$, in luogo di $\sqrt[2]{x}$. ([3])

Per i radicali valgono le ben note proprietà che qui riassumiamo brevemente:

Se $x\geq 0$, $y\geq 0$ ed m, n, p sono numeri naturali $\geq 2$, allora:

(2.1)
$$\begin{gathered} \sqrt[mp]{x^{np}} = \sqrt[m]{x^n} \\ \sqrt[m]{x\cdot y} = \sqrt[m]{x}\cdot\sqrt[m]{y} \\ \sqrt[m]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[m]{x}}{\sqrt[m]{y}} \quad (qui \;\; y>0) \\ \left(\sqrt[m]{x}\right)^n = \sqrt[m]{x^n} \\ \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \end{gathered}$$

E' di fondamentale importanza ricordare sempre che queste proprietà valgono se e solo se i numeri x

---

[3]Si osservi che, con le limitazioni poste per x e se m é pari, l'equazione $y^m = x$ ha due soluzioni, una positiva e una negativa e con la scrittura $\sqrt[m]{x}$ abbiamo scelto di indicare solo quella positiva, mentre per la negativa si userà ovviamente la scrittura $-\sqrt[m]{x}$. Si noti che questo significa che $\sqrt{4}=2$ e **non**, come purtroppo si trova scritto anche su qualche testo, $\sqrt{4}=\pm 2$; é invece corretto dire che l'equazione $y^2=4$ ha due soluzioni, che sono $y=\pm\sqrt{4}=\pm 2$.

ed y sono positivi (y non nullo ovviamente nel caso del quoziente). Per chiarire questo fatto consideriamo alcuni esempi:

- $\sqrt{(-4)(-9)} \neq \sqrt{-4}\,\sqrt{-9}$ in quanto il radicale del primo membro vale 6, i due radicali del secondo membro non sono definiti;
- $\sqrt{(-9)^2} \neq -9$, in quanto il primo membro é positivo e il secondo é negativo;
- $\left(\sqrt{-5}\right)^2 \neq \sqrt{(-5)^2}$ , in quanto il primo membro non ha senso e il secondo vale 5.

In particolare é di grande importanza nelle applicazioni il fatto che, essendo $x^2 = |x|^2$, si ha $\sqrt{x^2} = \sqrt{|x|^2} = |x|$:

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in R, \tag{2.2}$$

e formule analoghe per le altre potenze pari.

### *2.2 Radicali algebrici*

In molte applicazioni ha interesse la soluzione di equazioni del tipo $y^3 = x$, anche con x<0. La definizione di radicale che abbiamo dato sopra non permette di risolvere questa equazione. Si può comunque dimostrare che se x<0 ed m é un numero naturale dispari ≥3, allora esiste uno ed un solo numero reale y<0 tale che $y^m = x$; per il numero reale y (ora strettamente negativo), per l'esponente (ora solo dispari) m e per il numero reale x (anch'esso strettamente negativo) si mantengono gli stessi nomi e simboli prima introdotti. Occorre prestare però molta attenzione al fatto che, nonostante l'identità dei simboli usati, per i radicali di indice dispari dei numeri negativi non vale nessuna delle proprietà formali (2.1) che abbiamo sopra riportato. Chiariamo questo fatto con un esempio: $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{64} = 2$, mentre se valessero le proprietà formali (in particolare quella che consente la semplificazione dell'indice di radice con l'esponente del radicando) si otterrebbe $\sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[3]{(-8)} = -2$, dal che si trarrebbe $2 = -2$!. Se poi valesse la penultima delle (2.1) si avrebbe $\sqrt[6]{(-8)^2} = \left(\sqrt[6]{(-8)}\right)^2$, che é priva di significato.

Riprendiamo in esame il problema, proposto all'inizio, del legame tra $\sqrt[6]{x^2}$ *e* $\sqrt[3]{x}$. I due numeri risultano diversi perché il primo é sempre positivo, mentre il secondo risulta avere lo stesso segno di x: in effetti non é possibile passare dal primo al secondo "semplificando l'indice della radice e l'esponente del radicando", perché questa proprietà é valida solo se x≥0; i due numeri sono quindi uguali solo per x≥0. Si osservi che invece è vero che $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{|x|}$.

