Classe 3B – Compito di matematica – 22 febbraio 2002

Argomento del test: Introduzione al concetto di potenza con esponente reale, esponenziali e logaritmi

Esercizio 1
Sapendo che x<0, stabilire se sono definite e in caso affermativo il segno delle seguenti potenze:

a. x^4 *É definita e positiva*
b. x^{-3} *È definita e negativa*
c. $(-x)^3$ *È definita e positiva*
d. $(-x)^2$ *È definita e positiva*
e. $x^{\frac{1}{3}}$ *Non è definita, secondo la convenzione più comune, in quanto l'esponente non intero limita le basi a valori positivi.*
f. $(-x)^{\sqrt{2}}$ *È definita e positiva (la base è positiva e quindi non ci sono problemi, qualunque sia l'esponente).*
g. x^{π} *Non è definita, secondo la convenzione più comune, in quanto l'esponente non intero limita le basi a valori positivi.*

Esercizio 2
Disegnare il grafico di x^2 e di x^3.
Dal confronto dei grafici dedurre per quali valori di $x \in R$, valgono le seguenti:

a. $x^3 > x^2$ *(Per x>1)*
b. $x^3 = x^2$ *(Per x=0 oppure x=1)*
c. $x^3 < x^2$ *(Per x<0 e per 0<x<1)*

Esercizio 3
Dire per ognuna delle seguenti coppie quale funzione esponenziale è maggiore dell'altra, distinguendo i casi x>0 e x<0

a. $y = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ *Per x<0 è maggiore la seconda, per x>0 è maggiore la prima.*
b. $y = 2^x$ $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ *Per x<0 è maggiore la seconda, per x>0 la prima.*
c. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ $y = 2^x$ *Per x<0 è maggiore la prima, per x>0 la seconda.*

Per una giustificazione basta considerare i grafici e le note proprietà delle potenze.

Esercizio 4
Costruire il grafico delle seguenti funzioni a partire dal grafico di $y = a^x$ (scegliere a piacere tra il caso 0<a<1 e a>1):

a. $y = a^x + 1$
b. $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$

Esercizio 5
Applicare le proprietà delle potenze per semplificare le seguenti espressioni:

a. $\left(a^x a^{-y}\right)^2 = a^{2x\text{-}2y}$

b. $\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{-5} : \left(\frac{x}{y}\right)^{-3}\right]^{-1} = x^2/y^2$

c. $\left[\frac{(x-y)^{3\pi}(x-y)^{5\pi}}{(x-y)^{6\pi}}\right]^{\frac{1}{\pi}} = (x\text{-}y)^2$

d. $\frac{x^4(-x)^5}{(-x)^2} = \text{-}x^7$

e. $\left[\frac{\left(x^2 x^{\frac{1}{3}}\right)^3}{y^7} - \left(\frac{y}{x}\right)^{-7}\right]^0 =$ *non è definita perché richiede il calcolo di* 0^0

Esercizio 6
Calcolare le seguenti potenze, quando è possibile:

a. $\left[(-1)^4\right]^{-\frac{1}{4}} = 1$

b. $\left[(-1)^{-\frac{1}{4}}\right]^4 =$ *Non definita*

c. $(-1)^{-1} = \text{-}1$

Esercizio 7
Semplificare i seguenti radicali assoluti (cioè in cui si suppone che il radicando sia positivo)

a $\sqrt{x^3(x+2)} = |x|\sqrt{x(x+2)}$

b $\sqrt[3]{-8x^3} = \text{-}2x$

c $\sqrt[6]{(1-x)^3} = \sqrt{1-x}$

Esercizio 8
Individuare l'insieme di validità delle seguenti uguaglianze, motivando la risposta:

a $\left(\sqrt{x-3}\right)^2 = x-3$ *È valida per gli x>3 (dominio del radicale)*

b $\sqrt{(x-3)^2} = x-3$ *È valida per gli x>3 (altrimenti i segni dei due membri sarebbero diversi).*

Esercizio 9
Dire, per ognuna delle seguenti coppie, quale funzione logaritmica è maggiore dell'altra, distinguendo i casi 0<x<1 e x>1:

a $y = \log_{\frac{1}{3}} x \quad y = \log_{\frac{1}{2}} x$

b $y = \log_3 x \quad y = \log_2 x$

c $y = \log_{\frac{1}{2}} x \quad y = \log_2 x$

Esercizio 10
Basandosi sulla definizione di logaritmo calcolare i seguenti logaritmi:

a. $\log_2 \frac{1}{32} = \textit{-5}$
b. $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \textit{-3}$
c. $\log_8 128 = \textit{7/3}$
d. $\log_x x^2 = \textit{2}$

Esercizio 11
Determinare il valore di x in modo che valgano le seguenti uguaglianze:

a. $\log_4 x = -1$ *(1/4)*
b. $\log_{\frac{1}{3}} x = -2$ *(9)*
c. $\log_{\sqrt{a}} x = 2$ *(a)*
d. $\log_{\sqrt{2}} x = \frac{2}{3}$ *(*$\sqrt[3]{2}$*)*
e. $\log_x 81 = 4$ *(3)*
f. $\log_x \frac{1}{16} = -2$ *(4)*

Esercizio 12
Applicando le proprietà dei logaritmi trasformare le seguenti espressioni in somme algebriche:

a. $\log\left(ab^2\right) = \log a + 2\log|b|$
b. $\log(ab)^2 = 2\log|a| + 2\log|b|$
c. $\log\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = \log 4 - \log 3 + \log\pi + \text{r}\log r$

Esercizio 13
Applicando le proprietà dei logaritmi determinare il valore di x:

a. $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log b + 3\log c \quad x = a^2 c^3 \sqrt{b}$
b. $\log x = 2\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{2}{3}\log c \quad x = \frac{a^2\sqrt{b}}{\sqrt[3]{c^2}}$
c. $\log x = \log(a+b) - \log(a-b) \quad x = \frac{a+b}{a-b}$

Esercizio 14
Dimostrare che $\log_a b \log_b a = 1$ *Poiché* $a^{\log_a b} = b$, *prendendo i logaritmi in base b di entrambi i membri si ottiene la formula richiesta.*