

Classe IV B – Test di verifica di matematica – 7 ottobre 2002

Argomento del test: I teoremi di Cramer e Rouchè-Capelli. Tempo a disposizione 20 minuti.

1. Trovare il rango della seguente matrice:
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il determinante della matrice vale 1. Se ne deduce che il suo rango è 3.

2. Calcolare l'area del triangolo di vertici (0,0), (1,1), (2,5).

L'area richiesta è data da $\frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$. Il calcolo è immediato e si ottiene: $A = \frac{3}{2}$.

3. Risolvere, utilizzando opportunamente il teorema di Rouchè Capelli, il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Si considerano le matrici completa e incompleta: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 2 & 1 & -3 & | & 1 \end{bmatrix}$. Poiché $\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} = 0$,

mentre $\det \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -15$, le matrici incompleta e completa hanno rango diverso e il sistema è incompatibile.

4. Dare la definizione di rango di una matrice.

Si considerano tutti i minori della matrice. Il numero r è detto rango della matrice se valgono le seguenti due proprietà: almeno un minore di ordine r è diverso da zero; non esistono minori di ordine $r+1$, ovvero tutti i minori di ordine $r+1$ sono nulli.