Purtroppo la identità dei simboli usati per i radicali di indice naturale dei numeri positivi e per quelli di indice dispari anche dei numeri negativi può provocare una certa confusione ed é spesso fonte di errori. In ogni caso occorre prestare la massima attenzione al segno del radicando prima di applicare una qualunque proprietà formale delle potenze e ricordare che i radicali di indice dispari hanno un comportamento "anomalo" se il radicando non é positivo.

Riepilogando: il simbolo $\sqrt[m]{x}$ ha senso per ogni x se m é un numero naturale dispari ≥3, ha senso solo per x≥0 se m é un numero naturale pari ≥2 ed in quest'ultimo caso sono applicabili le proprietà formali dei radicali. Questo simbolo non ha invece alcun significato nel caso che m sia 0 o 1, e nel caso che m non sia un naturale.([4])

# 3. Potenza con esponente razionale

Sia ora x>0 ed a ∈ Q\Z (cioè a é un numero razionale non intero); allora a si può scrivere, in infiniti modi, nella forma $a = \frac{m}{n}$, m intero ed n naturale >1. Si pone allora, per definizione:

(3.1) $$x^a = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}\ ;$$

se poi a ∈ Q, a>0 si pone, sempre per definizione:

(3.2) $$0^a = 0\,.$$

Risultano quindi non definiti simboli quali $(-5)^{\frac{3}{4}}$, $(-8)^{\frac{1}{3}}$. Si noti che questo fatto implica che $\sqrt[3]{(-8)} \neq (-8)^{\frac{1}{3}}$, in quanto il radicale vale -2, mentre la potenza non risulta definita. Si osservi che questa volta il sacrificio in termini di possibilità di scelta per la base é abbastanza serio, in quanto abbiamo rinunciato alla possibilità che la base possa essere un numero <0.

Occorre naturalmente verificare che quella data é una "buona definizione", cioè che la potenza $x^a$ dipende solo da x e da a, e non dalla particolare frazione scelta per rappresentare il numero razionale *a* (come abbiamo già osservato di frazioni che rappresentano il numero a ce ne sono infinite), verifica che lo studente può fare come esercizio in quanto dipende solo dalle proprietà formali dei radicali.

Per la potenza con esponente razionale valgono le proprietà formali (1.8)[5] sopra riportate, esattamente

---

[4] Anche questa convenzione non é universalmente accettata: molti definiscono anche il radicale di indice 1 (definizione che ritengo perfettamente inutile in quanto si otterrebbe semplicemente $\sqrt[1]{x} = x$, per ogni x reale) e anche i radicali di indice non intero, almeno con basi positive (definizione che non introduce nulla di nuovo rispetto alle potenze con esponente reale che introdurremo più avanti e che può, a mio avviso, creare solo inutili confusioni). Molti autori facendo, al contrario, una scelta più restrittiva, non definiscono nemmeno la radice di indice dispari dei numeri negativi, proprio per le difficoltà connesse con l'applicazione delle proprietà formali. Ho preferito dare questa definizione, perché ormai simboli come $\sqrt[3]{(-8)}$ sono entrati nell'uso comune. Condivido comunque le perplessità, soprattutto di ordine didattico, di chi evita di usare questi simboli e segnalo che in ogni caso l'introduzione dei radicali di indice dispari dei numeri negativi non é strettamente essenziale per quasi nessuna applicazione e serve solo a semplificare le notazioni in certi problemi, come per esempio quello di considerare le inverse delle funzioni potenza (vedi più avanti).

