Classe 3B – Test di matematica – 1 marzo 2002

## Argomento del test: La parabola (*con asse verticale*). Insiemi e cardinalità

1. Dare la definizione di parabola come luogo geometrico.

*La parabola può essere definita come il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da un punto fisso detto fuoco e da una retta fissa detta direttrice, con la condizione che il punto non appartenga alla retta*

2. Descrivere il procedimento che si deve seguire per determinare l'equazione di una parabola se sono dati tre punti del piano A,B,C.

*Sostituite le coordinate dei tre punti nell'equazione della parabola* $y=ax^2+bx+c$*, si ottiene un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite che, se compatibile, fornisce l'unica parabola soddisfacente le condizioni poste dal problema.*

3. Descrivere il procedimento generale per determinare le tangenti ad una conica condotte da un punto del piano.

*Data la conica mediante la sua equazione cartesiana* $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$*, si considera una generica retta* $px+qy+r=0$*. Una prima equazione nelle incognite p, q, r si trova con la condizione di passaggio della retta per il punto dato del piano. Una seconda condizione si trova considerando il sistema (di secondo grado) tra la retta e la conica. L'equazione risolvente di questo sistema deve avere discriminante nullo, il che fornisce la seconda condizione (generalmente di secondo grado) nelle incognite p, q, r. Due condizioni sono sufficienti perché l'equazione della retta* $px+qy+r=0$ *è omogenea nei parametri (in sostanza quello che conta è che almeno uno tra p e q deve essere diverso da zero). Il sistema tra le due condizioni può fornire al massimo due rette che sono le eventuali tangenti cercate. Si noti che la determinazione dell'equazione risolvente sopra citata richiede un accurato esame dei casi che si possono presentare, in quanto occorre ricavare la x o la y dall'equazione della retta per sostituirla nell'equazione della conica: si potrà ricavare la x se si è sicuri che la retta non è orizzontale, la y se si è sicuri che la retta non è verticale.*

4. Dimostrare che il coefficiente angolare della tangente ad una parabola in un suo punto $P(x_P,y_P)$ è dato da $m=2ax_P+b$.

*Le coordinate di P soddisfano la condizione* $y_P=ax_P^2+bx_P+c$*, in quanto il punto appartiene alla parabola. La retta cercata, non essendo sicuramente verticale, sarà del tipo* $y=m(x-x_P)+y_P$*. Considerato il sistema tra l'equazione della parabola e la retta, l'equazione risolvente si ottiene subito ed è:* $ax^2+x(b-m)+c+mx_P-y_P=0$*. Uguagliando a zero il discriminante e ricordando il predetto legame tra le coordinate di P, si trova* $m^2-2m(2ax_P+b)+(2ax_P+b)^2$*. Quest'equazione nell'incognita m ha come unica soluzione* $m=2ax_P+b$*.*

5. Dare la definizione di insieme infinito.

*Una delle possibili definizioni di insieme infinito (quella considerata a lezione) è: un insieme A è infinito se, detto a un suo elemento, A e A\{a} sono equipotenti.*

6. Che cosa significa che $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ?

*Si tratta della scrittura in formule del teorema che afferma che **R** è equipotente alle parti di **N**.*

7. Dimostrare con il "metodo diagonale di Cantor" che l'insieme Q è numerabile.

*Il metodo si trova descritto in tutti i testi.*