Classe 4B – Compito di matematica – 21 febbraio 2002

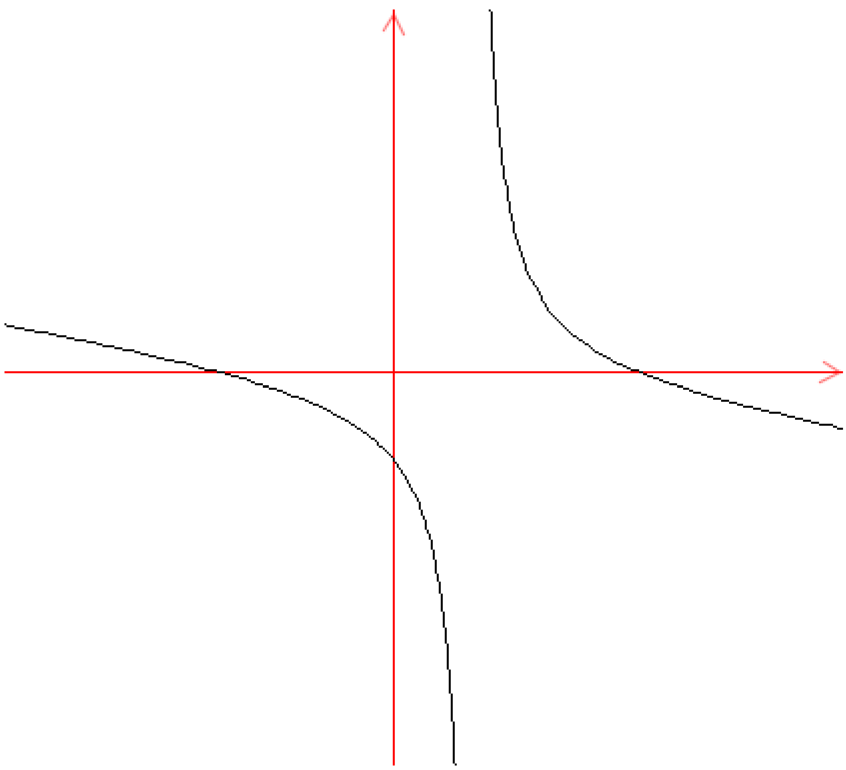
Argomento del test: Coniche - Trasformazioni piane

N.B. Il test sulle coniche non prevede l'uso dell'algebra lineare

Esercizio 1 - Rappresentare graficamente le seguenti coniche:

1. $3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$

Si tratta di trovare una rotazione di assi che "elimini" il termine misto. Tenendo conto delle note formule per la rotazione degli assi: $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ *e scrivendo solo i coefficienti del termine misto, si ottiene la seguente equazione omogenea nell'incognita α,* $3(-2\cos\alpha\sin\alpha)+10(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+3(2\sin\alpha\cos\alpha)=0$. *La soluzione che ci interessa è* $\alpha=\frac{\pi}{4}$. *Sostituendo nelle formule per la rotazione e semplificando si ottiene la seguente equazione:* $8x^2-2y^2-8x\sqrt{2}-6y\sqrt{2}-13=0$. *Riducendola a forma canonica si ottiene infine l'equazione:* $\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{\left(y+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}{4}=1$. *Si tratta dunque di un'iperbole con centro nel punto* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ *e semiassi lunghi 1 e 2. Il suo grafico è rappresentato qui sotto.*

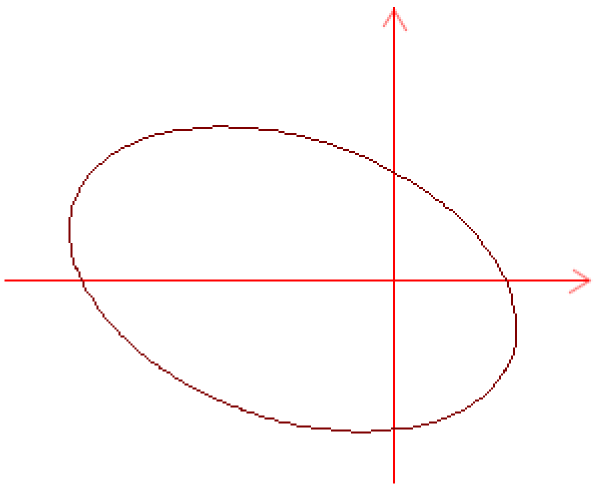


2. 8x^2+4xy+5y^2+16x+4y+-28=0

Con la tecnica e le notazioni viste sopra si trova l'equazione $4\cos 2\alpha - 3\sin 2\alpha = 0$. *La soluzione adatta ai nostri scopi è* $\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$. *Usando le formule di bisezione si trova* $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

Sostituendo e semplificando si ottiene l'equazione $45x^2 + 20y^2 + 36x\sqrt{5} - 8y\sqrt{5} - 140 = 0$.

Riducendola a forma canonica si ottiene: $\frac{\left(x + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}{4} + \frac{\left(y - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}{9} = 1$. *Si tratta di un'ellisse di centro* $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ *e semiassi 2 e 3. Il suo grafico è rappresentato qui sotto.*



3. x^2+2xy+2y^2+6y+9=0

L'equazione si può riscrivere nella forma $(x+y)^2 + (y+3)^2 = 0$. *L'unica soluzione è il punto (-3,3).*

Esercizio 2 - Considerata la trasformazione piana:

$$\begin{cases} x' = x - 2y + 1 \\ y' = -x + 3y - 2 \end{cases}$$

1. Se ne trovi l'inversa.

La trasformazione inversa è: $\begin{cases} x = 3x' + 2y' + 1 \\ y = x' + y' + 1 \end{cases}$

2. Trovare l'immagine della retta 3x+y-2=0.

Si ottiene banalmente per sostituzione $10x' + 7y' + 2 = 0$.

3. Provare che le due rette incidenti 3x+y-2=0 e x-y+1=0 si trasformano in due rette incidenti in modo che il punto di intersezione delle rette trasformate è esattamente il trasformato del punto di intersezione delle rette date.

Le rette date si incontrano nel punto $\left(\frac{1}{4},\frac{5}{4}\right)$*, il cui trasformato è* $\left(-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right)$*, che è proprio il punto di intersezione delle due rette trasformate* $\begin{cases} 10x'+7y'+2=0 \\ 2x'+y'+1=0 \end{cases}$.

4. Provare che le due rette parallele x-y+1=0 e 2x-2y-3=0 si trasformano in due rette parallele.

Le immagini di queste due rette sono le rette parallele: $\begin{cases} 2x'+y'+1=0 \\ 4x'+2y'-3=0 \end{cases}$.

5. Preso un segmento qualunque AB, di estremi $A(x_A,y_A)$ e $B(x_B,y_B)$, si dimostri che il trasformato del suo punto medio è il punto medio del segmento trasformato.

Basta calcolare il trasformato di $\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)$*: si verifica facilmente che si tratta di* $\left(\frac{x'_A+x'_B}{2},\frac{y'_A+y'_B}{2}\right)$