[5] Come al solito è proprio nella richiesta di validità delle proprietà formali che va cercata la giustificazione della definizione che è stata data. Si osservi infatti che se si vuole definire $a^{\frac{1}{2}}$ e si vogliono mantenere le proprietà formali, occorre che $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = a$. Da qui si deduce subito che deve essere $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Un altro modo per giustificare la definizione data è il seguente: se si considerano le successive potenze di un numero $a^0, a^1, a^2, \ldots$, esse costituiscono una progressione geometrica, di ragione a. È logico attendersi che i valori $a^{\frac{1}{2}}, a^{\frac{3}{2}}, \ldots$ si debbano inserire in questa progressione, "al centro tra due termini consecutivi", esattamente come gli esponenti sono al centro nella stessa forma, ma con la importantissima limitazione che ora x ed y devono essere numeri reali ≥0, a volte >0 (quando l'esponente é negativo). E' proprio per mantenere la validità di queste proprietà formali che si rinuncia a definire le potenze con esponente razionale e base negativa. In effetti essendo i radicali, almeno in certi casi, definiti anche quando il radicando é negativo, sembrerebbe logico dare un senso a simboli quali $(-8)^{\frac{1}{3}}$; si osservi però che allora si dovrebbe avere: $-2=\sqrt[3]{(-8)}=(-8)^{\frac{1}{3}}=(-8)^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{(-8)^2}=\sqrt[6]{64}=2$, palesemente assurda.

Purtroppo il fatto che le proprietà formali delle potenze sono valide per tutte le basi (salvo a volte lo zero) quando l'esponente é intero, mentre sono valide solo per basi positive (anche qui escluso a volte lo zero) quando l'esponente é razionale può portare a delle complicazioni nei calcoli che si possono superare solo prestando la massima attenzione. Chiariamo questo fatto riprendendo in esame il problema, posto all'inizio, del legame tra $\left\{(-1)^{\frac{3}{2}}\right\}^2$, $\left\{(-1)^2\right\}^{\frac{3}{2}}$, $(-1)^3$. Il primo dei tre simboli non ha senso perché la potenza di base (-1) ed esponente $\frac{3}{2}$ non ha senso (base negativa); il secondo dei tre simboli vale 1, in quanto si deve, come al solito, eseguire prima l'operazione $(-1)^2$, che ha senso perché l'esponente é intero e dà come risultato 1, e solo dopo si deve elevare a $\frac{3}{2}$ ottenendo appunto 1; il terzo simbolo vale -1, in quanto si tratta di una normale potenza con esponente intero.([6])

In analogia con la (2.2) segnaliamo, perché interessa in molti esercizi, che:

(3.3) $$\left(x^2\right)^a=|x|^{2a}.$$

---

tra due esponenti consecutivi. Ciò richiede che ogni elemento sia la media geometrica dei due termini che lo precedono e lo seguono. Ne segue subito che deve essere $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a^o\cdot a^1}=\sqrt{a}$, $a^{\frac{3}{2}}=\sqrt{a^1\cdot a^2}=\sqrt{a^3}$.

[6]Anche sul fatto che le potenze ad esponente razionale siano definite solo con basi positive non tutti sono d'accordo: anche molte delle calcolatrici tascabili in commercio non forniscono l'indicazione di errore con calcoli del tipo $(-1)^{\frac{1}{3}}$, ma continuano a fornire invece indicazione di errore con calcoli del tipo $(-1)^{0.3333333333333333}$, anche se a livello dei numeri utilizzati dalla calcolatrice $\frac{1}{3}$ e 0.3333333333333333 sono considerati identici. In effetti si potrebbe dare una buona definizione di potenza con esponente razionale e base negativa, almeno per certi tipi di esponenti, ma si perderebbero in ogni caso le proprietà formali e i vantaggi che si otterrebbero sarebbero largamente compensati dagli svantaggi; inoltre tale definizione condurrebbe a problemi di una certa delicatezza, per cui la ritengo senz'altro da evitare. Infine c'è da osservare che, a differenza di quello che succede per i radicali di indice dispari e radicando negativo, l'interesse a livello applicativo delle potenze ad esponente razionale e base negativa é nullo.

# 4. Potenze con esponente reale

## *4.1 Premessa*

Per concludere l'estensione del concetto di potenza (nell'ambito reale) ci rimangono da definire le potenze con esponente irrazionale. Si tratta di un problema estremamente più complesso di quelli finora trattati. Il modo più semplice ed "elegante" per definire queste potenze e verificarne le proprietà formali (che, secondo quanto già osservato, **dovranno** essere sempre le stesse) é quello di definire prima i logaritmi tramite il concetto di integrale e successivamente definire le potenze con esponente reale, ma qui ci limitiamo a proporre una "definizione" intuitiva, che comunque rende sufficientemente conto della difficoltà di questo concetto.

## *4.2 Definizioni*

Dato allora x>0, e *a* reale irrazionale si consideri la rappresentazione decimale di a (che sarà illimitata e non periodica): a=α.βγδ...; si consideri la successione $x^{\alpha}, x^{\alpha.\beta}, x^{\alpha.\beta\gamma}, x^{\alpha.\beta\gamma\delta}$,...: si tratta di una successione di potenze ad esponente razionale che può essere crescente o decrescente a seconda che x>1 o 0<x<1. Ebbene, man mano che l'esponente "si avvicina al numero a", questa successione numerica "si avvicina ad un numero reale" che chiameremo **potenza di base x ed esponente a** e che indicheremo ancora con $x^a$. Se poi a>0 si pone, sempre per definizione, $0^a = 0$. Segnaliamo che questa definizione di potenza ha ormai ben poco a che fare con il concetto di potenza come prodotto di fattori tutti tra di loro uguali, da cui siamo partiti.

Si dimostra, ma non é banale, che valgono le proprietà formali delle potenze, che qui richiamiamo per comodità:

Se x>0, y>0 ed a, b ∈ R:

$$\begin{gathered} x^a \cdot x^b = x^{a+b} \\ (x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a \\ x^a = \frac{1}{x^{-a}} \\ (x^a)^b = x^{ab} \end{gathered} \tag{4.1}$$

Tutte le volte che ambo i membri delle 1 hanno senso, le proprietà sono valide anche se x, y, od entrambi, sono 0 (zero).

## *4.3 Quadro riassuntivo*

Diamo ora un quadro riassuntivo della portata delle definizioni di potenza (nell'ambito reale) che sono state date.

Il simbolo $\mathbf{x^a}$ **ha senso, nell'ambito reale**:

**i)** **Per ogni x reale, se a é intero >0.**

**ii)** **Per tutti gli x reali tranne lo zero, se a é intero ≤ 0.**

**iii)** **Per x≥0, se a é non intero e>0.**

**iv)** **Per x>0, se a é non intero e <0.**

E' molto importante nelle applicazioni saper confrontare le potenze. I problemi che si possono presentare sono di tre tipi:

*Confronto tra potenze con la stessa base.

*Confronto tra potenze con lo stesso esponente.

*Confronto tra potenze con base ed esponenti diversi.

E' facile risolvere i problemi dei primi due tipi, i problemi invece del terzo tipo sono molto difficili e vanno trattati caso per caso. E' già difficile risolvere in generale il problema del confronto tra $x^y$ e $y^x$: si osservi, per esempio, che si ha $2^3 < 3^2$, $2^4 = 4^2$, $2^5 > 5^2$.

# 5. Le funzioni potenza e radice

### *5.1 Funzioni potenza*

Utilizzando le potenze che sono state definite si possono costruire le funzioni $f(x) = x^a$. Le chiameremo funzioni potenza di esponente a e, a volte, le indicheremo con il simbolo $p_a$, cioè porremo $p_a(x) = x^a$. Questa scrittura, seppure pesante in molte circostanze, é molto comoda in altre, perché consente di "avere un simbolo apposito per la funzione". Chiariamo questo concetto con un esempio: nella scrittura $f(x) = \operatorname{sen} x$, la x rappresenta la variabile indipendente, '*sen*' é il nome della funzione e *sen(x)* é il risultato dell'applicazione della funzione *sen* alla variabile x (cioè é il valore della variabile dipendente). Nella scrittura $f(x) = x^a$, x rappresenta la variabile dipendente, $x^a$ il risultato dell'applicazione della 'funzione potenza di esponente a' alla variabile x, mentre non é stato usato un simbolo speciale per questa 'funzione potenza di esponente a'; con la scrittura $f(x) = p_a(x)$ si evita questo inconveniente.

In base a quanto osservato nel numero precedente se ne deduce quanto segue, per il dominio naturale di $p_a(x)$:

i) Se a é zero il dominio é R\{0} e la funzione assume sempre il valore 1. Di solito si prolunga il dominio di questa funzione ponendo, per definizione, $p_0(0) = 1$. Si noti che questo non significa che é stato dato un valore al simbolo $0^0$, che continua a non essere definito, si é solo detto che il dominio della funzione $p_0$ può essere esteso fino a contenere anche lo zero: é uno dei casi in cui la notazione $p_a(x)$ per le funzioni potenza torna utile.

ii) Se a é un intero >0, il dominio é R.

iii) Se a é intero <0, il dominio é R\{0}.

iv) Se a é non intero e >0, il dominio é [0,+∞[.

v) Se a é non intero e <0, il dominio é ]0,+ ∞[.

### *5.2 Funzioni radice*

Utilizzando poi la definizione di radicale si possono costruire le funzioni $f(x) = \sqrt[n]{x}$, che chiameremo funzioni radice di indice n (n∈N, n≥2).

Per quanto riguarda il loro dominio naturale si ha:

i) Se n é pari il dominio é [0,+ ∞ [ e si ha $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

ii) Se n é dispari il dominio é R e si ha $\sqrt[n]{x} \neq x^{\frac{1}{n}}$ perché diverso é il dominio.

### *5.3 Invertibilità*

Esaminiamo ora il problema, di grande importanza nelle applicazioni, dell'invertibilità di queste funzioni potenza e radice.([7])

#### *5.3.1 Caso dell'esponente intero*

- La funzione $p_0(x) = \begin{cases} x^0 & se \quad x \neq 0 \\ 1 & se \quad x = 0 \end{cases}$ é costante e quindi non invertibile.
- Le funzioni $x^{\pm 1}$ sono invertibili e coincidono con le inverse.
- Le funzioni $x^{\pm 3}$, $x^{\pm 5}$, ...(cioè con esponenti dispari diversi da ±1) sono invertibili e le inverse sono $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[5]{x}$, ...(per esponenti positivi) e $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, ...(per esponenti negativi).
- Le funzioni $x^{\pm 2}$, $x^{\pm 4}$ ...(cioè con esponenti pari diversi da zero) non sono iniettive e quindi non sono invertibili, ma diventano iniettive se il loro dominio é ristretto ai reali positivi o strettamente positivi; le inverse di queste restrizioni sono le funzioni $x^{\pm\frac{1}{2}}$, $x^{\pm\frac{1}{4}}$, ... che, come già osservato, coincidono con $\sqrt{x}$, $\sqrt[4]{x}$, ...(per esponenti positivi) e $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ , ...(per esponenti negativi).

#### *5.3.2 Caso dell'esponente non intero*

- Le funzioni $x^{\pm\frac{1}{2}}$, $x^{\pm\frac{1}{4}}$, ...(cioè con esponente reciproco di un intero diverso da ±1), sono invertibili e le loro inverse sono le restrizioni delle funzioni $x^{\pm 2}$, $x^{\pm 3}$, ..., ai reali positivi o strettamente positivi.
- Le funzioni $x^a$, se a non é intero e nemmeno il reciproco di un intero sono invertibili e le loro inverse sono le funzioni $x^{\frac{1}{a}}$.

#### *5.3.3 Caso dei radicali*

Le funzioni $\sqrt[m]{x}$ sono invertibili e le loro inverse sono le funzioni $x^m$, per indici dispari, le restrizioni di $x^m$ ai reali positivi, per indici pari.

Riprendiamo ora in esame l'ultimo dei problemi posti all'inizio di queste note. Le due funzioni $\sqrt{x^2(x-1)}$ e $|x|\sqrt{x-1}$ risultano essere diverse, perché diverso é il dominio ($\{0\} \cup [1,+\infty[$ per la prima funzione, $[1,+\infty[$ per la seconda): in effetti le proprietà formali dei radicali consentono di passare dall'una all'altra solo se $x^2$ e $(x-1)$ sono entrambi positivi, e cioè per $x \geq 1$. Si osservi che, invece, $\sqrt{x^2(1-x)} = |x|\sqrt{1-x}$ .

---

[7]Se le funzioni in esame non sono suriettive sottintenderemo una restrizione del loro codominio all'immagine, restrizione, che, come è noto, si può sostanzialmente ritenere "indolore".

# 6. Le funzioni esponenziali e logaritmiche

### *6.1 Funzioni esponenziali*

Sempre utilizzando le potenze, si possono ora costruire le funzioni $f(x) = x^a$ , con a reale strettamente positivo. Le chiameremo funzioni esponenziali di base a e, a volte, le indicheremo con il simbolo $exp_a$ , cioé porremo $a^x = \exp_a(x)$ (o semplicemente $\exp_a x$ , omettendo le parentesi se non c'è possibilità di equivoco, come si fa con le funzioni trigonometriche dove si scrive *senx* in luogo di *sen(x)*). Per questa scrittura si possono ripetere le considerazioni già fatte a proposito delle funzioni potenza. Se la base é il numero di Nepero 'e', si scrive semplicemente *exp(x)* (o, naturalmente, $e^x$ ) e la funzione *exp* si chiama funzione esponenziale o semplicemente esponenziale.

Si osservi che la differenza con le funzioni potenza che abbiamo esaminato nel paragrafo precedente é data dal fatto che nelle funzioni potenza é variabile la base mentre l'esponente é fisso, nelle funzioni esponenziali é variabile l'esponente mentre la base é fissa.

In base alle proprietà delle potenze si deduce subito che, poiché ci siamo limitati a considerare solo il caso di a>0, il dominio naturale di queste funzioni é R.

### *6.2 Funzioni logaritmiche*

Per quanto riguarda il problema dell'invertibilità c'è solo da osservare che se a=1 la funzione é costante e quindi non invertibile, se a≠1 le funzioni esponenziali sono iniettive (per renderle suriettive, come al solito, non ci sono problemi) e le inverse si chiamano funzioni *logaritmo in base a* e si indicano con il simbolo $log_a$ . Il loro dominio é costituito dai reali strettamente positivi. Nel caso 'a=e', l'inversa si chiama logaritmo naturale e si indica con il simbolo *ln*.([8])

In base alla definizione di funzione inversa si deduce subito che $a^{\log_a(x)} = x, \quad se\, x > 0$ cioè *che "il logaritmo in base a di un numero x é l'esponente a cui si deve elevare a per ottenere x"*, enunciato che si può assumere come definizione di logaritmo. Si presti però attenzione alle limitazioni a cui sono sottoposti i numeri a ed x: x>0, a>0 ∧ a≠1. Infatti pur essendo $(-2)^3 = -8$ (cioè 3 é l'esponente da dare a -2 per ottenere -8), $\log_{-2}(-8) \neq 3$ , perché $\log_{-2}(-8)$ non é definito. La definizione di logaritmo andrebbe dunque così precisata: *"il logaritmo con base a, strettamente positiva e diversa da uno, di un numero reale x, strettamente positivo, é l'esponente da dare ad a per ottenere x".*

E' utile evidenziare le proprietà dei logaritmi, che discendono direttamente dalle proprietà formali delle potenze.

Se a>0 ∧ a≠1, x>0, y>0, allora:

---

[8]E' in uso anche, sempre per indicare il logaritmo naturale, il simbolo log (senza l'indicazione della base). Purtroppo questa stessa notazione é in uso anche per indicare il logaritmo in base dieci (che ha una certa importanza solo in alcune applicazioni), per cui é consigliabile evitarla. Nella maggior parte delle calcolatrici scientifiche in commercio si usa il simbolo ln per il logaritmo naturale (come facciamo noi) e il simbolo log per il logaritmo in base dieci.

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$
(6.1) $$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a(x)^\alpha = \alpha \cdot \log_a(x)$$

Con i logaritmi si incontrano gli stessi problemi già menzionati trattando le potenze ad esponente non intero. Per esempio applicando brutalmente la prima delle proprietà (6.1) si potrebbe essere portati a scrivere $\log_6\big((-3)(-2)\big) = \log_6(-3) + \log_6(-2)$, uguaglianza evidentemente assurda, perché il secondo membro non ha senso, mentre il primo membro vale 1. In particolare si osservi, in analogia con (2.2), che:

(6.2) $$\log_a(x)^2 = 2\log_a|x|.$$

Per concludere ricordiamo la cosiddetta 'formula del cambiamento di base nei logaritmi':

(6.3) $$log_a x = \frac{log_b x}{log_b a}, \quad x > 0, \quad a > 0 \wedge a \neq 1, \quad b > 0 \wedge b \neq 1,$$

formula che esprime in sostanza il fatto che logaritmi in basi diverse sono tra di loro proporzionali.